

מיון שלב ב' – הנבחרת הצעירה במתמטיקה ומדעים – תשע"ח

טיוטה עם פתרונות

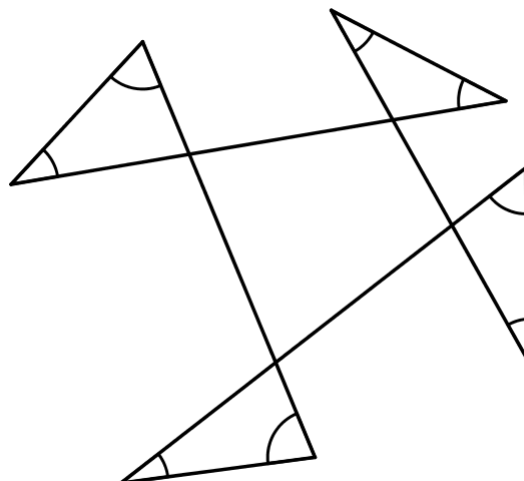
שאלות פתוחות

שאלה 1

נתונים שני מספרים x, y . ידוע כי אם מגדילים את x ב-1% ואת y ב-4% סכומם גדל ב-3%. נתון כי $x = 13$. **לכמה שווה y ?**

שאלה 2

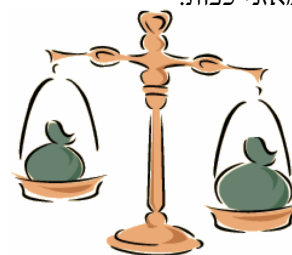
מצאו את סכום הזוויות המסומנות בציור. נמקו את תשובתכם.



שאלה 3

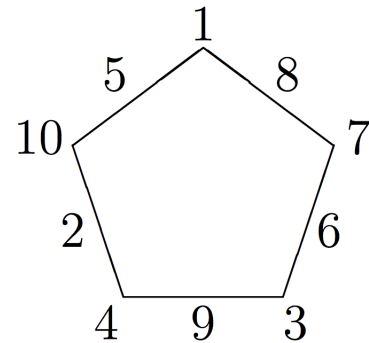
למוטי יש ארבעה מטבעות עתיקים של 1 ש"ח, 2 ש"ח, 3 ש"ח ו-5 ש"ח ששוקלים בהתאמה 1 גרם, 2 גרם, 3 גרם ו-5 גרם. לילה אחד גנב התגנב לביתו של מוטי והחליף את אחד ממטבעותיו העתיקים במטבע מזויף שנראה בדיוק כמו המטבע הקודם אך שוקל אחרת ממנו (לא ידוע אם שוקל יותר או פחות). מוטי מבין שאחד המטבעות שלו הוחלף ורוצה לגלות איזה מהם באמצעות שתי שקילות בלבד במאזני כפות, ובעזרת ארבעת המטבעות בלבד.

הוכיחו כי מוטי יכול לזהות מי המטבע המזויף באופן זה. תארו את סדר השקילות שהייתם מבצעים והסבירו כיצד תדעו לבסוף מי המטבע המזויף. מאזני כפות:



שאלה 4

על קדקדי וצלעות מחומש הניחו את המספרים מ-1 עד 10 כך שסכום המספרים בכל צלע קבוע. לדוגמא, במחומש הנתון הסכום על כל צלע יוצא 16



מה הסכום הקטן ביותר ומהו הסכום הגדול ביותר שיכול לצאת על ידי סידור כזה? הוכיחו את טענתכם.

שאלה 5

סכומם של שלושה מספרים שלמים חיוביים x, y, z הוא 695. מה כמות האפסים הגדולה ביותר שיכולה להופיע בסוף מכפלתם $x \cdot y \cdot z$? מצאו x, y, z שמכפלתם משיגה את כמות האפסים הזאת והוכיחו כי לא ניתן להשיג יותר.

שאלה 6

שי לקח גוש גבינה וחילק אותו לעשר חתיכות (לאו דווקא בגודל שווה), מתוכן הוא אכל את החתיכה הקטנה ביותר. אחר כך, הוא בחר אחת מ-9 החתיכות שנותרו וחילק אותה לשתי חתיכות (לאו דווקא בגודל שווה), ושוב מבין 10 החתיכות אכל את הקטנה ביותר. הוא ביצע את התהליך הזה פעם אחרונה – חילק חתיכה ואז מתוך ה-10 אכל את הקטנה ביותר. אם שי רצה לאכול כמה שיותר מתוך הגבינה, כמה הוא יכול לאכול אחרי שלוש הפעמים שביצע את התהליך? הוכיחו את טענתכם.

שאלות סגורות

שאלה 1

אם אתם קופצים ממקום גבוה לרצפה קשה, אתם עלולים להיפצע. לעומת זאת, אם תקפצו למזרון עבה ורך, לא תפצעו. מה גורם להבדל?

1. זווית הפגיעה ברצפה גורמת לפציעות.
2. המזרון מאריך את זמן ההאטה.
3. המזרון מאיט אותנו מהר יותר.
4. הרצפה מפעילה עלינו פחות כוח ולא מצליחה לעצור את הנפילה.

