מדינת ישראל
משרד החינוך

8.11.2021
ד' בכסלו תשפ"ב

פתרונות: אולימפיאדה ארצית במתמטיקה - שלב א׳
תלמידי תיכון – מועד ב׳

1. נניח כי $\frac{138}{83} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}$. מצאו את x.

פתרון. נחסיר 1 משני האגפים: $\frac{55}{83} = \frac{138-83}{83} = \frac{138}{83} - 1 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}$

אחד חלקי בכל אגף $\frac{83}{55} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}$. נחזור על שתי הפעולות האלו מספר פעמים:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}} = \frac{83-55}{55} = \frac{28}{55}$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}} = \frac{55}{28}$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}} = \frac{55-28}{28} = \frac{27}{28}$$

$$1+\frac{1}{x} = \frac{28}{27}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{27}$$

$$x = 27$$

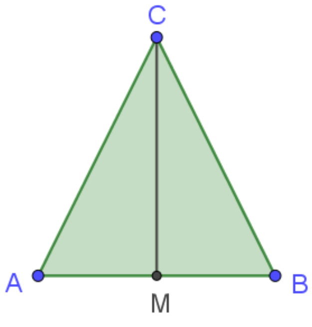
2. שחר, אלמוג ודרור קיבלו 15 חפיסות שוקולד זהות והם רוצים לחלק אותן ביניהם. שחר רוצה לקבל לפחות 2 חפיסות, אלמוג רוצה לקבל לפחות 3 חפיסות ודרור רוצה לקבל לפחות 4 חפיסות. בכמה דרכים שונות הם יכולים לחלק את השוקולד ביניהם כך שכולם יהיו מרוצים?

פתרון. נתחיל מזה שניתן לשחר את 2 החפיסות שהוא חייב לקבל, לאלמוג 3 חפיסות, ולדרור 4 חפיסות, ויישארו 6 חפיסות שצריך עוד לחלק אותן בין 3 החברים בצורה כלשהי. אפשר לסדר את החפיסות בשורה, ואז כל שיטת חלוקה אפשר לתאר בתור דרך להניח בשורה זו 2 סרגלים שיפרידו את השורה ל-3 חלקים: החלק הימני שמיועד לשחר, החלק האמצעי שמיועד לאלמוג והחלק השמאלי שמיועד לדרור.

כלומר בסופו של דבר כמות החלוקות זה כמות הדרכים לסדר בשורה מימין לשמאל 8 חפצים: 6 חפיסות שוקולד ושני סרגלים. זה כמו לבחור מבין 8 המקומות 2 מקומות בהם מניחים את הסרגלים והכמות היא $\frac{8\cdot 7}{2}=28$.

3. נתון משולש שאורכי צלעותיו הם 8, $4\sqrt{5}$ ו- $4\sqrt{5}$. מצאו את הרדיוס של המעגל החוסם של המשולש.

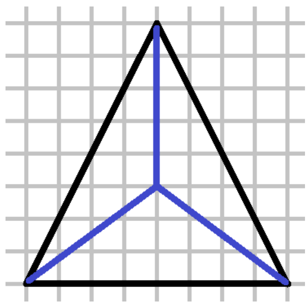
פתרון. המשולש שווה שוקיים, נסמן את קודקודיו A,B,C כאשר $AC=BC$. תהיה M האמצע של AB. אז MC הוא תיכון וגם גובה וגם אנך אמצעי במשולש ABC. לכן משולש MAC הוא ישר זווית.



לפי משפט פיתגורס $MC=\sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2-4^2}=4\cdot\sqrt{5-1}=8$.

מרכז המעגל החוסם O צריך להיות על הישר BM, והמרחק מ-O לכל קודקוד של המשולש ABC שווה ל- R, כאשר R הוא רדיוס המעגל החוסם.

