

הרצאות אופטיקה גאומטרית לקראת שלב ג'

הקדמה על אופטיקה גאומטרית

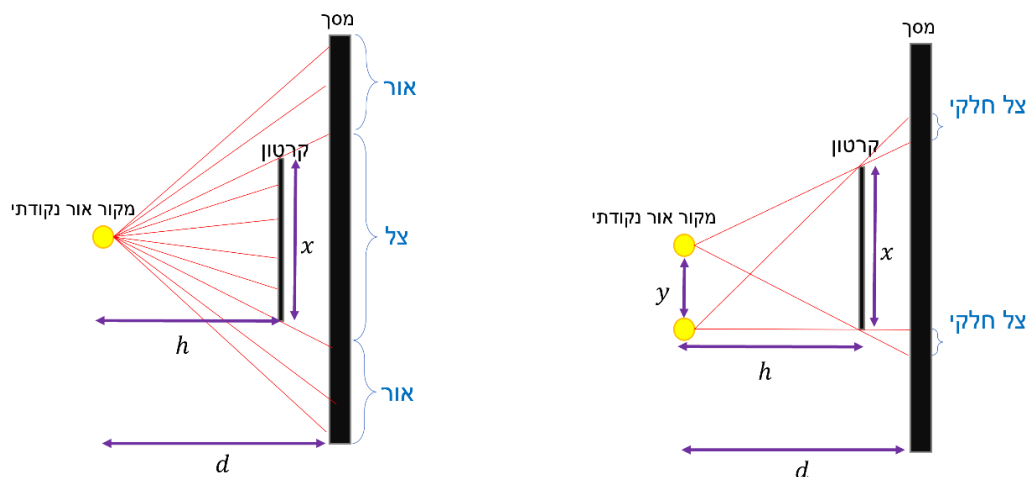
אופטיקה הוא תחום בפיזיקה שעוסק בחקר האור, מטרת האופטיקה היא לענות על שאלות כמו מה זה אור? איך אור מתקדם? ולעזור לבנות מכשירים ורכיבים שיעזרו לנו בחיי היום יום כמו משקפיים, זכוכית מגדלת, משקפות וכדומה. כיום, אנחנו יודעים שאור מורכב מגלים אלקטרומגנטיים שמתפשטים במרחב, אך בעבר לא הכירו את תחום האלקטרומגנטיות ופיתחו תורה שמתארת את התקדמות האור על ידי מספר עקרונות שהניחו את נכונותם וקיבלו התאמה לניסויים שנעשו, תורה זו נקראת האופטיקה הגאומטרית. עם התפתחות הפיזיקה והגילוי של גלים אלקטרומגנטיים, התברר שהאופטיקה גאומטרית היא קירוב שמתקבל מהתייחסות לאור כגלים אלקטרומגנטיים במקרה שבו אורך הגל שואף לאפס.

מקורות אור וקרני אור

אם ניקח מנורה ונשים בינה לבין מסך חתיכת קרטון, על המסך יהיה צל ורק ברגע שנזיז את הקרטון נקבל כתם אור על המסך, כלומר האור יתקדם ויתפשט אל עבר המסך בהכרח במהירות כלשהי. באופטיקה הגאומטרית מתארים את התפשטות האור על ידי קווים ישרים שנקראים קרני אור. קרני אור נוצרות ממקורות אור שונים כמו נר, מנורה, שמש וכדומה. אנחנו קוראים לנקודה במרחב שפולטת קרני אור מקור אור נקודתי, שימו לב שאם נסתכל על נר של שבת אבל ממרחק מאה מטר הוא יראה לנו כמו נקודה. מקור אור נקודתי פולט קרני אור באופן שווה לכל הכיוונים. מקור אור שאינו נקודתי כמו השמש לדוגמה, מתואר על ידי אינסוף מקורות נקודתיים שקרובים אחד לשני ונמצאים על שפת מקור האור, בדומה לכך שקו הוא אוסף של נקודות.