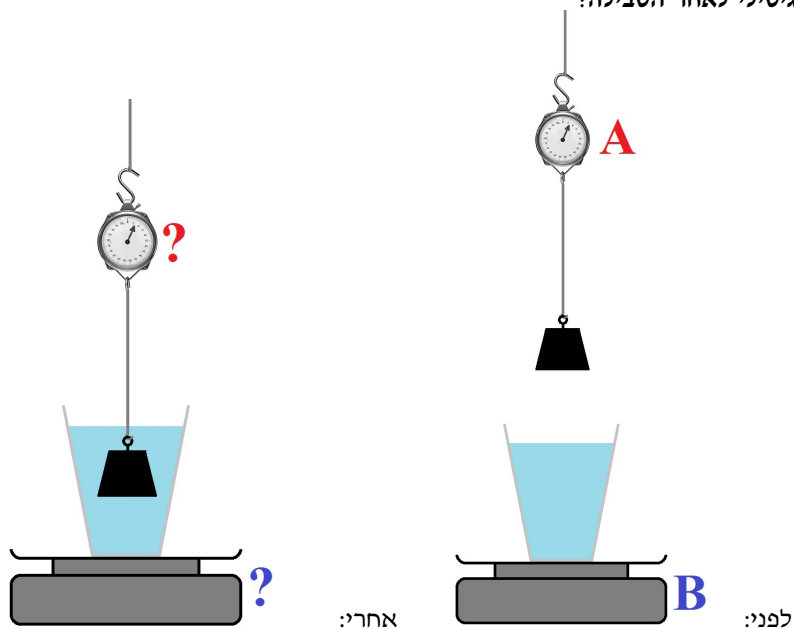
שאלה 2

אנחנו שומרים מזון במקרר כדי שהוא לא יתקלקל. מה גורם למזון להתקלקל פחות בקירור?

1. רוב החומרים מתכווצים בקור ודברים קטנים יותר מתקלקלים יותר לאט.
2. הקור גורם ללחות להתעבות על האוכל וטיפות המים הקטנות שומרות עליו.
3. כשקר, תהליכים כימיים נוטים לקרות לאט יותר.
4. הקור מחזק את מנגנוני ההגנה של המוצרים במקרר.

שאלה 3

משקולת תלויה על שעון קפיץ שמוודד את המשקל שלה ומסומן עליו המשקל A . כוס מים יושבת על משקל דיגיטלי שמוודד את משקלה ומסומן עליו המשקל B . מנמיכים את חוט המשקולת עד אשר היא טובלת בתוך המים. איך ישתנו הסימונים על השעון ועל המשקל הדיגיטלי לאחר הטבילה?



1. המשקל יראה מספר גדול יותר מ- B והשעון יראה משקל קטן יותר מ- A .
2. המשקל יראה מספר קטן יותר מ- B והשעון יראה משקל גדול יותר מ- A .
3. המשקל יראה מספר גדול יותר מ- B והשעון יראה משקל גדול יותר מ- A .
4. המשקל יראה מספר גדול קטן מ- B והשעון יראה משקל קטן יותר מ- A .

שאלה 4

אפרת וברכה משחקות משחק. מולן מונחות שתי ערימות של גפרורים. כל אחת בתורה מורידה כמות חיובית כלשהי של גפרורים מאחת הערימות בלבד לפי הכלל הבא: אם בערימה יש x גפרורים מותר להוציא ממנה כמות שמחלקת את x . לדוגמא אם בערימה יש 6 גפרורים מותר להוציא ממנה 1, 2, 3 או 6 גפרורים. לעומת זאת אם בערימה יש 13 גפרורים מותר להוציא ממנה 1 או 13. מנצחת זאת שאחרי תורה אין יותר מהלכים, קרי, זאת שלקחה את הגפרור האחרון. אפרת היא זו שמבצעת את המהלך הראשון. מי מהשתיים תנצח? הדבר תלוי במספר הגפרורים שנמצאים בכל ערימה בתחילת המשחק וברמת המשחק של אפרת וברכה. נניח שאפרת וברכה משחקות הכי טוב שאפשר. להלן ארבע אפשרויות למספר הגפרורים שנמצאים בכל ערימה בתחילת המשחק. באיזו מהאפשרויות תנצח ברכה?

1. 2, 3
2. 8, 6
3. 5, 7
4. 10, 7

פתרונות

שאלות פתוחות

פתרון 1

מהנתון אנו מקבלים את המשוואה הבאה

$$0.03(x + y) = 0.04y + 0.01x$$

נכפול ב-100 ונקבל כי

$$3x + 3y = 4y + x$$

$$2x = y$$

$$y = 2x = 2 \cdot 13 = 26 \text{ לכן}$$

פתרון 2

מסכום זוויות במשולש $= 180^\circ$ אנחנו יודעים לבטא את הזווית השלישית בכל משולש בציור באמצעות השתיים המסומנות. מזוויות קדקדיות שוות אנחנו מקבלים שסכום הזוויות במרובע באמצע הוא $180^\circ \times 4$ פחות סכום הזוויות המסומנות. אבל סכום זוויות במרובע הוא 360° . מעבירים אגפים ומקבלים כי סכום הזוויות המסומנות הוא 360° .

פתרון 3

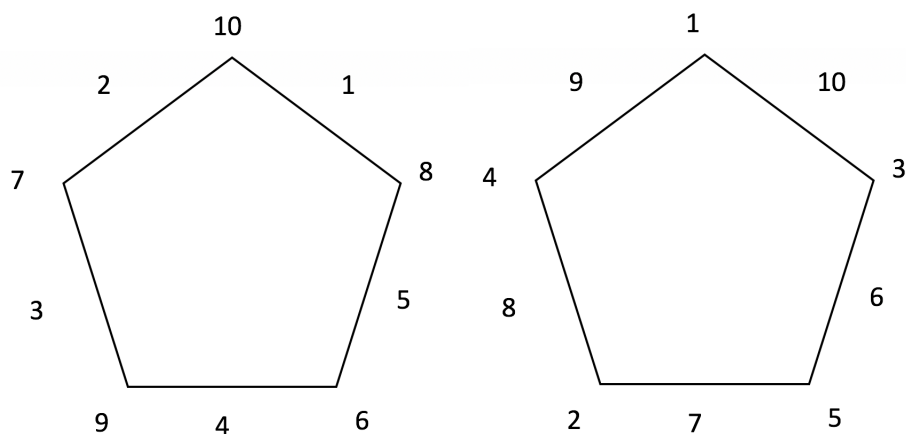
הסכום הגדול ביותר שיכול לצאת הוא 19 והקטן ביותר הוא 14. הנימוק לכך הוא שאם מספר מופיע על הקדקוד הוא נסכם פעמיים ואם הוא מופיע על הצלע הוא נסכם פעם אחת. לכן אם הסכום על כל צלע הוא $5e$ הוא שווה לפעמיים סכום הקדקדים ועוד סכום הצלעות. אזי אם נשים על הקדקדים את המספרים 1 – 5 נקבל ש-

$$5e = 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 70$$

ואז $e = 14$. לעומת זאת אם נשים על הקדקדים את 6 – 10 נקבל ש-

$$5e = 2(6 + 7 + 8 + 9 + 10) + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 95$$

ואז $e = 19$. אבל האם יש סידורים שבאמת משיגים זאת? כן, הנה דוגמה



פתרון 4

נשקול תחילה את המטבעות 2, 3 בצד אחד ו-5 בצד השני. אם המשקל זהה אז 1 הוא המזויף. אם המשקל לא מאוזן אז נשקול 1, 2 מול 3. אם מאוזן אז 5 הוא המזויף. אם לא מאוזן, אז אם במקרה הראשון $2 + 3$ היו כבדים מ-5, אז הצד הכבד יותר מבין $1 + 2$ או 3 הוא זה שמכיל את המזויף. אם $2 + 3$ קלים מ-5, אז הצד הקל מבין $1 + 2$ ו-3 מכיל את המזויף, כאשר 1 אינו המזויף כמובן.

פתרון 5

הממוצע החשבוני של x, y, z הוא $231\frac{2}{3}$ ולכן מכפלתם קטנה שווה ל-12433421.296, ובפרט לא יכולים להופיע יותר מ-7 אפסים בסוף המספר. נראה כי ניתן להשיג 7 אפסים:

$$\begin{aligned}x &= 250 \\y &= 125 \\z &= 320 \\xyz &= 10^7\end{aligned}$$

פתרון 6

הוא יכול לאכול רבע מהגוש המקורי. הוא יחלק את הגבינה ל-8 חתיכות בגודל $\frac{1}{12}$ ושתיים בגודל $\frac{1}{6}$. אחרי זה הוא יאכל כל פעם $\frac{1}{12}$ ויפצל את אחת ה- $\frac{1}{6}$ לשתי חתיכות שוות. סך הכול יאכל $\frac{1}{4} = \frac{1}{12} \cdot 3$. נוכיח כי זה אופטימלי: נסמן את החתיכות שאכל שי בתור p_1, p_2, p_3 לפי סדר האכילה שלהן. בסוף התהליך יש 9 חתיכות על השולחן. כול 9 החתיכות ששרדו גדולות שוות ל- p_3 . מבין 9 החתיכות, 7 לפחות היו על השולחן אחרי החיתוך השני ולכן גדולות שוות ל- p_2 . באופן דומה, 5 מתוך 9 החתיכות היו כבר על השולחן בחיתוך הראשון. אזי אם נסדר אותם בשורה $x_1, \dots, x_9$ מהקטן לגדול אנחנו יודעים כי

$$x_3 + x_6 + x_9 \geq x_2 + x_5 + x_8 \geq x_1 + x_4 + x_7 \geq p_1 + p_2 + p_3$$

$$\text{לכן סך הכל } p_1 + p_2 + p_3 \leq \frac{1}{4}.$$

שאלות סגורות

פתרון 1

.2

פתרון 2

.3

פתרון 3

.1

פתרון 4

.3