המרחק בין O ל-M הוא $|8-R|$ ולכן לפי משפט פיתגורס במשולש OMA נקבל



$$\begin{aligned}(8-R)^2+4^2&=R^2\\ 64-16R+16&=0\\ 4+1&=R\\ R&=5\end{aligned}$$

הערה. ניתן לצייר את הציור גם על דף משבצות ואז קל לנחש את התשובה, או לקבל אותה ממפגש האנכים האמצעים במשולש.

4. בשורה יש 5 בורות. חרגול יושב בבור השמאלי ביותר. כל דקה החרגול קופץ לבור סמוך. בכמה דרכים החרגול יכול לעשות 10 קפיצות ולסיים בבור האמצעי?

פתרון. הקפיצה הראשונה היא חד-משמעית: חייבים לקפוץ ימינה, כי משמאל אין בור.

לאחר הקפיצה הראשונה אנחנו נמצאים בבור השני משמאל. נבדוק מה אפשר לעשות בשתי הקפיצות הבאות. אפשרות אחת היא לקפוץ לאמצע ואז יש שתי דרכים להמשיך, האפשרות השנייה זה לחזור לקצה ואז יש רק דרך אחת להמשיך. לכן יש לנו 3 אפשרויות של מה שאפשר לעשות בשתי הקפיצות שאחרי זה, ובכל מקרה נגיע לבור השני משמאל או לבור השני מימין.

לכן לגבי מה עושים בקפיצות 4 ו-5 יש בדיוק 3 אפשרויות, ושוב מגיעים לבור שהוא לא בקצה ולא באמצע, וכך גם יש 3 אפשרויות עבור קפיצות 6 ו-7, ו-3 אפשרויות עבור קפיצות 8 ו-9. הקפיצה העשירית היא דווקא מוגדרת ביחידות, כי רוצים לחזור בסוף לאמצע ובשתי כאשר אנחנו נמצאים בבור השני מימין או משמאל יש בדיוק דרך אחת לעשות זאת.

אז יש $3\cdot3\cdot3\cdot3=9\cdot9=81$ אפשרויות למסלול.

5. דני מצא את כל הפתרונות למשוואה $mn=3m+7n$ כך ש-m ו-n שלמים. חשבו את סכום כל הערכים שהוא קיבל עבור n.

פתרון. נעביר את הכול לאגף שמאל $mn-3m-7n=0$. זה שקול ל-

$$(m-7)(n-3)=21$$

לכן האפשרויות עבור $n-3$ הן בדיוק כל המחלקים של 21, כלומר $\pm1,\pm3,\pm7,\pm21$, ויש 8 כאלה. אם נחבר את כל הערכים האפשריים עבור $n-3$, נקבל 0, הרי הם באים בזוגות של x ו-$-x$.

מצד שני זה בדיוק המספר שאנחנו מחפשים פחות $8\cdot3=24$, כי יש 8 מחוברים ובכל פעם מחסירים 3. לכן סכום כל הערכים של n הוא 24.

8.11.2021
ד' בכסלו תשפ"ב

6. בלוח 19×19 סומנו מספר משבצות כך שמתקיימים הדברים הבאים:

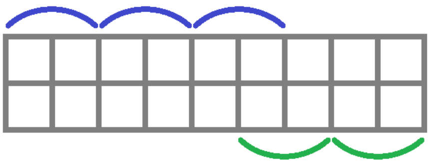
- בכל שורה יש מספר זהה של משבצות מסומנות.
- בכל ריבוע 2×2 שמורכב מארבע משבצות יש בדיוק משבצת מסומנת אחת.

כמה משבצות מסומנות יש בעמודה:

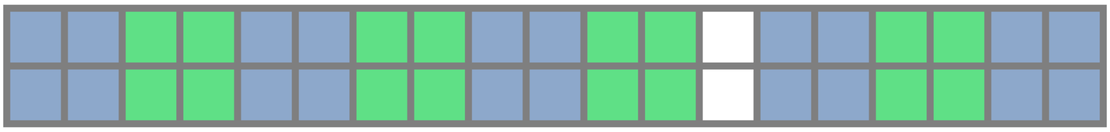
א. שיש בה הכי הרבה משבצות מסומנות?

