

פתרון מיון שלב ב' התשע"ט – מועד שני

הנבחרת הצעירה במתמטיקה ומדעים

16.5.19

הוראות לבחינה

- משך המבחן 3 שעות.
- אין להשתמש במחשבון או בכל אמצעי עזר אחר בזמן המבחן.
- ענו על המבחן בעט בלבד. על השאלות הפתוחות יש לענות באופן מסודר וברור.
- המבחן מורכב משני חלקים – החלק הראשון מכיל שאלות פתוחות. ענו על החלק הראשון במחברת הבחינה. החלק השני מכיל שאלות סגורות. ענו על החלק השני בדף האחרון של טופס זה. בתום המבחן תלשו את דף המענה על השאלות הסגורות והגישו אותו יחד עם מחברת הבחינה.
- המבחן קשה. לא מצופה מכם להספיק לענות על כל השאלות ולהוציא 100. כן מצופה שתעשו כמיטב יכולתכם.
- קראו תחילה את כל השאלות לפני שאתם מתחילים לפתור. התחילו בשאלות שאתם מרגישים איתן יותר בנוח.
- על השאלות הפתוחות יש לענות תשובות מלאות ומנומקות.

חלק א' – שאלות פתוחות

שאלה 1

הוסיפו סימני פעולות חשבון וסוגריים לפי בחירתכם כדי שהשוויון הבא יתקיים. **מצאו שני פתרונות שונים** וכתבו אותם במחברת הבחינה תחת הכותרת "פתרון לשאלה 1".

$$1 \quad 2 \quad 3 = 4 \quad 1 \quad 4$$

פתרון

מכיוון שההוראה לא מגבילה את סימני החשבון כלל, יש המון פתרונות. הנה כמה:

$$1. \quad (1 + 2)/3 = (4 \times 1)/4$$

$$2. \quad (1 \times 2) - 3 = (4 - 1) - 4$$

$$3. \quad (-1 \times 2) + 3 = 4 + 1 - 4$$

$$4. \quad 1 \times 2 + 3 = \sqrt{4} + 1 + \sqrt{4}$$

$$5. \quad 1 + 2 \times 3 = \sqrt{4} + 1 + 4$$

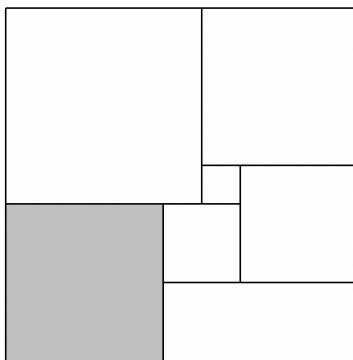
$$6. \quad 1 \times 2 \times 3 = 1 + 2 + 3 = (4 - 1) \times \sqrt{4}$$

$$7. \quad 1 \times 2 \times (3!) = (4 - 1) \times 4$$

אני בטוח שיש עוד המון

שאלה 2

הצורה הבאה מורכבת מריבועים. **מצאו את אורך צלע הריבוע האפור**, אם נתון כי אורך צלע הריבוע הקטן הוא 1 ס"מ. נמקו את תשובתכם.



פתרון

אם אורך הריבוע הקטן הוא 1 אז הבאים בתור בגודל הם $x+1, x+2, x+3, x+4$ לפי סדר ספירלי, כאשר אין דרך לדעת מהו x בדיוק (בציור הוא 1 גם כן, אבל זה לא נתון לנו). אזי אם נסמן את האפור בתור y נקבל כי $x+1+x+2+y=x+3+x+4$ לפי זה ששכום האורכים למטה שווה לשכום האורכים למעלה. לכן $y=4$ ללא קשר למהו x !

שאלה 3

ג'נטלמן תמיד אומר אמת לאנשים שהוא מכיר ומשקר לאנשים שהוא לא מכיר. פעם התאספו 50 ג'נטלמנים בחדר וכל אחד אמר לכל אחד אחר את אחד מ-2 המשפטים הבאים: (1) יש לי בחדר זה מספר זוגי של מכרים. (2) יש לי בחדר זה מספר אי-זוגי של מכרים. **האם יכול להיות שמשפט (1) נאמר 2019 פעמים בדיוק?** נמקו את תשובתכם.

פתרון

אם לג'נטלמן יש מספר זוגי של מכרים, הוא אומר את משפט 1) כמות זוגית של פעמים. אם לג'נטלמן יש מספר אי-זוגי של מכרים, אז כמות האנשים שאינם מכרים שלו היא זוגית ולכן הוא יאמר את משפט 1) כמות זוגית של פעמים. לכן לא ייתכן שיאמר המשפט 2019 פעמים כי זה מספר אי-זוגי.

