

פתרון מיון שלב ב' התשע"ט – מועד ראשון

הנבחרת הצעירה במתמטיקה ומדעים

13.5.19

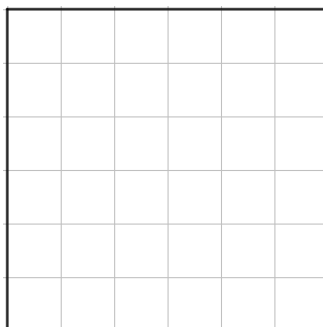
הוראות לבחינה

- משך המבחן 3 שעות.
- אין להשתמש במחשבון או בכל אמצעי עזר אחר בזמן המבחן.
- ענו על המבחן בעט בלבד. על השאלות הפתוחות יש לענות באופן מסודר וברור.
- המבחן מורכב משני חלקים – החלק הראשון מכיל שאלות פתוחות. ענו על החלק הראשון במחברת הבחינה. החלק השני מכיל שאלות סגורות. ענו על החלק השני בדף האחרון של טופס זה. בתום המבחן תלשו את דף המענה על השאלות הסגורות והגישו אותו יחד עם מחברת הבחינה.
- המבחן קשה. לא מצופה מכם להספיק לענות על כל השאלות ולהוציא 100. כן מצופה שתעשו כמיטב יכולתכם.
- קראו תחילה את כל השאלות לפני שאתם מתחילים לפתור. התחילו בשאלות שאתם מרגישים איתן יותר בנוח.
- על השאלות הפתוחות יש לענות תשובות מלאות ומנומקות.

חלק א' – שאלות פתוחות

שאלה 1

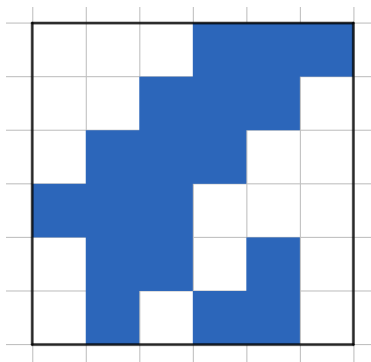
עליכם לצבוע חלק ממשבצות טבלה בגודל 6×6 , כך שבכל שורה יש 3 משבצות צבועות ובכל עמודה יש או 4 משבצות צבועות או משבצת צבועה אחת.



ציירו את הפתרון במחברות הבחינה שלכם עם הכותרת "פתרון לשאלה 1".

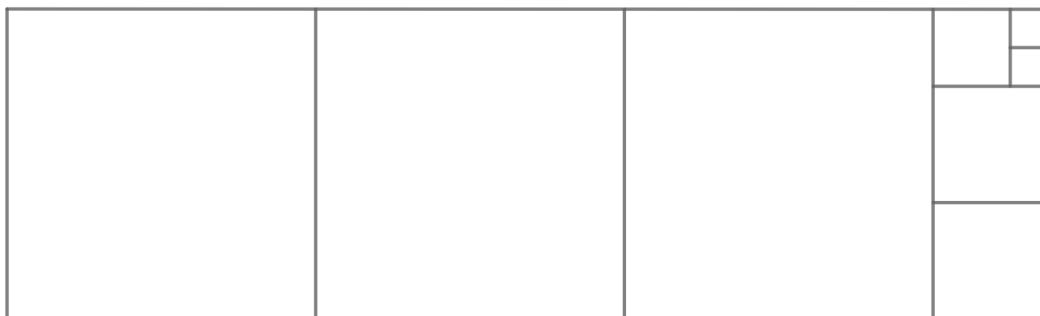
פתרון

יש הרבה פתרונות. הנה אחד:



שאלה 2

איציק גזר מלבן בגודל 135×40 לריבועים כפי שמוצג בציור. מהם אורכי הצלעות של הריבועים הללו?



פתרון

כל פעם הריבועים הכי גדולים שחתכנו חולקים צלע עם המלבן. לכן הגדולים הם מגודל 40×40 . אחרי שהורדנו שלושה כאלו נשארו עם מלבן מגודל 40×15 ולכן הבאים בתור מגודל 15×15 . אחרי שמורידים שניים נשארים עם 10×15 . ואז מורידים אחד של 10×10 ונשארים עם 5×10 שמכוסה על ידי שניים מגודל 5×5 .

סך הכל: אורכי צלעות הריבועים הם 5, 10, 15, 40. הערה לבודקים: זה בעצם מבצע אלגוריתם אוקלידס למציאת מחלק משותף גדול ביותר.

שאלה 3

נתון השבר $\frac{2}{3}$ על הלוח. מותר לכם לשנות את השבר בכל צעד באחד משני האופנים הבאים:

(1) מותר להוסיף למונה של השבר את המספר 2019;

(2) מותר להוסיף למכנה של השבר את המספר 2020.