אור, צל וצל חלקי

בניסויים התגלה שאור נע בקווים ישרים ולכן ההנחה הראשונה שהגיוני לעשות היא "אור נע בקו ישר כל עוד הוא לא נתקע במשהו בדרך". מההנחה שאור נע בקווים ישרים, ניתן להשתמש בגאומטריה בשביל להבין איך מקורות אור עושים צל על דברים:

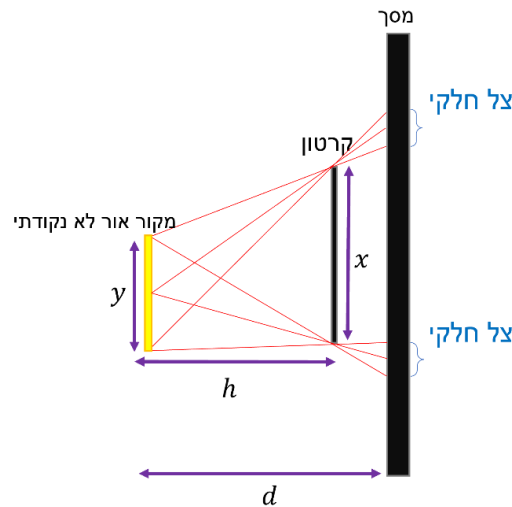


ממשפט תלס ניתן למצוא את גודל הצל המלא שמתקבל על המסך בתמונה בצד שמאל:

$$S = \frac{d}{h} x$$

במקרה שמוצג בצד ימין, ניתן לראות שנוצר צל חלקי מפני שיש נקודות שמגיעות אליהן קרני אור ממקור אחד בלבד, לכן עוצמת האור שם קטנה יותר ביחס לנקודות שמגיעות אליהם קרני אור משני המקורות. במקרה של

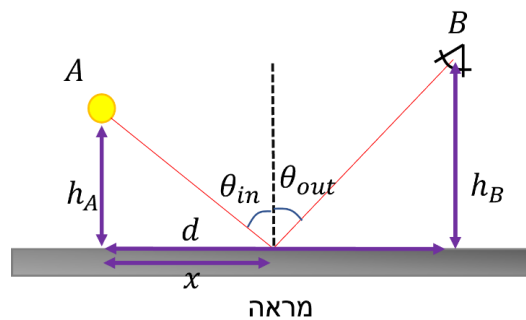
מקור אור לא נקודתי (לדוגמה מנורת פלורסנט) עוצמת האור באזור הצל החלקי תגדל ככל שנתרחק מהצל מלא.



בעזרת גאומטריה ניתן לקבל את אורך הצל מלא.

החזרת אור ממשטחים

הנחנו שאור נע בקווים ישרים, אבל למה דווקא קווים ישרים? מה קורה כשהאור לא יכול לנוע יותר בקו ישר? לדוגמה כאשר הוא נע ממשטח שמחזיר אותו כמו שלולית או חתיכת מתכת מבריקה. למשטח שקרני אור שפוגעות בו, חוזרות ממנו קוראים מראה, מראה שמחזירה את כל האור שפוגע בה נקראת מראה אידיאלית. אנחנו יודעים שהדרך הקצרה ביותר בין שתי נקודות היא קו ישר, אז אולי העקרון שצריך להנחות אותנו הוא שאור נע בדרך הקצרה ביותר בין שתי נקודות, ננסה להשתמש בעקרון זה בשביל לתאר התקדמות אור (בהמשך נדבר על עקרון פרמה). נסתכל על קרן אור שיוצאת ממקור אור נקודתי בנקודה A , ומוחזרת ממראה בנקודה B .



נדרוש שהמרחק הכולל שקרן האור עוברת יהיה מינימאלי בהתאם להנחה שלנו שקרני אור עוברות במסלול בעל הדרך הקצרה ביותר. אורך המסלול של הקרן יהיה תלוי בנקודות הפגיעה x , ממשפט פיתגורס:

$$D(x) = \sqrt{x^2 + h_A^2} + \sqrt{(d-x)^2 + h_B^2}$$

נרצה למצוא מינימום למרחק זה:

$$\frac{dD(x)}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_A^2}} - \frac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + h_B^2}} = 0$$

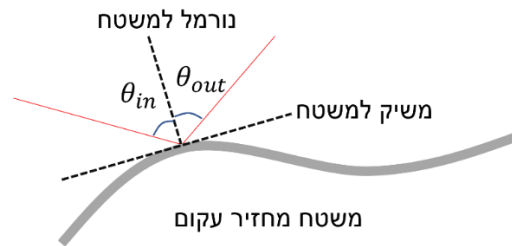
מטריגונומטריה:

$$\sin \theta_{in} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_A^2}}, \quad \sin \theta_{out} = \frac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + h_B^2}}$$

