

הרצאות מכניקה לקראת שלב ג'

מכניקה

המטרה הבסיסית של הפיזיקה היא בהינתן מצב המערכת בזמן מסוים, לדעת את מצב המערכת בכל זמן עתידי. כידוע מקינמטיקה (עליה לא נעבור בהרצאה זאת), אם אנחנו יודעים את המיקום של גוף, את המהירות שלו ואת התאוצה שלו, אז נוכל למצוא את מיקום הגוף בכל זמן שנרצה. נשאר להבין איך אנחנו יכולים למצוא את התוצאות של גופים במערכת ואת המהירות שלהם.

שלושת חוקי התנועה של ניוטון

חוקי התנועה של ניוטון פרסומו בספרו "העקרונות המתמטיים של פילוסופיית הטבע" משנת 1687. לחוקים הללו אין הוכחה ואנחנו מתייחסים אליהם כנכונים מכיוון שהם נשארו עקביים עם כל הניסויים שנעשו לאורך השנים. בעזרת חוקי ניוטון הוסברו ותוארו תופעות טבע רבות, הבנה עמוקה שלהם אפשרה לאנושות להתקדם באופן חסר תקדים ב-350 השנים האחרונות. עכשיו תורנו להבין אותם לעומק.

כיום אנחנו יודעים שחוקי התנועה של ניוטון הם קירוב למציאות נכון עבור מהירויות נמוכות. בפיתוח תורת היחסות הפרטית, איינשטיין הסביר כיצד יש להתייחס למערכות בכל מהירות. כמובן שחוקי ניוטון הם קירוב מעולה במהירויות שאנחנו רגילים אליהם.

החוק הראשון של ניוטון

הניסוח המקורי: "כל גוף ממשיך במצב מנוחתו או בתנועה קצובה בקו ישר, אלא אם כן יאלץ לשנות מצב זה על ידי כוחות הכפויים עליו".

מבית הספר אתם מכירים את המשפט "אם גוף מתמיד בתנועתו שקול הכוחות עליו מתאפס", אבל האם זה משפט נכון? נניח שאני מסתכל דרך החלון של רכבת מאיצה על תפוח שתלוי על עץ. שקול הכוחות על התפוח מתאפס, האם אני אראה שהתפוח מתמיד בתנועתו? לא! אני אראה את התפוח מאיץ בכיוון ההפוך. אז מה הבעיה?

צריך לשים לב שהמשפט שאנחנו מכירים מבית הספר תקף במערכת יחוס אינרציאלית (אינרציה = התמדה, כלומר מערכת יחוס שמתמידה בתנועתה), אבל מה זה מערכת אינרציאלית? למעשה החוק מגדיר מערכת אינרציאלית, מערכת יחוס אינרציאלית היא מערכת שבה אם שקול הכוחות על גוף מתאפס אז הוא יתמיד בתנועתו (לא יאיץ), שימו לב שמערכת יחוס שנעה במהירות קבועה ביחס למערכת אינרציאלית היא גם מערכת אינרציאלית. אם כך החלק הזה הוא הגדרה אבל איפה החוק?

החוק הראשון של ניוטון הוא: שבכל מערכת פיזיקאלית תמיד ניתן להגדיר מערכת יחוס אינרציאלית.

החוק השני של ניוטון

הניסוח המקורי: "השינוי בתנועה הוא תמיד פרופורציונלי לכוח המופעל, ובכיוון הקו הישר שממנו הכוח הופעל".

מבית הספר אתם מכירים את החוק בתור " $\vec{F} = m\vec{a}$ " כאשר $\vec{F}$ הוא וקטור שמתאר את הכוח, $\vec{a}$ זו התאוצה ו- m היא המסה. את המונח תאוצה אנחנו מכירים, זו הנגזרת השנייה של המיקום לפי הזמן. אבל נשאלות השאלות, מה זה כוח? מה זה מסה?

התשובה הטובה ביותר היא שמסה היא ההתנגדות של גוף לתאוצה, מדד לכמה הגוף מתמיד בתנועתו (ולכן מסה זו נקראת גם מסת התמד או מסת אינרציה) וכוח מוגדר לפי $\vec{F} = m\vec{a}$. כוח נמדד בניוטון $1[N]$ $1[kg] \cdot 1 \frac{[m]}{[s^2]}$. ואנחנו חוזרים לאותה בעיה, אם זו הגדרה אז איפה החוק?

החוק הראשון של ניוטון הוא: במערכת יחוס אינרציאלית, סכום הכוחות הוקטורי שפועלים על גוף שווה למכפלת המסה בתאוצה.

החלק המשמעותי הוא שניתן לחבר כוחות באופן וקטורי בשביל לתא את תאוצת הגוף.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

שימו לב שהחוק מתייחס לגוף יחיד בעל מסה נתונה.