לדוגמה, אם התחלנו מ- $\frac{2}{3}$ אפשר בצעד הראשון להפוך אותו ל- $\frac{2019+2}{3} = \frac{2021}{3}$ או ל- $\frac{2}{2020+3} = \frac{2}{2023}$ וממשיכים כך עם השבר החדש. **האם אפשר בעזרת שתי הפעולות הללו, אחרי מספר כלשהו של צעדים, לקבל שבר השווה ל- $\frac{3}{5}$?** אם כן, הראו סדרת צעדים שמשיגה זאת. אם לא, נמקו מדוע.

פתרון

כדי להגיע לשבר $\frac{3}{5}$ צריך להגיע לצורה $\frac{3N}{5N}$ עבור N כלשהו. בפרט צריך שהמונה יתחלק ב-3 והמכנה יתחלק ב-5. שני הדברים הללו לא אפשריים:

1. בכל פעם שמפעילים את פעולה (1) מוסיפים למונה מספר שמתחלק ב-3. מכיוון שהתחלנו עם מספר שלא מתחלק ב-3 במונה, לעולם לא נגיע לאחד שכן על ידי הוספת מספרים שמתחלקים ב-3 (מודולו 3 המונה הוא תמיד 2).

2. אותו טיעון עובד למכנה עם פעולה (2) וחלוקה ב-5. מכיוון שהמספר במכנה לא מתחלק ב-5 ובכל צעד מותר רק להוסיף לו כפולות של 5, אי אפשר להגיע למספר שמתחלק ב-5 (מודולו 5 המכנה הוא תמיד 3).

כל אחד מהטיעונים הללו בפני עצמו מוכיח שזה לא אפשרי. מספיק לציין אחד מהם כדי לקבל ניקוד מלא.

שאלה 4

במחסן יש ארגזים של מספרים במשקלים 16 ק"ג, 17 ק"ג ו-40 ק"ג. **האם ניתן למכור 140 ק"ג מספרים ללא פתיחת הארגזים?** אם לא ניתן לעשות זאת עליכם להסביר מדוע. אם ניתן לעשות זאת, עליכם למצוא את **כול** האפשרויות לכך ולנמק מדוע אלו כולן.

פתרון

$$\text{אפשר לקחת } 140 = 1 \times 40 + 4 \times 17 + 2 \times 16.$$

שאלה 5

בקופסת קוסם 100 כדורים: אדומים, לבנים או ירוקים. שלושה מהכדורים קסומים, ומדי פעם הם מחליפים צבע. פעם הקוסם הציץ לקופסה וראה שיש בה יותר כדורים אדומים מלבנים, ויותר כדורים לבנים מירוקים. אחרי דקה הוא הציץ שוב, וראה שהמצב התהפך – בקופסה יש יותר כדורים ירוקים מלבנים, ויותר כדורים לבנים מאדומים. **כמה כדורים לבנים היו בקופסה בפעם הראשונה שפתח אותה הקוסם?**

פתרון

צריך למצוא שלושה מספרים x, y, z כך ש- $x + y + z = 100$ וגם $x > y > z$, $x - 3 < y < z + 3$. התנאי אי-שוויון אומרים ש- $x = y + 1$ או $x = y + 2$ ו- $z = y - 1$ או $z = y - 2$. אז מקבלים $100 = y + 2 + y + y - 2 = 3y$ או $100 = y + 2 + y + y - 1 = 3y + 1$ או $100 = y + 1 + y + y - 2 = 3y - 1$ או $100 = y + 1 + y + y - 1 = 3y$. מכיוון שהמשוואה בשלמים, רק $3y + 1 = 100$ פתירה כי $100 \equiv 1 \pmod{3}$. אזי $y = 33$ וכמות הלבנים היא 33 (החלוקה היא 35, 33, 32).

שאלה 6

עבור מספר טבעי x המיוצג בבסיס עשרוני, נגדיר ב- $S(x)$ את סכום הספרות שלו. לדוגמה $S(1074) = 12$.

1. האם קיים מספר טבעי x שמקיים $x + S(x) + S(S(x)) = 2019$? תנו דוגמה ל- x כזה אם קיים, או הוכיחו כי אין כזה.

2. האם קיים מספר טבעי x שמקיים $x + S(x) + S(S(x)) = 2020$? תנו דוגמה ל- x כזה אם קיים, או הוכיחו כי אין כזה.

שימו לב כי הכוונה ב- $S(S(x))$ היא להפעיל סכום ספרות פעמיים: לדוגמה $S(12) = 3$ או $S(S(1074)) = S(S(99746)) = 8$.