ולכן:

$$\theta_{in} = \theta_{out}$$

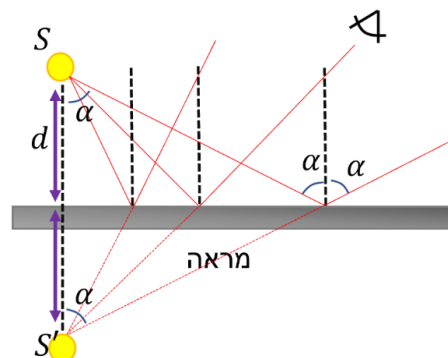
התוצאה הזו נקראת חוק ההחזרה והיא אומרת שזווית הפגיעה שווה לזווית הכניסה. מה קורה כאשר המראה שלנו היא לא משטח ישר?



במקרה כזה אם נסתכל קרוב מאוד למשטח הטיעון הקודם עדיין יהיה תקף מפני שהשטח יהיה בקירוב ישר. כלומר עדיין יתקיים חוק ההחזרה עבור כל נקודה בנפרד, כאשר הזוויות ימדדו בין קרן האור לבין הנורמל למשטח (נורמל הוא האנך למשיק).

דמויות

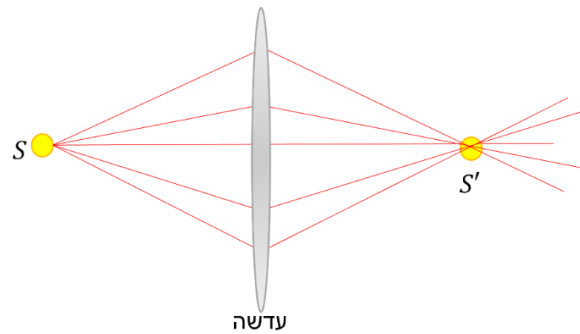
נסתכל על מקור אור נקודתי S שנמצא במרחק d ממראה. עין שמסתכלת על הקרניים שחזרו, רואה כאילו הן הגיעו מנקודה אחרת, מפני שהעין לא יכולה לדעת שהקרניים האלה נשברו. נמצא את הנקודה שזה נראה כאילו קרניים מגיעות ממנה, נקרא לה S' . ישנה קרן שזווית הפגיעה שלה היא אפס ולכן בהכרח S' חייבת להיות על הקו של קרן זו, כלומר על קו מאונך למשטח שעובר דרך הנקודה S .



בעזרת חוק ההחזרה וזוויות מתחלפות ניתן לראות שמתקבל משולש שווה שוקיים לכל קרן שיוצאת בזווית α . סך הכל הנקודה S' בדיוק סימטרית לנקודה S ומרחקה מהמראה d .

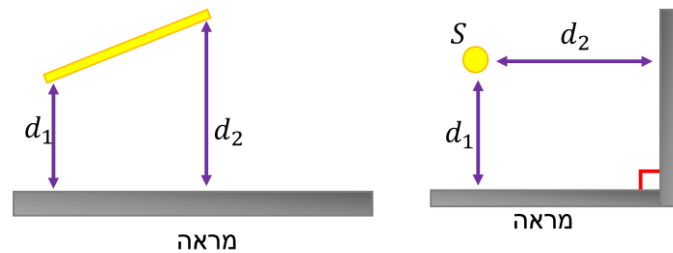
לנקודה שנראה שכל קרני האור יוצאות ממנה קוראים דמות, הנקודה S' נקראת דמות מדומה. דמות ממשית היא דמות שקרני האור שיצרו אותה באמת עברו דרכה, ודמות מדומה היא דמות שקרני האור שיצרו אותה לא באמת הגיעו מתוך הנקודה אלא פשוט נדמה שקרני האור עברו דרכה. הדמות שנוצרת מהמראה היא דמות מדומה ואילו דוגמה לדמות ממשית היא דמות שנוצרת ממוקד של קרני אור על ידי עדשה¹.

¹ עדשה היא רכיב אופטי שממקד קרני אור, נרחיב עליו בהמשך ההרצאה.