ב. שיש בה הכי מעט משבצות מסומנות?

פתרון. נתבונן בשתי שורות סמוכות. ניתן להכניס בהן 9 ריבועים 2×2 ללא חיתוכים, לכן יש בהן לפחות 9 משבצות מסומנות.
אפשר גם לכסות אותן באמצעות 10 ריבועים 2×2 עם חיתוך בעמודה אי-זוגית כלשהי, ולכן יש בהן לכל היותר 10 משבצות מסומנות.



לכן אם בכל שורה יש K משבצות בדיוק, אז K הוא לכל היותר 5 אבל לפחות 4.5 ולכן K שווה ל-5. כלומר בשתי השורות יחד יש 10 משבצות.
ניתן להכניס בשתי העמודות 9 ריבועים 2×2 ללא חיתוכים, וישארו שתי משבצות בעמודה אי-זוגית כלשהי. ב-9 הריבועים יש 9 משבצות מסומנות, לכן בכל עמודה אי-זוגית בשתי השורות האלה אחת משתי המשבצות מסומנת.



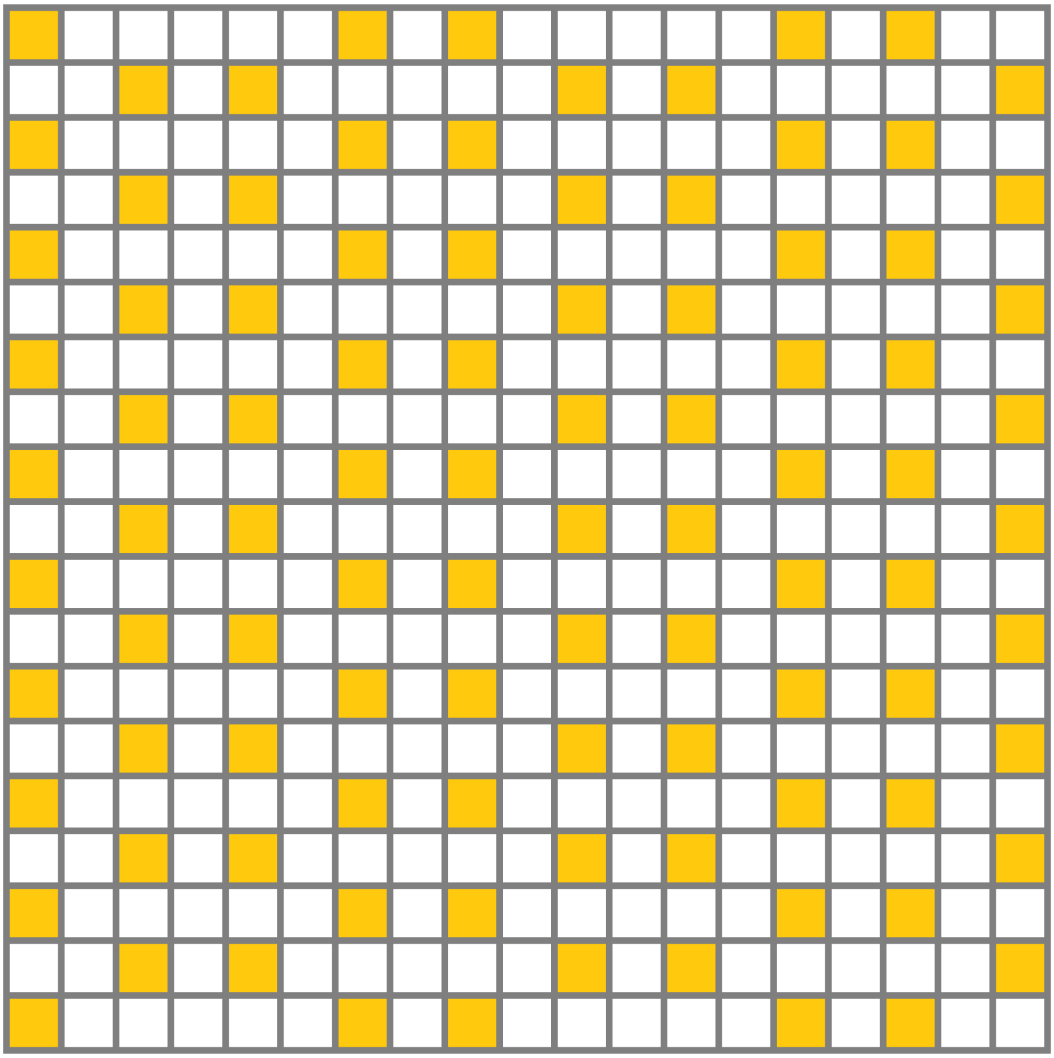
אבל יש בדיוק 10 עמודות אי-זוגיות, וזה כבר נותן 10 משבצות מסומנות בשתי שורות אלו, וזה כל מה שיש שם. לכן אין משבצות מסומנות בעמודות זוגיות.