החוק השלישי של ניוטון

החוק השלישי נקרא גם חוק הפעולה והתגובה, הוא אומר שכשגוף אחד מפעיל כוח על גוף שני הגוף השני יפעיל כוח על הגוף הראשון שווה בגודלו והפוך בכיוונו, $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$.

ישנם מקרים מיוחדים שבהם החוק השלישי של ניוטון לא מתאר את המערכת נכון, לא נתעסק במערכות כאלו כרגע.

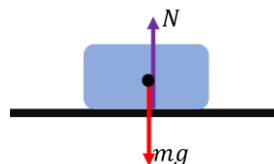
מספר כוחות בסיסיים שכדאי להכיר

כוח הכבידה על פני כדור הארץ

לפי גלילאו, גוף הנמצא על כדור הארץ נמשך אליו בתאוצה קבועה $\vec{g}$ ללא תלות במסה של הגוף, g נקראת תאוצת הכובד. לפי הגדרת הכוח כוח הכבידה שפועל על גוף הוא $\vec{F} = m\vec{g}$. הכוח מכוון למרכז כדור הארץ. בכל גוף שמימי יש תאוצת כובד אחרת, על כדור הארץ $g \approx 9.8 \left[\frac{m}{s^2} \right]$.

כוחות אילוץ

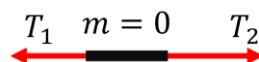
במערכות פיזיקאליות ישנם אילוצים גאומטריים, לדוגמה כאשר גוף נמצא על הרצפה הוא לא יכול לעבור דרך הרצפה. על מנת לקיים את האילוצים הגאומטריים פועלים כוחות אילוץ. לדוגמה, כאשר גוף נמצא על משטח והוא לא יכול לעבור דרך המשטח, אז יפעל עליו כוח נורמלי שיהיה מאונך למשטח, המשטח מאלץ רק תנועה רק במישור האנכי ולכן הכוח הנורמלי יהיה רק בכיוון האנכי. כיום אנחנו יודעים שכוחות אלו אילוץ אלו נובעים מכוחות חשמליים, אך לא נתעמק בזה כרגע.



דוגמה נוספת היא גוף שתלוי על ציר, הציר מאלץ את הנקודה שבה הגוף מחובר, להישאר במקום ולא לזוז במרחב. הציר מפעיל כוח בעוצמה הדרושה ובכיוון הדרוש כך שהנקודה בה הגוף מחובר לא תזוז.

מתיחות

חבל מתוח מפעיל כוח מתיחות על מי שמושך אותו, כוח המתיחות פועל בכל נקודה בחבל. לרוב מסת החבל מאוד קטנה ומתייחסים אליו כאל חסר מסה. אם נסתכל על חלק קטן מתוך החבל (הקו השחור) יפעלו עליו כוחות מתיחות משני הצדדים:



מפני שהחבל חסר מסה אז לפי החוק השני של ניוטון סכום הכוחות עליו הוא אפס ולכן $T_1 = T_2$, התוצאה הזו כוונה בכל נקודה בחבל, לכן כוח המתיחות קבוע בכל נקודה בחבל בעל אורך קבוע ומסה אפס.

קפיץ

בהינתן קפיץ באורך רפוי l כאשר נמתח את הקפיץ הוא יפעיל עלינו כוח וינסה לחזור לאורכו מקורי. לפי חוק הוק הכוח שקפיץ מפעיל הוא:

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{l}$$

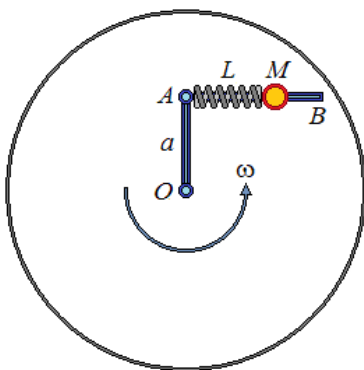
כאשר $\Delta\vec{l}$ הוא השינוי באורך הקפיץ, המינוס מתאר שכיוון הכוח הפוך לכיוון המתחה.

חיכוך בין משטחים

כאשר שני גופים נעים אחד ביחס לשני ונוגעים זה בזה, יפעל כוח חיכוך בניהם בעקבות החספוס בין המשטחים, כוח החיכוך יתנגד לתנועה יחסית בין הגופים. כאשר אין תנועה יחסית בין הגופים החיכוך נקרא חיכוך סטטי. החיכוך הסטטי הוא כוח מסתגל עד סף מסוים, כלומר אם נניח קופסה על הרצפה ונדחוף אותה בכוח F במקביל לרצפה, כוח החיכוך הסטטי יתאים את גודלו לכוח $f_s = F$ עד כוח חיכוך מקסימאלי כלשהו. כוח החיכוך המקסימאלי הוא $f_{s,max} = \mu_s N$ כאשר N הוא הכוח הנורמלי בין המשטחים ו- μ_s הוא מקדם החיכוך הסטטי בין המשטחים והוא פרמטר של החומרים שמשתנה בין כל שני חומרים. ברגע שתהיה תנועה יחסית בין המשטחים כוח החיכוך יהיה כוח חיכוך קינטי, כוח החיכוך הקינטי יהיה $f_k = \mu_k N$ כאשר μ_k נקרא מקדם חיכוך קינטי. באופן כללי מתקיים $\mu_k \leq \mu_s$, נסו לחשוב למה. לרוב מניחים $\mu_s = \mu_k$. שימו לב שחיכוך קינטי לא תלוי במהירות בין הגופים.