שאלה 4

אבי שילם 12 ש"ח עבור מחברת, 2 עפרונות ומחק. בני שילם 27 ש"ח עבור 2 מחברות, 3 עפרונות ו-3 מחקים. כמה שילם גדי עבור 2 מחברות, 5 עפרונות ומחק יחיד? אנו מניחים שהחנות בה נקנו החפצים היא אותה החנות ושהמחירים בה לא השתנו בין שלושת הרכישות.

פתרון

קיבלנו את הנתונים

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 12 \\ 2x + 3y + 3z &= 27\end{aligned}$$

ושואלים כמה שווה $2x + 5y + z$? נשים לב ש-4 פעמים המשוואה הראשונה פחות פעם אחת השנייה נותן

$$\begin{aligned}2x + 5y + z &= 4(x + 2y + z) - (2x + 3y + 3z) \\ &= 4 \times 12 - 27 \\ &= 21\end{aligned}$$

ולכן התשובה היא 21.

שאלה 5

אני תמיד שותה קפה בין השעות 13 : 00 ל-14 : 00, כאשר חוצה הזווית בין מחוגי השעות והדקות מצביע בדיוק על המספר 12. באיזו שעה בדיוק אני שותה קפה? יש לדייק עד לשניות שלמות ולנמק את קביעתכם.

פתרון

שעון הדקות משלים $x/60$ כל x דקות והשעות מתקדם $\frac{x}{12 \times 60}$ סיבוב באותו פרק זמן. המיקום של השעות יהיה $\frac{1}{12} + \frac{x}{12 \times 60}$ ושל הדקות $\frac{x}{60}$ בשעה x דקות אחרי 13 : 00. הנתון אומר שחוצה הזווית פוגע ב-12 שזה בדיוק לומר שהדקות והשעות מראה אחד של השני ביחס לציר בין 6 ל-12. אבל זה אומר שסיבוב 1 פחות מיקום הדקות שווה למיקום השעות. מכך נקבל את המשוואה

$$\begin{aligned}1 - \frac{x}{60} &= \frac{1}{12} + \frac{x}{12 \times 60} \quad | \times 60 \\ 60 - x &= 5 + \frac{x}{12} \\ \frac{13}{12}x &= 55 \quad | \times \frac{12}{13} \\ x &= \frac{55 \cdot 12}{13} = \frac{660}{13}\end{aligned}$$

עם חילוק ארוך אפשר לראות ש- $\frac{660}{13} = 50 + \frac{10}{13}$ ולכן השעה היא 13 : 50 : ?? כאשר ?? הוא $\frac{10}{13}$ מדקה. שוב אפשר לכפול ב-60 כדי לקבל שניות ולקבל $\frac{600}{13} = 46 + \frac{2}{13}$ ולכן אם נגלגל לשנייה הקרובה ביותר נקבל 13 : 50 : 46 - אחד בצהריים, חמישים דקות וארבעים ושש שניות.

שאלה 6

נתונות 4 ספרות שונות: a, b, c, d . מהספרות האלה הרכיבו את כל המספרים הארבע-ספרתיים האפשריים בהם כל ספרה מבין אלה מופיעה פעם אחת בדיוק. הסכום של המספר הקטן ביותר שנוצר והגדול ביותר יצא 9467. מצאו את הספרות a, b, c, d ונמקו את קביעתכם.

פתרון

נניח כי $a < b < c < d$. אזי יש שני מקרים: אם $a \neq 0$ אז הקטן ביותר הוא $abcd$ והגדול ביותר $dcba$ כאשר ההצמדה היא עשרונית ולא הכפלה. אם $a = 0$ אז הקטן ביותר הוא $bacd = b0cd$ והגדול ביותר $dcba = dc0$.
 נניח שאנחנו במקרה 1: מהנתון שקיבלנו 9467 רואים ישר כי $a + d < 10$ ולכן $a + d = 7$ ולא 17. אבל אז מקבלים סתירה כי אם $a + d = 7$ אז הסכום שלהם קטן ממש מ-9000 (סכום מספרים תלת ספרתיים תמיד קטן מ-2000). אז אנחנו במקרה השני.
 אנחנו ישר מקבלים כי $d = 7$ כי ספרת האחדות היא $7 = a + d = 0 + d$. מכיוון שהספרה השמאלית ביותר היא $b + d$ או $b + d + 1$ מקבלים כי $b = 1$ או $b = 2$ ולכן $c = 5$ או $c = 4$ בהתאמה. נותר לבדוק את המקרים ולראות מי מתאים:

$$1057 + 7510 = 8567$$

$$2047 + 7420 = 9467$$

ולכן המספרים הם 0, 2, 4, 7.