לכן התשובה לסעיף ב' היא 0.

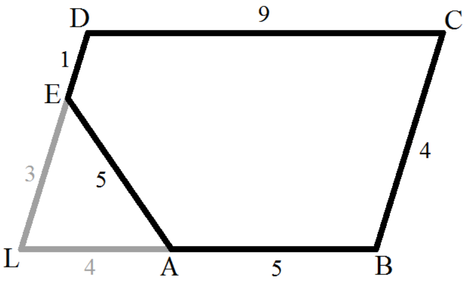
בכל עמודה אי-זוגית יש 19 משבצות, ומבין כל 2 משבצות רצופות אחת מסומנת, זה אומר שיש 9 או 10 משבצות מסומנות.

סה"כ יש $19\cdot5=95$ משבצות מסומנות, וכולן נמצאות ב-10 עמודות האי-זוגיות, ולכן חייבות להיות גם עמודות עם 10 משבצות מסומנות; לו היו רק עמודות זוגיות של 9 משבצות מסומנות היינו מקבלים לא יותר מאשר 90 משבצות מסומנות.

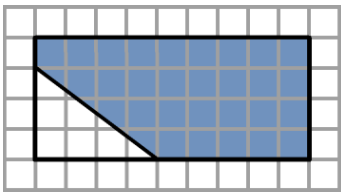
אחת הדוגמאות לשיטה לסמן משבצות מופיעה בעמוד הבא.



7. המחומש ABCDE קמור (כל הזוויות הפנימיות קטנות מ- 180°). אורכי צלעותיו הם $AB=5,\ BC=4,\ CD=9,\ DE=1,\ EA=5$. בנוסף נתון כי AB מקביל ל-CD וגם כי BC מקביל ל-DE. מצאו את שטח המחומש.



פתרון. הישרים AB ו-DE נפגשים בנקודה L כך ש-LBCD מקבילית, כיוון שהצלעות הנגדיות מקבילות. הצלעות הנגדיות של המקבילית שוות, ולכן $LA=9-5=4$, ובאופן דומה $LE=4-1=3$. לכן צלעותיו של המשולש ALE הן 3,4,5 ולפי משפט פיתגורס הזווית L ישרה. לכן LBCD בעצם מלבן ששטחו $4\cdot 9=36$ והמחומש ABCDE הוא מלבן שהורידו ממנו פינה משולשית ששטחה $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$ ולכן שטח המחומש הוא $36-6=30$.



8. למשוואה $\frac{x+2}{x-1}+\frac{x+4}{x-3}+\frac{x+6}{x-5}+\frac{x+8}{x-7}=-4$ יש בסה"כ n פתרונות ממשיים $x_1, x_2, \ldots, x_n$. מצאו את $2\cdot\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)$.