התוצאות האלו הן תוצאות ניסיוניות ומבחינתנו הם רק קרובים של המציאות, כפי שראיתם בהרצאות מתמטיקה ניתן לקרב פונקציה בעזרת פולינום, אז יכול להיות שהתלות של כוח החיכוך היא מסובכת יותר מליניארית, אבל זהו קירוב מאוד טוב שמחזיק בניסויים רבים.

תרגיל – קרוסלה



אל דיסק אופקי מחובר מוט אופקי חלק במקביל למישור הדיסק במרחק קטן ממנו. המוט מכופף בנקודה A בזווית ישרה. קצה אחד של המוט מחובר למרכז הדיסק O . המרחק $OA = a = 20\text{cm}$. על המוט מושחל קפיץ נטול מסה שאורכו במצב הרפוי הוא $L_0 = 9\text{cm}$ והקבוע שלו $k = 10 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. קצה אחד של הקפיץ מחובר למוט בנקודה A . לקצה השני של הקפיץ מחובר חרוז המושחל על המוט שלאורכו הוא מסוגל לנוע. מסת החרוז $m = 40\text{gr}$. מתחילים לסובב את הדיסק ממנוחה ומגדילים את המהירות הזוויתית שלו באיטיות. בציור מוצג מבט – על של המערכת.

א. פתחו ביטוי לאורך הקפיץ L כפונקציה של המהירות הזוויתית ω של הדיסק.

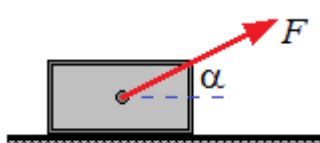
ב. מה יהיה אורך הקפיץ L_1 אם המהירות הזוויתית של הדיסק תגיע ל- $\omega_1 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$?

ג. באיזה כוח החרוז יפעל על המוט כשהמהירות הזוויתית של הדיסק תגיע ל- $\omega_1 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$?

ד. מה יהיה אורך הקפיץ L_2 אם המהירות הזוויתית של הדיסק תגדל עד $\omega_2 = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$?

תרגיל – גרירת ארגז

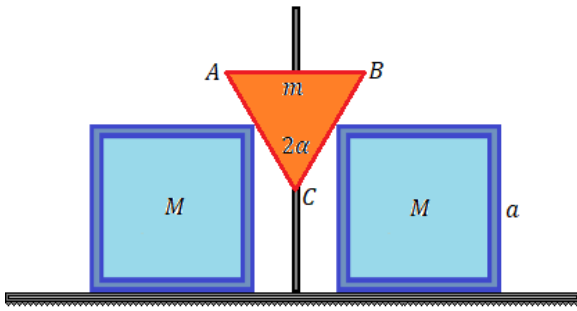
תיבה שמסתה היא $m = 800\text{gr}$ נמצאת על משטח אופקי. על התיבה פועל כוח $F_1 = 5\text{N}$. כאשר הכוח מכון בזווית $\alpha = 53^\circ$ לאופק התיבה נעה על פני המשטח במהירות קבועה.



- מה תהיה תאוצת התיבה אם הכוח יכוון בזווית $\beta = 45^\circ$ לאופק?
- כיצד יש לכוון את הכוח הפועל על התיבה כדי שתאוצת התיבה תהיה מרבית? מהו הערך המרבי של תאוצת התיבה?
- מהו הערך המינימלי של הכוח שיש להפעיל על התיבה כדי לגרור את התיבה במהירות קבועה?

תרגיל – ההולך לאטו יבוא בעתו

על משטח אופקי מונחות שתי תיבות זהות שצורתן קובייה בעלת מקצוע $a = 10\text{cm}$. מסת התיבה $M = 130\text{ gr}$, מקדם החיכוך בינה לבין המשטח הוא $\mu = 0.25$. התיבות צמודות זו לזו. מבניסים בין התיבות טריז סימטרי חלק שצורתו מנסרה עם משלוש שווה שוקיים בבסיסה. מסת הטריז $m = 120\text{ gr}$ וזווית הקודקוד שלו היא $2\alpha = 74^\circ$. הטריז מושחל על תורן אנכי דק וחלק ששומר על אופקיות פאת הטריז, שמיוצגת על ידי בסיס AB של המשולש, גם תוך כדי ירידת הטריז. משחררים את הטריז ממנוחה והוא יורד לאורך התורן.



