

אולימפיאדה ארצית במתמטיקה תשפ"ג - שלב א' תלמידי תיכון – מועד ב' 30.10.2022

לפניכם שאלון מתמטי בן עשר שאלות. השאלות אינן שגרתיות, וגם תלמידים חזקים במיוחד יתקשו לפתור את כולן. המצטיינים יוזמנו להשתתף בשלבים נוספים של תחרויות ואימונים, שבסופם תורכב הנבחרת שתייצג את ישראל באולימפיאדת המתמטיקה הבינלאומית - IMO, שתיערך בקיץ 2023 ביפן.

יש להזין את התשובות הסופיות בלבד – אין צורך לנמק. **אין להשתמש במחשבון. משך המבחן: 90 דקות.**

שאלות:

1. נתון מלבן שעשוי מנייר. אם נקפל אותו לחצי בכיוון אחד נקבל מלבן עם היקף 24, אבל אם במקום זאת נקפל אותו לחצי בכיוון השני נקבל מלבן עם היקף 18. מה ההיקף של המלבן המקורי?

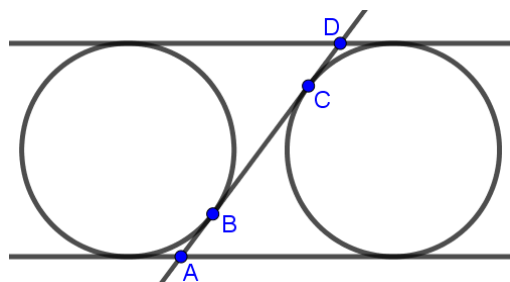
2. מסלול מעגלי מחולק ל-100 משבצות. על המשבצת הראשונה במסלול מונח חייל. בתור הראשון החייל הולך צעד אחד עם כיוון השעון, בתור השני שני צעדים עם כיוון השעון, בתור השלישי שלושה צעדים, וכך הלאה. מה התור הראשון שבסופו החייל יחזור למשבצת ההתחלתית?

3. במשבצות של לוח 4×4 עומדים אנשים, אחד בכל משבצת. חלקם דוברי אמת (שאומרים תמיד את האמת) וחלקם שקרנים (שתמיד משקרים). שני אנשים נחשבים שכנים אם למשבצות שלהם יש צלע משותפת. כל אחד מהאנשים אומר שכל השכנים שלו שקרנים.

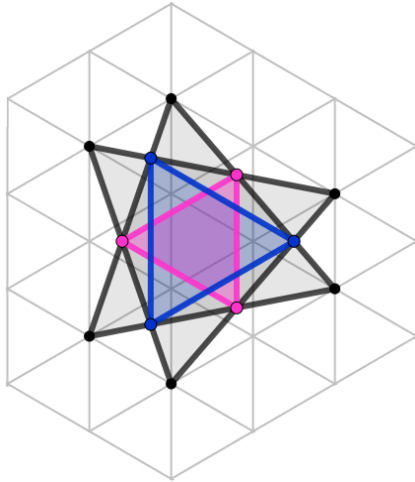
(א) מהי הכמות המקסימלית האפשרית של דוברי אמת?

(ב) מהי הכמות המינימלית האפשרית של דוברי אמת?

4. נתון זוג ישרים מקבילים במרחק 12 מזה, ושני מעגלים שכל אחד מהם משיק לשני הישרים. מעבירים ישר שמשיק לשני המעגלים בנקודות B, C וחותך את שני הישרים בנקודות A, D, כך ש-A, B, C, D מסודרים על הישר בסדר הזה. נתון כי $AD=13$. מצאו את האורך של BC.



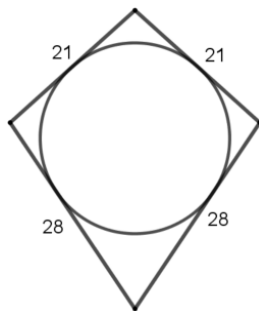
5. שני מספרים שלמים x, y מקיימים את המשוואה $x^2y - 8xy + 64y^2 + 1 = 0$. מצאו את הערך המקסימלי האפשרי של x .



6. בציור רואים משולשים משוכללים (שניים שחורים, אחד כחול, אחד ורוד, והרבה אפורים). השטח של המשולש הוורוד שווה ל-400. מצא את השטח של המשולש הכחול.

7. נתון מספר x המקיים $x^3 = x + 1$. חשבו את $\frac{x^{16} + 61}{x^9 + 9}$.

8. תיבה שממדיה $1 \times 1 \times 2$ מקובעת במרחב (לא ניתן לסובב אותה). הפאות שלה מורכבות ממשבצות בגודל 1×1 . בכמה דרכים שונות ניתן לכסות את כל 10 המשבצות על המעטפת שלה באמצעות 5 מדבקות זהות בגודל 1×2 , כך שכל מדבקה תכסה שתי משבצות סמוכות בדיוק? ניתן לקפל מדבקות, אבל אסור לקרוע אותן.



9. דלתון שאורכי צלעותיו 21, 21, 28, 28 חוסם מעגל. מצאו את הרדיוס המקסימלי האפשרי עבור המעגל הזה.

10. לאסף יש אוסף גדול של מדבקות, שעל כל אחת מהן רשומה אחת מהמילים הבאות: **תותית, שישית, לסלול, תשתית, סוסות**.

אסף רוצה להדביק על דף כמות כלשהי (גדולה מ-0) של מדבקות, כך שכל אחת מבין שש האותיות ו', י', ל', ס', ש' ו-ת' תופיע כמות זהה של פעמים סך הכול על הדף.

(א) מהי הכמות הקטנה ביותר של מדבקות לה הוא זקוק בכדי להצליח?

(ב) כשכמות המדבקות הכוללת היא מינימלית, כמה פעמים תופיע המילה "שישית"?

בהצלחה!