פתרון

נזכר כי $S(x) \equiv x \pmod{3}$ ולכן $3 \mid x + S(x) + S(S(x)) \iff 3 \mid 3x \iff 0 \pmod{3}$. זה כבר מראה ש-2 לא פתיר כי 2020 לא מתחלק ב-3. לעומת זאת את 2019 אפשר לקבל על ידי לקיחת $x = 2011$: $S(2011) = 4$ ולכן $S(S(2011)) = S(4) = 4$ כלומר $x + S(x) + S(S(x)) = 2011 + 4 + 4 = 2019$ ואז $S(2005) = 7$ כי 2005 גם על ידי 2005 אפשר גם על ידי 2005: $x + S(x) + S(S(x)) = 2005 + 7 + 7 = 2019$.

חלק ב' – שאלות סגורות

שאלה 7

שני שחקנים משחקים במשחק הבא: על הלוח כתוב המספר 1. בכל תור מותר להגדיל את המספר על הלוח ב-1 (לבצע +1), או לכפול את המספר על הלוח פי 2 (לבצע $\times 2$). מפסיד מי שגרם למספר להיות גדול ממש מ-100, כלומר אם בתור שלי גרמתי למספר להיות 101 או יותר אז הפסדתי. מי שמפסיד רוצה למשוך את המשחק כמה שיותר תורות. **בהנחה ושני השחקנים משחקים הכי טוב שהם יכולים, כמה תורות יהיו במשחק?**

פתרון

אם תורו של מישהו ויש על הלוח מספר זוגי גדול שווה ל-52 הוא הפסיד, כיוון שאם הוא יכפול ב-2 הוא מפסיד מיד, ואם הוא יוסיף 1, השני יוסיף 1 גם כן והוא יחזור לאותו מצב עם +2, אז הוא מתישהו יגיע ל-100 ויפסיד לא משנה מה יעשה. לכן תורו של מישהו ועל הלוח יש מספר גדול שווה ל-26 הוא מנצח, כי הוא יכפול אותו ב-2. לכן השחקן שבתורו יש מספר גדול שווה ל-26 ינצח, כלומר גדול ממש מ-25. אז חזרנו לאותו משחק רק שהפעם מי שיש לו מספר אי-זוגי בין 13 ל-25 מפסיד, כי אם הוא יכפול ב-2 לשני יהיה מספר גדול שווה ל-26, ואם הוא יוסיף 1 אז השני יוסיף 1 עד שהוא יגיע ל-25 ולכן יפסיד. אבל השחקן השני יכול לדאוג שלשחקן הראשון יהיה תמיד כתוב מספר אי-זוגי בין 13 ל-25 פשוט על ידי כך שהוא תמיד יעשה +1 ולא יכפול ב-2 לפני שהמספר על הלוח לא גדול מ-26.

אז איך השחקן הראשון ימקסם צעדים? הוא יעשה +1 עד שיגיעו ל-26 ואז השחקן השני חייב לכפול ב-2 ויגיע ל-52 אחרת הוא יפסיד, ומשם שוב יהיה +1 כל הזמן. כלומר המשחק ייראה כך:

$$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} 3 \dots \xrightarrow{+1} 25 \xrightarrow{+1} 26 \xrightarrow{\times 2} 52 \xrightarrow{+1} 53 \rightarrow \dots \xrightarrow{+1} 100 \xrightarrow{+1} 101$$

ויש פה 25 צעדי +1 ואז צעד אחד של $\times 2$ ואז 49 צעדי +1. **סך הכל 75 צעדים.**

שאלה 8

חומרים רבים המוכרים לנו מורכבים ממולקולות, והמולקולות מורכבות מאטומים. האטומים הם חלקיקים קטנים מאוד, ויש מהם סוגים שונים – יש אטומים מסוג חמצן, מסוג מימן, ורבים נוספים.

אטומים מתחברים זה לזה בקשרים שנקראים "קוולנטיים". כדי ליצור מולקולה יציבה, אטום מימן, המסומן באות H , צריך להתחבר בקשר קוולנטי אחד בלבד לאטום אחר. אטום חמצן, המסומן באות O , צריך להתחבר בשני קשרים לאטומים אחרים. אטום חנקן, המסומן באות N , צריך להתחבר בשלושה קשרים לאטומים אחרים. אטום פחמן, המסומן באות C , צריך להתחבר בארבעה קשרים לאטומים אחרים.

כך לדוגמה המולקולה של מים היא מולקולה יציבה, שמורכבת משני מימנים וחמצן בודד: $H - O - H$. האותיות מסמלות אטומים והקווים מסמלים קשרים קוולנטיים.