- מהן התאוצות של הקוביות והטריז?
- כמה זמן תמשך תנועה של התיבות ואיזה דרך תעבור כל תיבה?
- מהו הערך המינימלי של m כדי שהקוביות יזוז ממקומן?
- מהו תחום הערכים של הזוויות בקודקוד הטריז, כך שהקוביות לא יוכלו לזוז בשום ערך של m ?

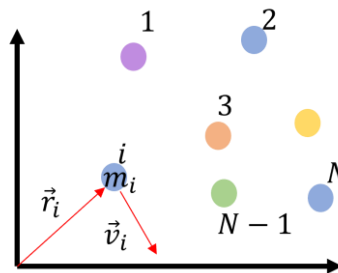
תנע

אם זבוב יעוף במהירות של שלושה מטרים לשנייה ויפגע בבן אדם לא יקרה לאדם כלום, לעומת זאת אם פיל ירוץ לבן אדם במהירות של שלושה מטרים לשנייה האדם יצטרך ללכת לבית חולים. במילים אחרות תנועה לא תלויה רק במהירות של גוף, היא תלויה גם במסה שלו. מגדירים את התנע של גוף בתור:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

התנע מתאר את מידת התנועה של הגוף. אפשר להבין שקיים קשר בין התנע לבין כוח שפועל על גוף, לדוגמה עבור חלקיק יחיד ברור שמתקיים $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ מכיוון שתאוצה היא הנגזרת של המהירות. ננסה להבין מה קורה במערכת של חלקיקים. הפיתוח הבא יהיה קצת אבסטרקטי, אך תנסו לעקוב.

נסתכל על מערכת של N חלקיקים, נסמן את המיקום של החלקיק ה- i ב- $\vec{r}_i$, את המסה שלו ב- m_i ואת הכוחות הפועלים עליו בתור $\vec{F}_i$.



נוכל לחלק את הכוח שפועל על כל חלקיק לכוחות פנימיים $\vec{F}_{i,int}$, כלומר כוחות שמופעלים על ידי חלקיקים אחרים במערכת, ולכוחות חיצוניים $\vec{F}_{i,ext}$, כוחות שפועלים על החלקיק מגורמים שאינם חלק מהמערכת. כפי שראינו עבור כל חלקיק:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,int} + \vec{F}_{i,ext} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

יש לנו N משוואות כאלה, נסכום את כל המשוואות:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{i,int} + \vec{F}_{i,ext} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

נשתמש בליניאריות הנגזרת (נגזרת של סכום היא סכום הנגזרות) ונוכל לכתוב:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{i,int} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{i,ext} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right)$$

התנע הכולל של המערכת הוא $\vec{p}_{tot} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$. מהחוק השלישי של ניוטון סכום הכוחות הפנימיים במערכת יתאפס, מפני שלכל כוח שחלקיק אחד מפעיל על אחר, קיים כוח נגדי שווה בגודלו והפוך בכיוונו ובסכום הם מבטלים אחד את השני. סך הכל קיבלנו את התוצאה:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt}$$

סכום הכוחות החיצוניים שפועלים על מערכת גופים שווה לקצב השינוי של התנע הכולל במערכת בזמן. התוצאה הזאת מזכירה את החוק השני של ניוטון אך היא כללית יותר, היא מאחדת בתוכה גם את החוק השני וגם את החוק השלישי של ניוטון. שימו לב שהשתמשנו בחוק השני של ניוטון שתקף רק במערכת יחוס אינרציאלית ולכן התוצאה הזו נכונה במערכות יחוס אינרציאליות.

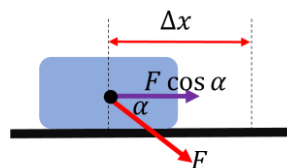
במקרה בו סכום הכוחות החיצוניים על המערכת מתאפס, נקבל שהנגזרת של התנע הכולל במערכת מתאפסת, כלומר התנע קבוע בזמן! זה בדיוק חוק שימור התנע.

חוק שימור התנע

כאשר סכום הכוחות החיצוניים על מערכת מתאפס, התנע הכולל במערכת נשאר קבוע. החוק הזה נכון באופן וקטורי, ולכן הוא נכון לכל ציר בנפרד. כלומר יכול להיות מקרה שיש שימור תנע בציר x אך לא יהיה שימור תנע בציר y .

עבודה ואנרגיה

ננסה להבין איך כוח נותן תנועה לגופים. נסתכל על תיבה שמונחת על משטח חלק, נדחוף את הקופסה בכוח $\vec{F}$ בזוויות שונות.