פתרון ראשון. נוסיף 1 לכל שבר בצד שמאל, ו-4 לצד ימין ונקבל:

$$\frac{x+2}{x-1}+1+\frac{x+4}{x-3}+1+\frac{x+6}{x-5}+1+\frac{x+8}{x-7}+1=0$$

$$\frac{x+2+x-1}{x-1}+\frac{x+4+x-3}{x-3}+\frac{x+6+x-5}{x-5}+\frac{x+8+x-7}{x-7}=0$$

$$\frac{2x+1}{x-1}+\frac{2x+1}{x-3}+\frac{2x+1}{x-5}+\frac{2x+1}{x-7}=0$$

כבר רואים ש- $x_0=-\frac{1}{2}$ זה פתרון, כי אז כל שבר מתאפס; ואם לא מותר לחלק ב-$2x+1$ ולקבל:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-7}=0$$

נסמן $z=x-4$ ואז $x=z+4$. במונחים של z נוכל לרשום

$$\frac{1}{z+3}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-3}=0$$

נחבר מהקצוות ונקבל

$$\frac{2z}{(z-3)(z+3)}+\frac{2z}{(z+1)(z-1)}=0$$

רואים כי $z_1=0$ הוא פתרון אפשרי, ובמקרים האחרים אפשר לחלק ב- $2z$:

$$\frac{1}{z^2-9}+\frac{1}{z^2-1}=0$$

$$\frac{1}{z^2-9}=-\frac{1}{z^2-1}$$

$$z^2-1=9-z^2$$

$$2z^2=10$$

$$z^2=5$$

$$z_2, z_3=\pm\sqrt{5}.$$

ובכן במונחים של z מצאנו 3 שורשים $z_1,z_2,z_3=0,\pm 2$ אבל $z=x+4$, ולכן $x_1,x_2,x_3=4,4\pm\sqrt{5}$, ובנוסף יש גם $x_0=-\frac{1}{2}$.

המטרה שהוצבה היא לחשב את פעמיים סכום הפתרונות. סכום הפתרונות הוא

$$4+4+\sqrt{5}+4-\sqrt{5}-\frac{1}{2}=11.5$$

נכפיל ב-2 ונקבל 23.

פתרון שני. קודם כל, נציין שלמשוואה $\frac{x+2}{x-1}+\frac{x+4}{x-3}+\frac{x+6}{x-5}+\frac{x+8}{x-7}=-4$ יש לפחות 4 פתרונות ממשיים. הביטוי בצד שמאל אינו מוגדר ב-$1,3,5,7$.

אם נציב $x=-100$ נקבל בצד שמאל בערך 4, ואם נציב $x=0.99$ נקבל שהמחובר הראשון הוא שלילי ומאוד חזק ביחס למחוברים האחרים, לכן בין -100 לבין 1 יש פתרון למשוואה.

אם נציב $x=1.001$ אז המחובר הראשון הוא חיובי וגדול בהרבה בערך המוחלט מהמחוברים האחרים, ואם נציב $x=2.999$ אז דווקא המחובר השני הוא המשמעותי ביותר והוא שלילי (כ-7000) ולכן גם יש פתרון למשוואה בין 1 ל-3.

באופן דומה רואים שיש פתרון בין 3 ל-5 ויש פתרון בין 5 ל-7.

כעת, אם נכפיל במכנה המשותף $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$ אז נקבל פולינום ממעלה רביעית:

$$\begin{aligned}&(x+2)(x-3)(x-5)(x-7)+\\&+(x+4)(x-1)(x-5)(x-7)+\\&+(x+6)(x-1)(x-3)(x-7)+\\&+(x+8)(x-1)(x-3)(x-5)=-4(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)\end{aligned}$$