חלק ב' – שאלות סגורות

שאלה 7

כוח המשיכה פועל בין גופים בעלי מסה. ידוע כי כוח המשיכה פועל חזק יותר בין גופים שהמסה שלהם גדולה יותר. בנוסף, ידוע כי כוח המשיכה פועל חזק יותר ככל שמרכזי המסה של שני הגופים קרובים יותר. בנוסף, כוח המשיכה משתמר תחת שינוי קנה מידה, כלומר: אם כוח המשיכה בין שני גופים במשקל 1 קילוגרם ובמרחק מטר 1 אחד מהשני הוא x , אז גם כוח המשיכה בין שני גופים במשקל 2 קילוגרם ובמרחק 2 מטרים אחד מהשני הוא x . **על סמך נתונים אלו בלבד, סמנו (בדף התשובות) מי מהנוסחאות הבאות יכולה לייצג את כוח המשיכה בין שני גופים שמשקלם m_1 ו- m_2 קילוגרמים והמרחק בין מרכזי המסה שלהם הוא R מטרים? הקיפו בעיגול בדף התשובות את כל הנוסחאות שעונות על התנאים כפי שצינו בשאלה.**

1. $7m_1m_2R$;

2. $15\frac{R^2}{m_1m_2}$;

3. $92\frac{m_1^2m_2^2}{R^4}$;

4. $\frac{10m_1m_2}{R}$.

פתרון

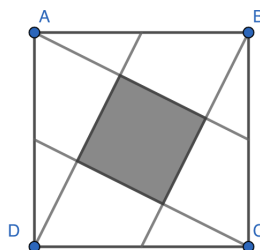
תשובה סופית: צריך להקיף רק את 3.

הסבר:

נתון שככל שהמרחק גדל הכוח יורד, ולכן R צריך להיות במכנה ולכן 1 נפסל. באופן דומה אומרים שככל שהמסה גדולה יותר הכוח גדל ולכן 2 נפסל. כעת אם מכפילים את כל הנתונים ב-2 הנוסחה של 4 לא משתמרת בעוד ששל 3 כן, לכן רק 3 עונה על תנאי השאלה.

שאלה 8

נתון ריבוע $ABCD$. חיברו את A לאמצע הצלע BC , את B לאמצע הצלע CD , את C לאמצע הצלע DA ואת D לאמצע הצלע AB . נוצר ריבוע חדש בתוך הריבוע המקורי. מה יחס השטחים בין הריבועים הקטן והגדול?



פתרון

5 : 1, כלומר הקטן הוא חמישית מהגדול.

הסבר: אפשר לגזור את המשולשים הקטנים ולהדביק אותם למרובעים המוזרים שצמודים אליהם בסיבוב של 180° סביב הקדקד המשותף שלהם ולראות שמקבלים 4 ריבועים חדשים שחופפים לאפור באמצע. אפשר גם להשתמש בפיתגורס ודמיון ולקבל זאת ישירות.

שאלה 9

1. נתון לוח משבצות ריבועי מגודל $n \times n$ המורכב ממשבצות 1×1 . בכל דקה, נולד בכל משבצת של הלוח חיזר. פעם בדקה כל חיזר קיים קופץ לאחת המשבצות השכנות שלו לפי חוקיות שאתם בוחרים עבורו. אם החיזר נמצא על משבצת בקצה הלוח, הוא יכול לקפוץ אל מחוץ ללוח ולהיעלם. ממשבצת נתונה בקצה הלוח עד שלושה חיזרים יכולים לקפוץ החוצה בכל דקה, לכל כיוון פנוי – במשבצת פינתית יש שני כיוונים פנויים ובמשבצת צדדית רק אחד. כמה גדול יכול להיות הלוח (כלומר n) אם אנחנו רוצים שכמות החיזרים לעולם לא תהיה יותר גדולה מ-1,000,000? תשובתכם צריכה להיות ה- n המירבי עבורו התנאי הזה יכול להתקיים.

2. נתונה קובייה מגודל $n \times n \times n$ המורכבת מקוביות מגודל $1 \times 1 \times 1$. בכל דקה נולד בכל קובייה קטנה חיזר. בכל דקה חיזר עובר לפי הוראות שלכם לקובייה שחולקת פאה משותפת איתה. אם חיזר נמצא בקובייה חיצונית הוא יכול לצאת אל מחוץ ללוח ולהיעלם, אבל מכל פאה חשופה יכולים לצאת רק 3 חיזרים בכל דקה. כמה גדולה יכולה להיות הקובייה (כלומר n) אם אנחנו רוצים שכמות החיזרים בתוכה לעולם לא תהיה יותר גדולה מ-1,000,000? תשובתכם צריכה להיות ה- n המירבי עבורו התנאי הזה יכול להתקיים.

פתרון

1. תשובה: $n = 12$.
נשים לב כי בכל דקה נולדים n^2 חיזרים ויכולים לצאת מהלוח $3 \times 4n = 12n$ חיזרים. אז אם $n^2 > 12n$ כמות החיזרים תגדל ותגדל לעד ובפרט יהיה רגע ובו יהיו יותר מ- 10^6 חיזרים על הלוח. אם $n = 12$ אז יכולים לברוח מהלוח בכל דקה אותה כמות של חיזרים שנולדים בו ופוטנציאלית אפשר להגיע למצב מאוזן שקטן מ- 10^6 וזה אכן אפשרי: מגדירים לכל חיזר מסלול לקצה הלוח כך שמשבצת היעד נמצאת ברבע הלוח שבו התחיל החיזר, ולכל משבצת יעד נשלחים 3 חיזרים אם היא צידית ו-6 אם היא פינתית. מכיוון שהמסלול הארוך ביותר בתוך רבע לוח הוא 10 כל חיזר חי לכל היותר 11 דקות ועל הלוח יהיו לא יותר מ- $11 \cdot 12^2 < 10^6$ חיזרים אם החיזר שמגיע למשבצת סוף המסלול שלו קופץ ממנה בדקה שלאחר מכן.
2. תשובה: $n = 18$.
באופן דומה הפעם נולדים n^3 חיזרים בכל דקה ויכולים לצאת מהקובייה $3 \times 6n^2$ חיזרים. אז שוב אם $n > 18$ זה בלתי אפשרי אבל אם $n = 18$ זה אולי אפשרי. נחלק את הקובייה לשמיניות ונגדיר מסלול לכל חיזר לאיזשהי משבצת בשמינית שלו כך שהם יוכלו לקפוץ ברגע שהם מגיעים לשם. אזי המסלול הארוך ביותר הוא $17 \cdot 3 = 51$ ולכן ייקחו לכל היותר 52 דקות מהרגע שחיזר נולד עד שהוא קופץ החוצה. סך הכל יהיו לכל היותר $10^6 < 8 \cdot 10^5 = 100 \cdot 20^3 < 51 \cdot 18^3$ חיזרים בקובייה הגדולה בכל רגע.

שאלה 10

48 אנשים יושבים במעגל. חלקם צדיקים וחלקם רשעים. הצדיקים תמיד אומרים אמת בעוד הרשעים תמיד משקרים. כל האנשים במעגל אמרו את המשפט הבא: "מבין השכנים של שכניי שאינם אני יש צדיק אחד ורשע אחד". כמה צדיקים יש במעגל? ענו את כל התשובות האפשריות.

פתרון

תשובות: 0, 16, 32.
מכיוון שהשיח הוא בקפיצות של 2, זה כאילו יש שני מעגלים של 24 אנשים שאומרים את המשפט הזה על השכנים המידיים שלהם. כעת, אם כולם שקרנים הם יכולים להגיד את המשפט הזה ולכן 0 זאת תשובה. יכול להיות שבמעגל אחד מתוך השניים אין דוברי אמת, אבל במעגל השני יש לפחות דובר אמת אחד. ברגע שיש דובר אמת יש לו שכן צדיק ושכן רשע. אז המבנה חייב להיות "...צדיק־רשע־צדיק־רשע־צדיק..." ולכן יש $2/3$ צדיקים מהמעגל, שזה 16 אם רק באחד מהם יש דוברי אמת ו-32 אם בשניהם יש.

טבלת סימון לפתרון השאלות הסגורות

שם מלא:

תעודת זהות:

בית הספר:

מלאו את התשובות הנכונות במקומות המתאימים.

שאלה 7

הקיפו את כל התשובות הנכונות (יכולה להיות כל כמות של תשובות נכונות):

1.

2.

3.

4.

שאלה 8

השטח של הריבוע הגדול חלקי הקטן הוא:

שאלה 9

1. מהו ה- n הגדול ביותר כך שהתנאי מתקיים:

2. מהו ה- n הגדול ביותר כך שהתנאי מתקיים:

שאלה 10

כמות הצדיקים במעגל היא:

כתבו את כל התשובות הנכונות.