אם נדחוף במאונך למשטח לא ממש נשפיע על התיבה והיא תישאר במקום ולא תזוז, אם נדחוף במקביל למשטח אז נתחיל להאיץ אותה ובכך להגדיל את תנע שלה. משפט קצת מוזר אבל הגיוני הוא שככל שהתיבה קיבלה יותר תנועה כך הושקעה בתיבה יותר "עבודה", ננסה להבין את המושג הזה. ככל שנדחוף את התיבה למרחק גדול כך ניתן לה יותר תנועה וניתן לה יותר עבודה, כמו כן ניתן לראות שרק דחיפה שנעשתה לאורך מסלול התנועה תתרום לתנועה של התיבה. לכן נגדיר אלמנט עבודה ΔW שנעשה על ידי על ידי כוח $\vec{F}$ על גוף שזז במרחק קטן $\Delta \vec{x}$ בתור:

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} = F \cdot \Delta x \cos \alpha$$

המסלול של התנועה לא חייב להיות ישר, ובכל נקודה על המסלול הכוח יכול להיות שונה. העבודה הכוללת שנעשתה לאורך מסלול תתקבל בעזרת סכימה על כל אלמנטי העבודה הקטנים:

$$W = \int_{\vec{x}_a}^{\vec{x}_b} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

שימו לב שעובר כוח קבוע העבודה תהיה מכפלה סקלרית של הכוח בהעתק $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x}$.

$$[J] = [N \cdot m] = \left[\frac{kg \cdot m^2}{s^2} \right] \text{ הן ג'אול}$$

תרגילים על עבודה

1. נסתכל על גוף בעל מסה m שנופל נפילה חופשית מגובה h . חשבו את העבודה שבכוח הכבידה עושה. תשובה: $W = mgh$.
2. נתון קפיץ רפוי בעל קבוע קפיץ k . מותחים את הקפיץ כך שההתארכות היא x (האורך ביחס לאורך הרפוי). מהי העבודה שהקפיץ עשה על מי שמתח את הקפיץ? תשובה: $W = -\frac{1}{2}kx^2$.
3. נתונה תיבה בעלת מסה m שמונחת על משטח, מקדם החיכוך בין המסה לבין המשטח הוא μ , דוחפים את התיבה לאורך מרחק אופקי x בכוח F שמכוון בזווית α מתחת לאופק. מהו התנאי על F כך שהמסה באמת תזוז? מהי העבודה שמבצע כוח החיכוך? מהי העבודה הכוללת שנעשתה על הגוף? תשובה: $W_{tot} = (F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - \mu mg)x$.
4. האם חיכוך סטטי יכול לבצע עבודה? אם כן, הסבירו כיצד. אם לא, נמקו.

משפט עבודה אנרגיה ושימור אנרגיה

נסתכל על גוף שנע לאורך מסלול נתון מנקודה $\vec{a}$ לנקודה $\vec{b}$. נחשב את העבודה שנעשתה עליו:

$$W = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{x}$$

נוכל לכתוב $d\vec{x} = \vec{v}dt$ ולכן:

$$W = \int_{t_a}^{t_b} m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \vec{v}(t) dt$$

נשים לב ש- $\frac{d(f(x)^2)}{dx} = 2f(x) \cdot f'(x)$ נשתמש בתוצאה זו עם המשתנה t והפונקציה $v(t)$:

$$W = \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} m \frac{d(v^2)}{dt} dt = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2$$

נגדיר את האנרגיה הקינטית של גוף בעל מסה m שנע במהירות $\vec{v}$:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

בדומה לתנע הגודל הזה גם נותן מדד לכמה תנועתיות יש לגוף אבל הוא שונה מתנע. לעומת התנע, האנרגיה הקינטית היא סקלר שהוא תמיד חיובי, הוא נותן מדד לתנועה הכוללת של הגוף ולא לכמות התנועה בכל ציר. בדומה לעבודה, היחידות של אנרגיה הן ג'אול.

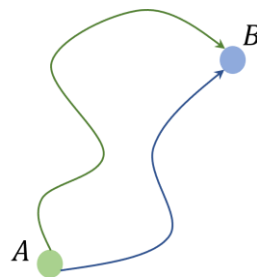
קיבלנו שהעבודה הכולל שנעשתה על גוף שווה לשינוי באנרגיה הקינטית שלו. באופן כללי העבודה הכוללת שנעשתה על מערכת שווה לשינוי באנרגיה הקינטית של המערכת:

$$W_{tot} = \Delta E_{k,tot}$$

התוצאה הזו מכונה משפט עבודה אנרגיה או משפט קוריוליס.

נסתכל על כוח שפועל על גוף לאורך מסלול סגור, כלומר מסלול שמתחיל ומסתיים באותה נקודה. אם כשהגוף הגיע לנקודת ההתחלה שלו בוצעה עליו עבודה שאינה אפס אז הוא יהיה איטי יותר או מהיר יותר, לכן האנרגיה של הגוף השתנתה. לכוח כזה אנחנו קוראים כוח לא משמר מפני שהוא לא שומר על האנרגיה, כוח שעבור כל מסלול סגור העבודה שלו היא אפס נקרא כוח משמר. דוגמאות לכוחות משמרים: כבידה, כוח קפיץ. דוגמאות לכוחות לא משמרים: חיכוך.

ניתן להראות שאם כוח משמר אז העבודה שהוא מבצע לאורך מסלול בין שתי נקודות לא תלויה בצורת המסלול אלא רק בנקודות ההתחלה והסוף, נסו להראות זאת בעצמכם, הוכחה מצורפת בנספח. עבור כוח משמר העבודה לאורך המסלול הירוק ולאורך המסלול הכחול תהיה זהה.



מכיוון שהעבודה של כוח משמר תלויה רק בקצוות המסלול ולא במסלול עצמו אז ניתן לכתוב את העבודה שהוא מבצע כהפרש של פונקציה של המיקום ההתחלתי והסופי. עבור כוח משמר מגדירים את השינוי באנרגיה הפוטנציאלית ΔU להיות מינוס העבודה שנעשתה לאורך מסלול:

$$W = -\Delta U = U_i - U_f$$

מכאן בעזרת משפט עבודה אנרגיה נקבל $U_i - U_f = \Delta E_{k,tot} = E_{k,f} - E_{k,i}$ או באופן אחר:

$$E = E_{k,i} + U_i = E_{k,f} + U_f$$

הגודל E נקרא האנרגיה המכנית, התוצאה הזו ידוע כחוק שימור האנרגיה המכנית, כאשר פועלים רק כוחות משמרים אז האנרגיה המכנית של המערכת נשמרת. כאשר האנרגיה של המערכת לא נשמרת חלקה מומר לצורות אחרות של אנרגיות כמו חום. במידה ופועלים גם כוחות לא משמרים אז צריך להוסיף את העבודה של הכוחות הלא משמרים W_{non} לעבודה הכוללת $W_{tot} = W_{non} - \Delta U$ ואז לפי משפט עבודה אנרגיה:

$$E_{k,i} + U_i + W_{non} = E_{k,f} + U_f$$

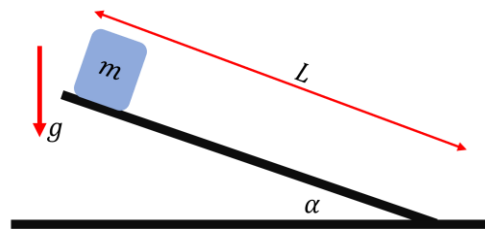
שימו לב שאנרגיה פוטנציאלית מוגדרת רק בתור הפרש, כלומר כדי לחשב אנרגיה פוטנציאלית צריך להגדיר נקודת יחוס במרחב שבה האנרגיה הפוטנציאלית תהיה אפס ולחשב את שאר האנרגיות ביחס אליה. נראה דוגמאות. לכל כוח יש אנרגיה פוטנציאלית משלו ולכן ניתן להגדיר לכל כוח, נקודת יחוס לאנרגיה הפוטנציאלית משלו.

התנגשויות בין גופים

כאשר שני גופים מתנגשים נהוג לסווג את ההתנגשות לשני סוגים. התנגשות אלסטית היא התנגשות בה נשמרת האנרגיה המכנית במערכת. התנגשות פלסטית היא התנגשות שבה נאבדת אנרגיה מכנית מהמערכת. כששני גופי מתנגשים ונדבקים אחד לשני ההתנגשות היא פלסטית.

תרגילים על אנרגיה ותנע

- מצאו את האנרגיה הפוטנציאלית שאגורה בקפיץ בעל קבוע קפיץ k שנמתח x ביחס לאורכו הרפוי.
תשובה: $U = \frac{1}{2} kx^2$.
- גוף מונח על הרצפה, נגדיר את האנרגיה הפוטנציאלית להיות אפס ברצפה. מרימים את הגוף לגובה h , מצאו את האנרגיה הפוטנציאלית שלו.
תשובה: $U = mgh$.
- אחרי שהרמנו את הגוף מהשאלה הקודמת עזבנו אותו. מהי את המהירות שלו רגע לפני שהוא הגיע לרצפה? בדקו את עצמכם, נסו לפתור את השאלה בעזרת קינמטיקה.
- הגוף משאלה 2 מתנגש ברצפה התנגשות אלסטית, מה יהיה הגובה הסופי אליו יגיע הגוף? מה העבודה שביצע הכוח הנורמלי? מה העבודה שביצע כוח הכבידה?
- גוף בעל מסה m מונח על ראש מדרון בעל זווית α , מקדם החיכוך בינו לבין המדרון הוא μ . אורך המדרון הוא L . עוזבים את הגוף והוא מתחיל להחליק על המדרון, מצאו את המהירות הגוף בקצה המדרון.



תשובה: $v = \sqrt{2gL(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}$.

- גוף בעל מסה M נע במהירות u אל עבר גוף בכל מסה $2M$ שנמצא במנוחה ומתנגש בו. מצא את המהירות הגופים לאחר ההתנגשות אם: (1) ההתנגשות היא אלסטית לחלוטין. (2) בעקבות דבק שיש על הגוף שבמנוחה הגופים נדבקים אחד לשני.

תשובה: (1) $v_{2M} = \frac{u}{3}$, $v_M = -\frac{u}{3}$. (2) $v_{2M} = \frac{2u}{3}$, $v_M = -\frac{u}{3}$.

מערכת מרכז המסה

כאשר שני גופים מתנגשים נוח לתאר את ההתנגשות במערכת שבה התנע הכולל הוא אפס, במקרה זה לפני ההתנגשות ואחרי ההתנגשות הגופים ינועו בכיוונים מנוגדים ויהיה קל יותר לחשב גדלים. נרצה למצוא מערכת שבה התנע הכולל הוא אפס. כזכור:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt}$$

התנע הכולל במערכת המעבדה $\vec{p}_{tot} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$, נרצה לעבור למערכת שנעה במהירות $\vec{u}_{c.m}$ ביחס למעבדה ובה התנע הכולל הוא אפס. המהירות של כל גוף במערכת הנעה היא $\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{u}_{c.m}$, התנע הכולל במערכת הנעה:

$$\vec{p}'_{tot} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}'_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_i - \vec{u}_{c.m}) = 0$$

נוכל להעביר אגפים ונקבל:

$$\left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \vec{u}_{c.m} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

באגף שמאל קיבלנו את המסה הכולל של המערכת $M = \sum_{i=1}^N m_i$ ולכן קיבלנו שמהירות המערכת שבה התנע הכולל הוא אפס היא:

$$\vec{u}_{c.m} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{M_{tot}} = \frac{\vec{p}_{tot}}{M_{tot}}$$

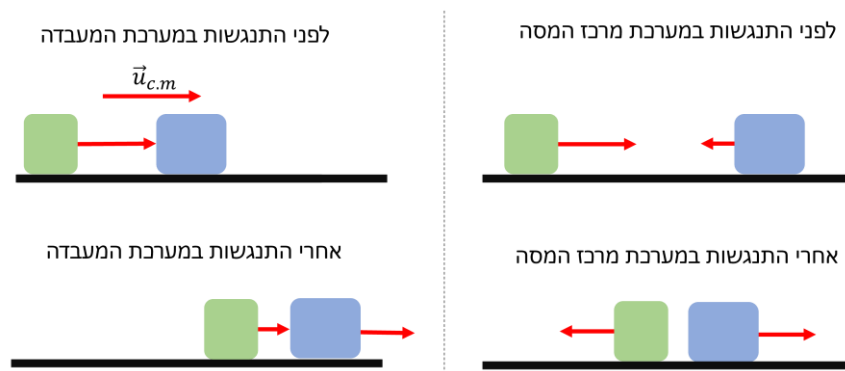
כלומר התנע הכולל יכול להיכתב בתור $\vec{p}_{tot} = M_{tot} \vec{u}_{c.m}$, כלומר ניתן להתייחס לתנע הכולל כאילו כל המערכת היא גוף יחיד בעל מסה M שנע במהירות $\vec{u}$. מהירות זו נקראת מהירות מרכז המסה, כידוע מהירות היא נגזרת של המקום ולכן על ידי אינטגרציה בזמן נקבל את מיקום מרכז המסה:

$$\vec{R}_{c.m} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

את אותו ביטוי ראיתם בהרצאה על מתמטיקה וקיבלתם אותו משיקולים אחרים. שקול הכוחות החיצוניים של המערכת שווה לשינוי בתנע של מרכז המסה:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = \frac{d(M_{tot} \vec{u}_{c.m})}{dt}$$

כלומר כאשר אין כוחות חיצוניים מרכז המסה נע במהירות קבועה, במידה ומהירות מרכז המסה היא אפס אז מרכז המסה לא זז. תוצאה זו יכולה להיות שימושית בבעיות רבות. חשוב להבין את היתרון של מערכת מרכז המסה, מפני שבמערכת מרכז המסה התנע הכולל הוא אפס אז התנגשויות במערכת מרכז מסה נראות מאוד נוחות והמשוואות נעשות פשוטות יותר.



תרגילים על התנגשויות

1. גוף בעל מסה M נע במהירות u אל עבר גוף בעל מסה $2M$ שנמצא במנוחה ומתנגש בו. מצא את מהירות הגופים לאחר ההתנגשות אם: (1) ההתנגשות היא אלסטית לחלוטין. (2) בעקבות דבק שיש על גוף שבמנוחה הגופים נדבקים אחד לשני. נסו לפתור במערכת מרכז המסה.

תשובה: (1) $v_{2M} = v_M = \frac{u}{3}$ (2) $v_{2M} = \frac{2u}{3}, v_M = -\frac{u}{3}$.

2. חובטים בכדור פינג פונג בעל מסה m במחבט בעל מסה M שנע במהירות v ביחס לשולחן הפינג פונג. הכדור נע אל עבר המחבט במהירות u ביחס לשולחן הפינג פונג. מסת המחבט גדולה בהרבה ממסת הכדור $M \gg m$. מצאו את מהירות הכדור לאחר החבטה.

תשובה: $v_f = u + 2v$.

3. שיחקתי ביליארד ונשאר לי להכניס רק את הכדור השחור. אני נותן מכה לכדור הלבן ופוגע בכדור השחור, מה תהיה הזווית בין המהירויות של הכדורים לאחר ההתנגשות? נתון ששני הכדורים זהים בכל הפרמטרים, פרט לצבע שלהם. כמו כן ההתנגשות בין הכדורים אלסטית.

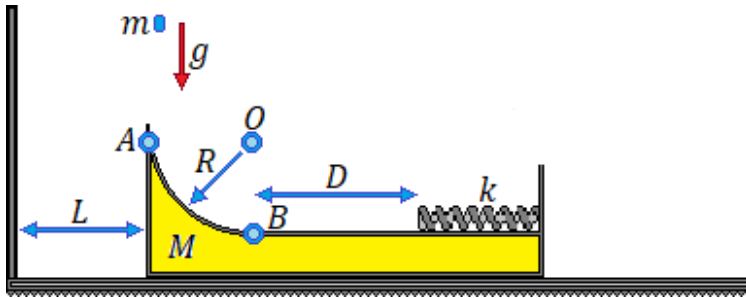
תשובה: 90°

4. **שאלת אתגר:** תיבה שמסתה $m = 1 \text{ kg}$ מונחת על משטח מימין לקיר אלסטי, תיבה שמסתה $M = 1,000,000 \text{ kg}$, נעה לכיוון התיבה הראשונה מימינה. כל ההתנגשויות במערכת אלסטיות. מצאו את מספר ההתנגשויות הכולל במערכת. התשובה עלולה להפתיע אתכם

סרטון שמסביר את הפתרון. מומלץ להסתכל!

תרגיל – התנעה מהנה

תיבה בעלת מסה M מונחת על רצפה אופקית. הדופן העליון של התיבה מורכב ממשטח אופקי ומקשת AB שהיא רבע מעגל בעל רדיוס R (ראו תרשים). בקצה הימני של התיבה במרחק D מקצה הנקודה B מחובר לתיבה קפיץ חסר מסה בעל קבוע k .

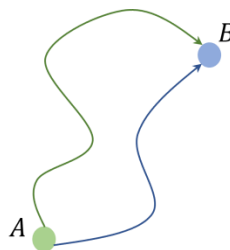


במרחק L משמאל לתיבה נמצא קיר, כאשר התיבה מתנגשת בקיר ההתנגשות היא אלסטית. גוף קטן בעל מסה m מוחזק בדיוק מעל נקודה A בגובה h ביחס לנקודה B , עוזבים את הגוף הוא נופל ובזמן $t = 0$ מתחיל להחליק לאורך הקשת AB החל מנקודה A . תאוצת הכובד היא g . אין חיכוך במערכת.

- מהם התנאים על המסות והגדלים L ו- R כך שהגוף m יגיע לראשונה לנקודה B לפני שהתיבה תתנגש בקיר? לאורך המשך השאלה נניח שתנאי זה מתקיים.
 - מהו תנאי על יחס המסות כך שהגוף יתנגש בקפיץ לפני שהוא יעבור בנקודה B בפעם השנייה? לאורך המשך השאלה נניח שתנאי זה מתקיים.
 - מצאו את ההתכווצות המקסימאלית של הקפיץ Δx לאורך התנועה.
 - מצאו את הגובה המקסימאלי H_1 ביחס לנקודה B אליו יגיע הגוף m אחרי ההתנגשות עם הקפיץ.
 - מצאו את המהירות המקסימאלית של כל אחת מהמסות לאורך התנועה.
- נניח שמורחים דבק על הדופן השמאלית של התיבה כך שכשהיא מתנגשת בקיר היא נדבקת אליו.
- מצאו את הגובה המקסימאלי H_2 ביחס לנקודה B אליו יגיע הגוף m אחרי ההתנגשות עם הקפיץ.

נספח

נוכיח שאם כוח הוא משמר (לפי ההגדרה שראינו) אז העבודה שהוא מבצע לא תלויה במסלול אלא רק בנקודות ההתחלה והסוף. נסתכל על כוח משמר שפועל על חלקיק לאורך שני מסלולים שונים שמחילים ומסתיימים באותה נקודה. ונראה שהעבודה לאורכם זהה.



נסמן ב- W_g את העבודה שנעשתה לאורך המסלול הירוק וב- W_b את העבודה לאורך המסלול הכחול. נשים לב שאם נהפוך את כיוון המסלול הכחול העבודה שתעשה מנקודה B אל נקודה A תהיה $-W_b$. נלך לאורך המסלול הירוק מנקודה A אל נקודה B ולאחר מכן לאורך המסלול הכחול מנקודה B אל A (זהו מסלול סגור!) העבודה הכוללת תהיה:

$$W_{tot} = W_g - W_b$$

אבל מפני שהכוח משמר אז העבודה לאורך מסלול סגור היא אפס $W_{tot} = 0$. כלומר $W_g = W_b$.