גם המולקולה $H - C \equiv N$ היא מולקולה יציבה. שימו לב שבדוגמה הזאת החנקן N התחבר בשלושה קשרים קוולנטיים לפחמן C ולפחמן נותר רק חיבור אחד. את החיבור הזה הוא יצר עם המימן וכעת המולקולה יציבה.

$$\begin{array}{c} H - C = O \\ | \\ N = O \end{array}$$

המולקולה הבאה גם היא יציבה

אם אחד האטומים במולקולה כלשהי לא התחבר בכמות הנכונה של קשרים קוולנטיים, המולקולה הזאת לא יכולה להיות יציבה, למשל $O - O - H$ אינה יציבה, כי לאטום החמצן השמאלי יש קשר קוולנטי בודד אבל אמורים להיות לו שני קשרים. דוגמה נוספת היא החמצן במולקולה $N \equiv O$ שבו יש קשר קוולנטי עודף.

קבעו עבור אוספי האטומים הבאים האם אפשר לייצר מהם מולקולה יציבה:

1. 5 מימנים (H), חמצן 1 (O) ופחמן 1 (C).

2. 7 מימנים (H) ו-2 פחמנים (C).

3. מימן 1 (H), חמצן 1 (O), חנקן 1 (N) ופחמן 1 (C).

4. 7 מימנים (H), חנקן 1 (N), ו-3 פחמנים (C).

פתרון

1. לא

הסבר: מבחינת זוגיות, חמצן ופחמן הם מדרגה זוגית ומימן אי-זוגי, אבל כל חיבור מוריד אחד מכל כיוון ולכן סכום הדרגות חייב להיות זוגי בסתירה לכך שפה הוא $1 \times 4 + 1 \times 2 + 5 \times 1 = 11$.

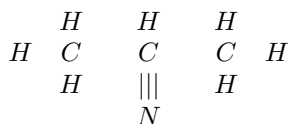
2. לא

הסבר: מאותה סיבה כמו קודם, סכום הדרגות יוצא אי-זוגי.

3. כן

לדוגמה $H - O - C \equiv N$

4. כן



התשובה של הילדים צריכה להיות רק כן\לא לכל סעיף.

שאלה 9

עליכם למצוא סידור של 6 ספרות שונות מבין הספרות 1 עד 9 על מעגל, כך שכל רצף של 3 ספרות לפי כיוון השעון יהיה מספר תלת-ספרתי שמתחלק ב-7.

פתרון

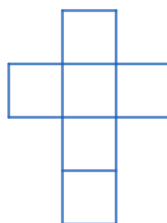
לדוגמה

154693

יכול להיות שיש עוד. אנא בדקו עם מחשבון את תוצאות הילדים כדי לוודא שהם צדקו\טעו.

שאלה 10

לקחו קובייה עשויה מנייר, שעליה רשומים המספרים מ-1 עד 6. חתכו אותה לאורך 7 ממקצועותיה ופרשו אותה כך שקיבלו את הצורה הבאה:



בכמה דרכים שונות יכולים להיות מסודרים המספרים לאחר שהקובייה נפרשה? שימו לב שהמספרים נמצאים בצד החיצוני של הקובייה ולא מופיעים בשני צידי הנייר לאחר שהיא נפרשה.

פתרון

יש $3 \times 8 = 24$ דרכים.

הסבר ראשון: אפשר לבחור את המספר באמצע הצורה ואז זה קובע גם את המספר התחתון ביותר. לזה יש 6 אפשרויות. ואז יש 4 אפשרויות לריבוע בין שניהם וזה כבר קובע את השלושה שנותרו.
הסבר שני: שימו לב כי זה בדיוק שואל כמה אוריינטציות יש לקובייה. לזה יש דרך חישוב אחרת – בוחרים פינה שתהיה במיקום קבוע (8 אפשרויות) ואז סביבה יש רק 3 סיבובים אפשריים.

טבלת סימון לפתרון השאלות הסגורות

שם מלא:

תעודת זהות:

בית הספר:

מלאו את התשובות הנכונות במקומות המתאימים.

שאלה 7

מספר התורות:

שאלה 8

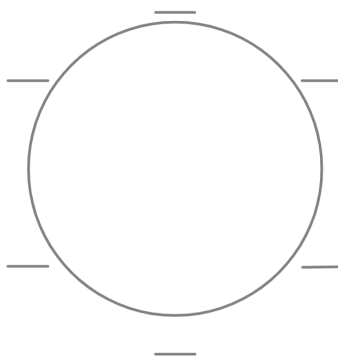
.1

.2

.3

.4

שאלה 9



שאלה 10

מספר הדרכים השונות בהן המספרים יכולים להיות מסודרים: