

מיון שלב ב' התש"ף

הנבחרת הצעירה במתמטיקה ומדעים

תאריך

הוראות לבחינה

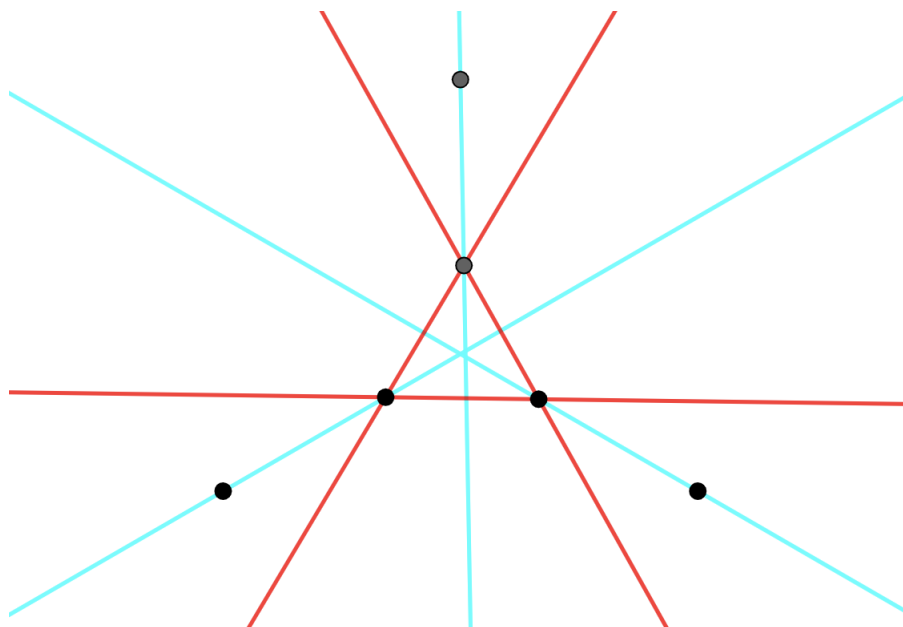
- משך המבחן 3 שעות.
- אין להשתמש באמצעי עזר בזמן המבחן ובכללם מחשבון.
- ענו על המבחן בעט בלבד. על השאלות יש לענות באופן מסודר וברור.
- המבחן קשה. לא מצופה מכם להספיק לענות על כל השאלות ולהוציא 100. כן מצופה שתעשו כמיטב יכולתכם.
- קראו תחילה את כל השאלות לפני שאתם מתחילים לפתור. התחילו בשאלות שאתם מרגישים איתן יותר בנוח.
- יש לענות תשובות מלאות ומנומקות.
- בסוף הבחינה יש לכם עשרים דקות לסרוק את המחברת ולהגיש אותה במסודר לפי ההוראות הבאות:...