תרגילים

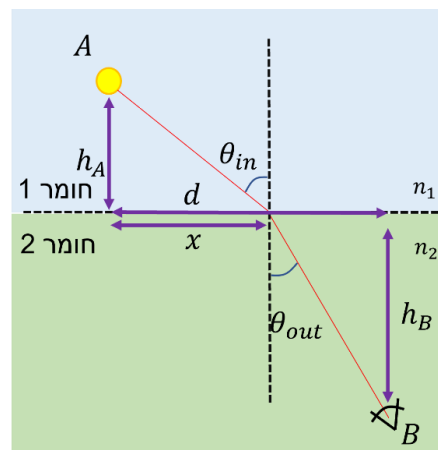
מצאו את מיקומי הדמויות של מקורות האור במקרים הבאים:



במקרה של מקור האור הלא נקודתי צריך לחלק אותו למקורות אור נקודתיים ולמצוא את הדמות של כל מקור אור בנפרד. במקרה שיש שתי מראות כל דמות שנוצרת מתנהגת כמו מקור אור נקודתי עבור כל שאר המראות פרט למראה שיצרה אותה אליה היא "שקופה".

חוק סנל ושבירה של אור

במהלך חקר האופטיקה אנשים צפו בתופעה של שבירה של אור, כאשר אור עובר בין שני חומרים קרן האור נשברת, בדומה לתופעה הידועה בה רואים קש שבור בתוך כוס מים. נשאלת השאלה מדוע כאשר עוברים בין שני חומרים שונים מסלול האור נשבר? נסתכל על קרן אור שעוברת בין שני חומרים ומגיעה מהנקודה A לנקודה B .



לפי ההנחה שלנו המסלול של קרן האור צריך להיות קו ישר, מפני שזו הדרך הכי קצרה בין שתי נקודות. אז כנראה ההנחה שלנו לא נכונה, אז מה העקרון שלפיו האור בוחר את המסלול שלו? למה עד עכשיו העקרון של דרך מינימאלית היה בסדר אבל ברגע שעברנו לדבר על חומרים שונים נתקלנו בבעיה? איזה הבדל שני חומרים שונים עושים מבחינת האור, האם לאור אכפת אם הוא מתקדם באוויר, בריק, או במים? התשובה היא שכן, הגיוני שבחומרים שונים מהירות האור תהיה שונה. (אינטואיטיבית בחומר צפוף, יותר קשה לאור להתקדם ולכן מהירותו איטית יותר).

עד כה דיברנו על חומר יחיד ולכן הזמן שלקח לאור במסלול מסוים היה פרופורציונלי למרחק שהאור עבר באותו מסלול, כלומר למעשה העקרון שהנחה אותנו היה שקול לכך שהאור נע במסלול שהזמן שלו מינימאלי, אולי עקרון זה יתן הסבר לתופעת שבירת האור?

בהתאם לאיור נכתוב את זמן התנועה של אור במסלול בין נקודה A לנקודה B כתלות בפרמטר x :

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + h_A^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + h_B^2}}{c_2}$$

כאשר c_1 היא מהירות האור בחומר 1 ו- c_2 היא מהירות האור בחומר 2. נגדיר את מקדם השבירה של חומר להיות היחס בין מהירות האור בריק למהירות האור בחומר $n_i = \frac{c}{c_i}$, שימו לב שמקדם שבירה תמיד גדול מ-1.

$$t(x) = \frac{1}{c} \left(n_1 \sqrt{x^2 + h_A^2} + n_2 \sqrt{(d-x)^2 + h_B^2} \right)$$

נמצא מתי זמן זה מינימאלי על ידי גזירה:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \left(n_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_A^2}} - n_2 \frac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + h_B^2}} \right)$$

ושוב בהתאם להגדרות הסינוסים נקבל את התוצאה שידועה בשם "חוק סנל":

$$n_1 \sin \theta_{in} = n_2 \sin \theta_{out}$$

תוצאה זו מתאימה לניסויים שעשו. כלומר העקרון שהנחה מצליח לתאר את כל תופעות אור שראינו עד כה!

עקרון פרמה

העקרון שהגענו עליו שאומר "אור נע במסלול שזמן המעבר דרכו הוא הקטן² ביותר" נקרא עקרון פרמה על שם המתמטיקאי פייר דה פרמה שחיי במאה ה-17. העקרון הזה הוא עקרון הבסיס של האופטיקה הגאומטרית ובעזרתו ניתן לגזור את כל חוקי האופטיקה הגאומטרית: אור נע בקווים ישרים, חוק השבירה וחוק סנל. הסיבה שעקרון זה נכון עמוקה מאוד וניתן להראות את נכונותו בעזרת עבודה בגלים אלקטרומגנטיים בגבול של אורך גל אפסי, נדבר על זה בהמשך האולימפיאדה אך לא כעת.

זווית קריטית

באופן כללי כאשר אור עובר בין חומרים חלק ממנו נשבר וחלק ממנו חוזר, הניתוח של מה העוצמה של האור שחזר ומה העוצמה של האור שנשבר הוא מורכב ודורש שימוש בגלים א"מ. ישנה תופעה שמתקבלת כאשר אור מנסה לעבור ממקדם שבירה גבוה למקדם שבירה נמוך, ישנה זווית כניסה שהחל ממנה כל האור חוזר ואין עוצמת אור שעוברת את הממשק בין התווכים. הזווית הזו נקראת זווית קריטית, והתופעה נקראת החזרה פנימית מלאה. ניתן לראות את התופעה מחוק סנל על ידי הדרישה שזווית היציאה של האור תשאף לתשעים מעלות. במקרה זה:

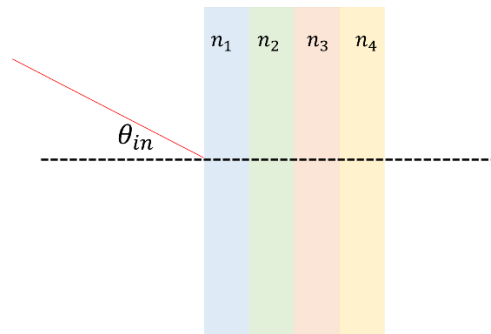
$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

ניתן לראות שקיימת זווית קריטית רק כאשר $n_2 < n_1$, כלומר עוברים ממקדם שבירה גבוה לנמוך.

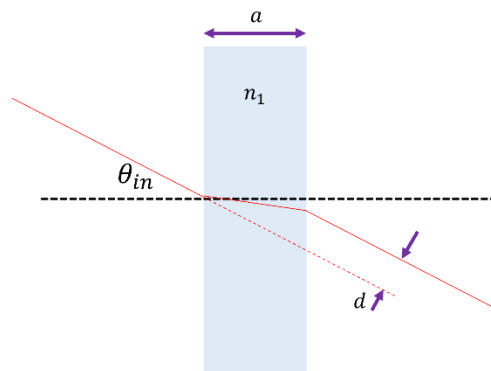
² למעשה עקרון פרמה דורש נקודה סטציונרית ולא דווקא מינימום.

תרגילים

בהינתן זווית הפגיעה מקדמי השבירה ושרקן האור יוצאת (אין מקרה של פגיעה מעבר לזווית קריטית), מה תהיה זווית היציאה של האור במקרה הבא?



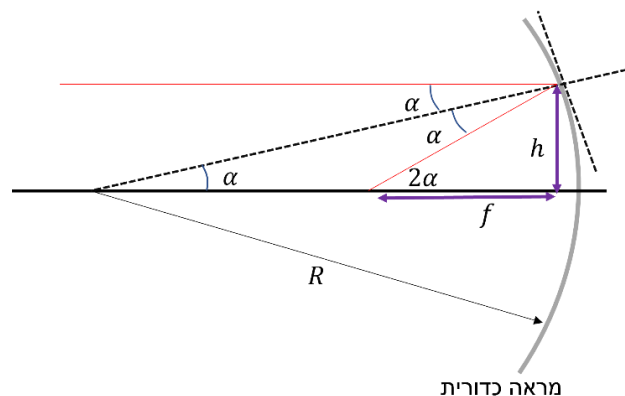
מצאו את מרחק ההסחה של קרן האור d במקרה הבא:



מיקוד אור

נניח שאני רוצה להשתמש באור של השמש כדי לחמם לי את המים שבדוד לאמבטיה, או שאני רוצה לקלוט את האור של כוכב רחוק מאוד, בשביל לעשות את זה אנחנו צריכים למקד קרני אור לנקודה קטנה יחסית. כבר ראינו ששימוש במראה ישרה פשוט יחזיר את קרני האור, ואם נסתכל על אור שבא מרחוק מאוד אז קרני האור יהיו מקבילות ולכן המראה תחזיר קרניים מקבילות.