שאלות

1. האם אפשר לסמן במישור 6 נקודות ולהעביר 6 ישרים, כך שעל כל ישר נמצאות 2 נקודות מסומנות ומשני צדדים של כל ישר נמצאות מכל צד 2 נקודות מסומנות?
2. מצאו את הפרש הזמן הקטן ביותר בין 2 רגעים, שבהם מחוגי השעון – שעות ודקות – מאונכים זה לזה (יש לדייק עד רמת שניות שלמות).
3. אילו מלבנים עם צלעות באורך שלם יש יותר: עם היקף 2020 או עם היקף 2022? נמקו את תשובתכם.
הערה: מלבנים $a \times b$ ו- $b \times a$ נחשבים שווים. לדוגמה אין הבדל בין מלבן 2×3 לבין מלבן 3×2 .
4. כמה זוגות של מספרים שלמים חיוביים מקיימים את המשוואה $2x + 5y = 2020$?
5. האם קיימים שני מספרים טבעיים עוקבים, שסכום ספרותיו של כל אחד מהם מתחלק ב-49? אם כן, מצאו זוג מספרים מינימאליים כאלה והוכיחו כי זה הפתרון המינימאלי. אם לא, נמקו מדוע אין שני מספרים כאלו.
6. אילו מספרים ראשוניים ניתן להציג בצורה $|n-1| + |n-2| + |n-3| + |n-4| + |n-5|$ עבור n שלם כלשהו?
7. בכיתה של גיא יש 30 תלמידים (כולל אותו). לכל תלמיד בכיתה יש בדיוק 5 חברים המשותפים עם גיא. הוכיחו, כי בכיתה יש תלמיד עם מספר אי-זוגי של חברים.
8. בכמה דרכים ניתן לצבוע קוביה ב-6 צבעים שונים? שתי קוביות נחשבות שהן צבועות באופן זהה אם יש דרך לסובב אותן ולהעמיד אותן אחת ליד השנייה כך שכל הצבעים יתאימו (כלומר להמעה, להמטה, הצפונית, הדרומית, המזרחית והמערבית כולן באותו צבע).
9. שתי מכוניות יצאו באותה השעה מעיר A בנסיעה אל העיר B. המכונית הראשונה נסעה שליש מזמן נסיעתה במהירות 50 קמ"ש ושני שליש מזמן נסיעתה במהירות 80 קמ"ש. המכונית השנייה נסעה שליש מהדרך במהירות 50 קמ"ש ושני שליש מהדרך במהירות 80 קמ"ש. מה המהירות הממוצעת של כל אחת מהמכוניות? הסיקו מכך מי המכונית שהגיעה ראשונה ליעדה. נמקו את טענותיכם.
10. בבחירות של מדינת איילנד היה אפשר להצביע עבור אליה, בתיה או גילה. בהודעת התוצאות השתמשו באחוזים במקום במספרי בוחרים, אך אם סכמתם את כמות האחוזים שהופיעו קיבלתם ביחד 146%, מה שעורר מהומה גדולה. דניאל, שהיה אחראי על ספירת הקולות, הודיע כי כשספר את הקולות של אליה הוא חישב אחוזים בלי להתחשב בקולות עבור גילה. ידוע, כי עבור בתיה הצביעו יותר מ-1000 מצביעים. הוכיחו, כי עבור אליה הצביעו יותר מ-850 מצביעים.

פתרונות

1. כן. לדוגמה



2. נשים לב כי אם המחוג של השעות במצב x והדקות ב- y אז ב- $y+t$ המצב של x יהיה $x + \frac{t}{12}$. אז אפשר לחשוב על המחוג של השעות כאילו הוא תקוע ואז השעון של הדקות מתקדם בקצב $\frac{11}{12}t$. מכיוון שהמרחק בין 90° ל- 90° מהצד השני הוא 180° , זה לא משנה אם הדקות היה לפני השעות או אחרי השעות, הזמן יהיה זהה, והוא יהיה

$$\begin{aligned}\frac{12}{11} \cdot 30 &= 30 + \frac{30}{11} \\ &= 32 + \frac{8}{11} \\ &\approx 32 + \frac{44}{60}\end{aligned}$$

כלומר בערך 32 דקות ובערך 44 שניות. נקבל סטייה של שתי שניות לכל צד בעקבות טעויות חישוב בסוף...

3. נשים לב כי היקף של מלבן מגודל $a \times b$ הוא $2a + 2b$ ולכן השאלה היא לאיזה משוואה יש יותר פתרונות, $2a + 2b = 2022$ או $2a + 2b = 2020$. ל- $a + b = 1011$ יש 505 פתרונות שונים בשלמים (כי הקטן מבין השניים הוא בין 1 ל- $\lfloor \frac{1011}{2} \rfloor$) ול- $a + b = 1010$ גם 505 פתרונות שונים בשלמים.

4. נשים לב כי אם y אי-זוגי אין פתרון למשוואה כי $2x - 2020$ זוגי תמיד. כעת, לכל y זוגי בין 2 ל-402 קיים פתרון למשוואה כי x יהיה $\frac{2020-5y}{2}$ שהוא מספר שלם חיובי. אזי סך הכל יש 201 פתרונות למשוואה ולא ייתכנו יותר כי עבור y -ים גדולים יותר x יהיה אי-חיובי.

5. בכל פעם שמוסיפים למספר $+1$ סכום ספרותיו או עולה ב-1 או יורד בכפולה של 9 ואז עולה ב-1. כלומר צריך למצוא כפולה של 9 שפחות 1 מתחלקת ב-49. אבל $99 - 1$ מתחלק ב-49 ולכן אפשר למצוא מספר x שסכום ספרותיו $98 + 49$ ואחרי שמוסיפים לו 1 סכום ספרותיו יהיה 49:

$$\begin{aligned}x &= 49,999,899,999,999,999 \\ x + 1 &= 49,999,900,000,000,000\end{aligned}$$

נסביר למה זה המספר הקטן ביותר שמקיים זאת - סכום הספרות של $x + 1$ חייב להיות קטן יותר משל x . בכמה קטן יותר הוא יכול להיות? מכיוון ש-49 הוא לא 1 פחות מכפולה של 9, 98 הוא ההפרש הראשון שמקיים את התנאי. לכן סכום הספרות של x הוא לפחות $98 + 49$ ולקחנו את הקטן ביותר כך שכשמוסיפים לו 1 ירדו לו 98 מסכום הספרות.

6. אפשר להציב $m = n - 3$ ולקבל כי $|m + 2| + |m + 1| + |m| + |m - 1| + |m - 2|$ זה המספר שאנו מחפשים. אם $m \geq 2$ או $m \leq -2$ אז כל המספרים בערכים המוחלטים מאותו סימן ואז מקבלים $|5m|$ כשסוכמים אותם, שהוא מספר שמתחלק ב-5 ומכיוון ש- $|m|$ במקרים הללו שונה מ-1 זה לא יכול להיות מספר ראשוני. כעת נותר לבדוק את 3 המקרים $m = \pm 1, 0$. כש- $m = 0$ מקבלים 6 שאינו ראשוני. כשמציבים $m = \pm 1$ מקבלים $7 = 1 + 1 + 2 + 3$ ולכן אלו שני הפתרונות היחידים. כשמציבים $n = m + 3 = 2, 4$ מקבלים ראשוני 7 וזה הראשוני היחיד מהצורה הזאת.

7. אם לגיא יש מספר אי-זוגי של חברים, סיימנו. אחרת, נסמן את מספר החברים של גיא ב- $2n$ ומספר הילדים שאינם חברים של גיא או גיא עצמו הוא $29 - 2n$ שזה מספר אי-זוגי של ילדים. כל אחד מהם חבר של בדיוק 5 ילדים מבין חבריו של גיא. נניח בשלילה כי לכל אחד מהם כמות זוגית של חברים. אז אם נשכח את גיא ואת החברים של גיא יישארו כמות אי-זוגית של ילדים ולכל אחד כמות אי-זוגית של חברים (מבין מי שנותרו). זה לא אפשרי מכיוון שחברות זה יחס הדדי ולכן סכום כמות החברים של כל ילד היא תמיד זוגית.

8. נניח שצובעים למעלה את הקוביה בצבע 1 (כל קוביה חוקית אפשר לדאוג שלמעלה היא צבועה ב-1). כעת יש 5 דרכים לצבוע את הלמטה. מ-4 הצבעים שנותרו אפשר לסדר בכל סדר שרוצים, אבל כל סידור כזה מתאים ל-4 סיבובים של הקוביה שמשאירים את 1 למעלה. לכן יש $4!/4$ סידורים של שאר הצבעים שיוצא 6. סך הכל יצא לנו 30 דרכים לצבוע את הקוביה.

9. מכונית 1 נסעה במהירות ממוצעת $\frac{50}{3} + \frac{2 \cdot 80}{3} = 70$ קמ"ש. מכונית 2 נסעה $\frac{4}{5}t_2$ במהירות 50. אזי מהירות הממוצעת של מכונית 2 היא $t_1 = \frac{4t_2}{5}$. אזי היא נסעה $\frac{9}{5}t_2$ זמן, t_2 ממנו במהירות 80 ו- $\frac{4}{5}t_2$ במהירות 50. אזי מהירות הממוצעת של מכונית 2 היא $\frac{4/5 \cdot t_2 \cdot 50 + t_2 \cdot 80}{9/5 \cdot t_2} = \frac{4 \cdot 50 + 5 \cdot 80}{9} = \frac{600}{9} = 66\frac{2}{3}$ וזה מספר קטן יותר. לכן המכונית הראשונה תגיע מהר יותר.

10. מה נתון בעצם? נסמן a, b, c קולות של אליה בתיה וגילה. אז

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1.46$$

ולכן

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+b} &\geq 0.46 \\ 1 + \frac{b}{a} &\leq \frac{100}{46} \\ 1000 &\leq \frac{54}{46}a \\ 851... &\leq a \end{aligned}$$