ננסה להשתמש במראה עקומה בשביל למקד את האור. איזה צורה יכולה לעבוד? אולי כדור? נסכל על מראה שהיא חלק מכדור ענק ברדיוס R ונראה מה יקרה לקרני אור מקבילות (שהגיעו ממקור אור רחוק מאוד). הציר האופטי מוגדר להיות ציר הסימטריה של הבעיה.



במידה ונניח שקוטר המראה קטן מאוד ביחס לרדיוס עקמומיות שלה, כלומר לכל אור שפוגעת במראה $h \ll R$, נוכל להשתמש בקירוב זוויות קטנות לפיו $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ עבור $\theta \ll 1$ (ברדיאנים!). בעזרת קירוב זה:

$$\sin \alpha \approx \alpha = \frac{h}{R}$$

מצד שני:

$$\tan 2\alpha \approx 2\alpha = \frac{h}{f}$$

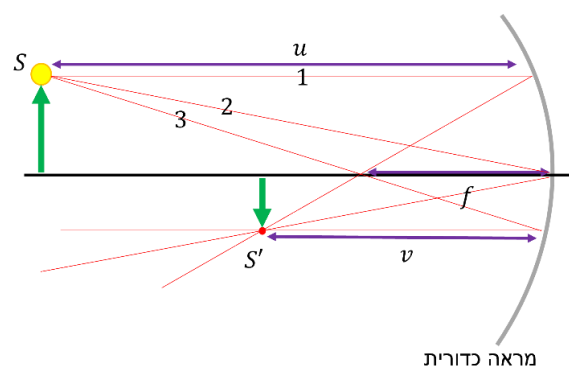
כלומר כל קרן אור ללא תלות בנקודת הפגיעה (תחת ההנחה ש- $h \ll R$) תגיעה לאותה נקודה על הציר האופטי שמרחקה מהמראה הוא:

$$f = \frac{R}{2}$$

שימו לב שלא נקבל מיקוד מושלם של קרני האור לנקודה אחת מפני שהשתמשנו בקירובים. אבל מסתבר שישנה צורה שכן תוכל למקדם לנו את קרני האור במדויק. באופן מפתיע הצורה היא פרבולה! נסו להראות שפרבולה שמשוואתה היא $y = \frac{x^2}{2p}$ תמקד קרני אור שמגיעות מרחוק לנקודה $(\frac{p}{2}, 0)$. הנקודה אליה קרני אור שמקבילות לציר האופטי מתמקדות בעקבות רכיב אופטי (מראה/עדשה) נקראת מוקד. מרחק הנקודה מהרכיב האופטי נקרא מרחק המוקד.

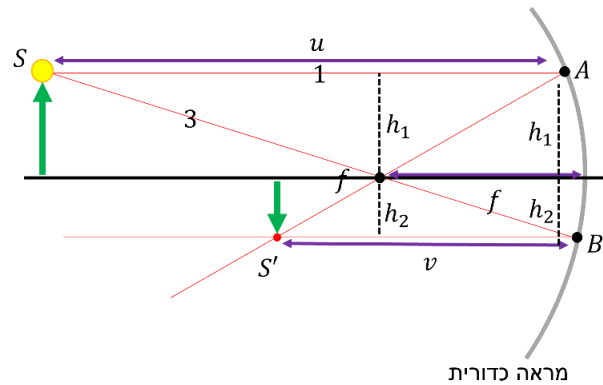
כאשר מתעסקים במיקוד של קרני אור נהוג להניח שהרכיבים (המראות והעדשות) בעלי עקמומיות מאוד נמוכה ולכן ניתן להניח שהזוויות של קרני האור ביחס לציר האופטי הן זוויות קטנות. במקרה שלא ניתן לניתן להניח הנחה זו, יהיה מצוין במפורש בשאלה.

מה קורה לקרני אור לא מקבילות? מה יקרה אם ניקח מקור נקודתי במרחק u מהמראה הכדורית שלנו? נשים לב שקרן אור שמקבילה לציר האופטי תגיע למוקד (קרן מספר 1) קרן אור שעוברת ישר דרך המוקד תחזור מקבילה בגלל עקרון הפיכות האור בזמן³ (קרן 3) וקרן שתפגע בציר האופטי תחזור כאילו היא פגעה במראה מישורית מפני שהמשיק פשוט מאונך לציר האופטי (קרן 2)



ניתן לראות שקרני האור יתמקדו בנקודה S' נקודה ולכן תיווצר שם דמות, לצופה שמסתכל על המראה יהיה נדמה שיש מקור אור נקודתי בנקודה S' . נרצה למצוא את מיקום הדמות v . נסתכל על שתי הקרניים 1 ו-3:

³ עקרון הפיכות האור בזמן אומר שבהינתן מסלול של קרן אור לא ניתן לדעת את כיוון התקדמות של הקרן, כלומר ניתן להפוך את הזמן ולקבל שהקרן נעה בכיוון ההפוך.



מדמיון משולשים/תלס:

$$\frac{h_1}{f} = \frac{h_1 + h_2}{v}, \quad \frac{h_2}{f} = \frac{h_1 + h_2}{u}$$

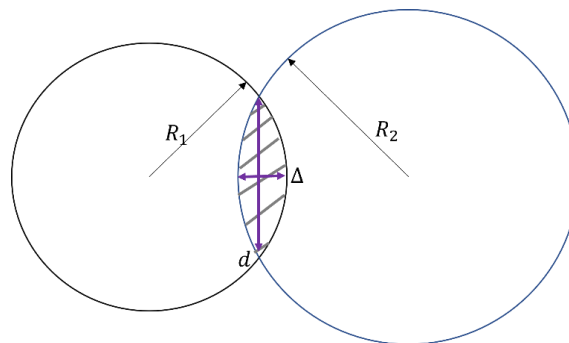
על ידי חיבור המשוואות:

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}}$$

התוצאה הזו נקראת נוסחת גאוס למיקום דמות. עבור $u = \infty$ נקבל שהדמות נמצאת במוקד $v = f$ בדיוק תוצאה שקיבלנו בפיתוח הקודם. שימו לב שההנחות של הפיתוח הן שהרכיב דק ולכן התייחסנו לנקודה A להיות בקירוב מעל הנקודה B, ויכולת המיקוד של הרכיב לקרניים מקבילות, כל רכיב שיקיים שתי תכונות אלה יקיים את הנוסחה. כמו כן נעזרנו בעקרון הפיכות הזמן שחל על קרני אור.

עדשה

בדומה למיקוד של קרני אור על ידי מראה כדורית עקומה ניתן להשתמש בחומר בעל מקדם שבירה n שמורכב משני שפות בעלות רדיוסי עקמומיות R_1 ו- R_2 כדי ליצור עדשה שתמקד אור. עדשה נראת כחיתוך של שני כדורים:

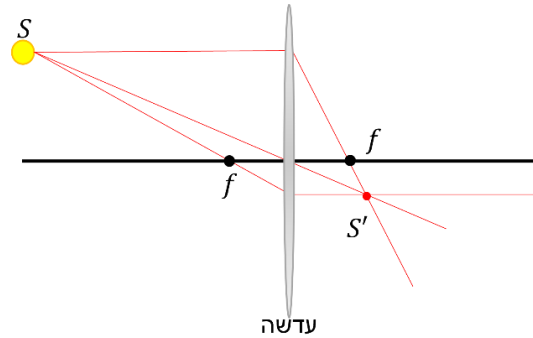


לרוב נדבר על עדשה דקה, שעובי העדשה (מסומן בשרטוט ב- Δ) הוא קטן מאוד. קוטר העדשה מסומן בשרטוט ב- d . בדומה למראה כדורית, גם עדשה תמקד קרני אור מקבילות ולכן מפני שהיא דקה היא תקיים את נוסחת גאוס ותיצור דמויות. הנוסחה למרחק המוקד של עדשה כדורית דקה נקראת נוסחת לוטשי העדשות ולפיה:

$$\boxed{\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

שימו לב שמרחק המוקד של העדשה זהה לשני הכיוונים! ניתן לראות זאת מכך שהנוסחה סימטרית ולא משנה הסדר של R_1 ו- R_2 . נדגים כיצד עדשה מייצרת דמות, בדומה לדרך שעשינו עבור מראה כדורית. נסתכל על

מקור נקודתי במרחק u מהעדשה מעל הציר האופטי, נעביר קרן אחת מקביל לציר האופטי ולכן היא תעבור לאחר מכן דרך המוקד, קרן שנייה תעבור דרך מרכז העדשה ומפני שהעדשה דקה היא כמעט לא תשפיע על הקרן (ההסחה של הקרן תהיה קטנה בדומה לתרגיל למציאת הסחה בחלק של חוק סנל). הקרן שלישית תעבור דרך המוקד ובעקבות העדשה תתקדם במקביל לציר האופטי. התהליך הזה זהה לתהליך יצירת הדמות שראינו עבור מראה כדורית.



אחרי שסיימנו את ההרצאה נוכל להשתמש בידע שרכשנו על אופטיקה גאומטרית ולהשתמש במראות עדשות וחומרים שונים בשביל לתכנן כלים שיעזרו לנו ביום יום! דוד שמש, פנסיים, משקפיים, מיקרוסקופים, טלסקופים ועוד המון!

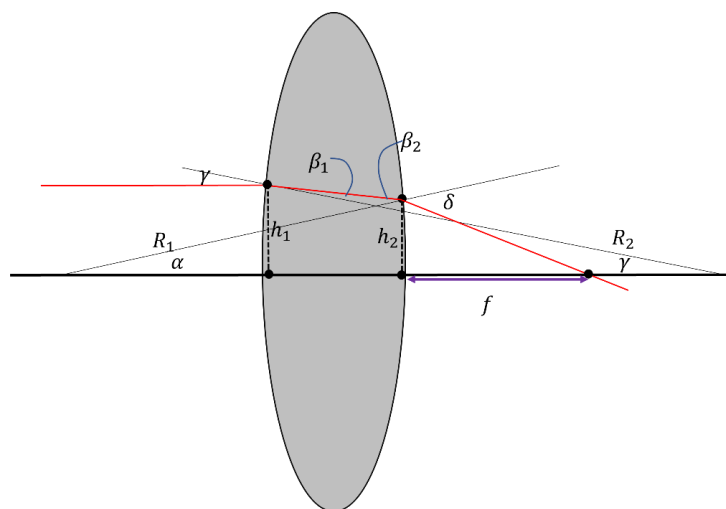
תרגילים

אלומת קרני אור מקבילה מלייזר פוגעות בכדור מוצק שקוף בעל מקדם שבירה n , אם נוצרת דמות נקודתית בקצה הנגדי של הכדור, מהו מקדם השבירה של הכדור?

כאשר מרחק המוקד של עדשה שלילי אומרים שהעדשה מפזרת קרני אור ולא ממקדת אותם. הסבירו כיצד עדשה יכולה לפזר קרני אור וציירו דוגמה לעדשה מפזרת. מצאו את מיקום הדמות של מקור נקודתי במרחק $u = 3|f|$ מהעדשה ושרטטו את הקרניים שיוצרות אותה, האם הדמות ממשית או מדומה? האם נוסחת גאוס עדיין תקפה?

נספח - הוכחה לנוסחת לוטשי העדשות

נסתכל על קרן מקבילה לציר האופטי שפוגעת בעדשה



בעקבות קירוב שהעדשה דקה והזוויות קטנות קרן האור לא מתקדמת כמעט בתוך העדשה ולכן $h_1 \approx h_2$. מגאומטריה:

$$\alpha + \gamma = \beta_1 + \beta_2$$

מטריגונומטריה בקירוב זוויות קטנות:

$$\alpha = \frac{h_2}{R_1}, \quad \gamma = \frac{h_1}{R_2} \approx \frac{h_2}{R}$$

$$\delta - \alpha = \frac{h_2}{f}$$

מחוק סנל:

$$\gamma = n\beta_1, \quad n\beta_2 = \delta$$

הצבת הזוויות במשוואה הראשונה:

$$\alpha + \gamma = \frac{\gamma}{n} + \frac{\delta}{n}$$

נציב את הקשרים בין הזוויות לאורכים:

$$\frac{h_2}{R_1} + \frac{h_2}{R} = \frac{1}{n} \frac{h_2}{R} + \frac{1}{n} \left(\frac{h_2}{f} + \frac{h_2}{R_1} \right)$$

h_2 יצטמצם ונקבל את נוסחת לוטשי העדשות:

$$\boxed{\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$