אנחנו נחשב רק את המקדמים של x^4 ושל x^3:

$$\begin{aligned}&x^4+x^3(2-3-5-7)+\ldots+x^4+x^3(4-1-5-7)+\ldots\\&+x^4+x^3(6-1-3-7)+\ldots+x^4+x^3(8-1-3-5)+\ldots=\\&=-4\left(x^4-x^3(1+3+5+7)+\ldots\right)\end{aligned}$$

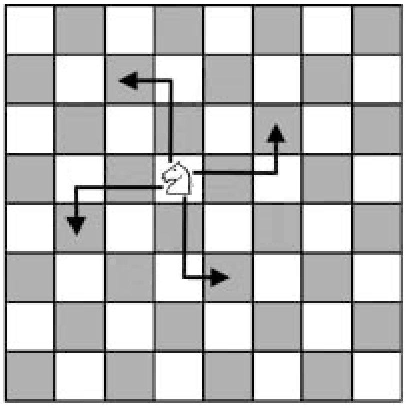
$$8x^4+x^3\left(2+4+6+8-3(1+3+5+7)-4(1+3+5+7)\right)+\ldots=0$$

$$8x^4+x^3\left(2+4+6+8-7(1+3+5+7)\right)+\ldots=0$$

$$8x^4+x^3(4\cdot5-7\cdot4\cdot4)+\ldots=0$$

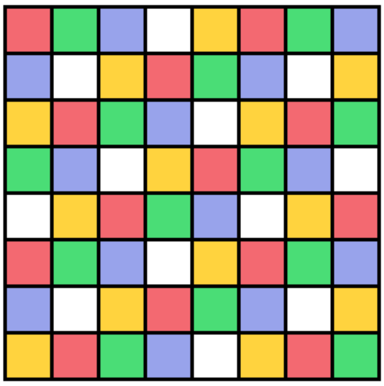
$$8x^4-4\cdot23\cdot x^3+\ldots=0$$

כאשר מאחורי הסימן ... מסתרים x^2 וחזקות נמוכות יותר. כבר הוכחנו שלפולינום זה יש לפחות 4 שורשים ממשיים. לכן לפי משפט וייטא אנו יודעים שסכומם שווה ליחס בין מינוס המקדם של x^3 למקדם של x^4. מספר זה הוא $\frac{23}{2}=\frac{4\cdot23}{8}$. לכן פעמיים סכום השורשים שווה ל-23.

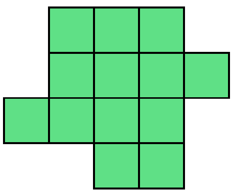


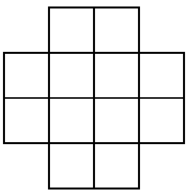
9. פרש צולע על רגל שמאל זה פרש שחמט שבכל מהלך הולך שני צעדים בכיוון מסוים, ואז פונה שמאלה ועושה צעד אחד נוסף. מה המספר המקסימלי של פרשים צולעים על רגל שמאל שאפשר לשים על לוח שחמט מבלי שהם יאיימו אחד על השני?

הערה. פרש צולע מאיים על משבצת אם הוא יכול להגיע אליה במהלך אחד.

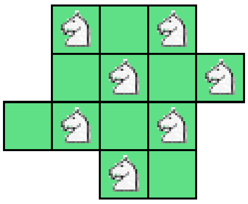
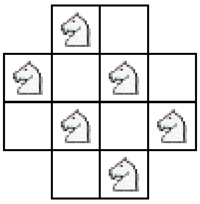


פתרון. בציור רואים צביעה של לוח שח ב-5 צבעים בצורה כזאת, שהפרש הצולע מכל משבצת מאיים רק על משבצות מאותו הצבע. יש 12 משבצות מצבע לבן ו-13 משבצות מכל הצבעים האחרים. לכן מספיק להבין מה קורה בכל צבע בנפרד ולחבר 5 מספרים. האמת היא שכל צבע חוץ מלבן זהה לכל צבע אחר שהוא לא לבן; ניתן לראות שהסיבובים של הלוח ב-90° מעבירים את הצבעים האלה אחד לשני.

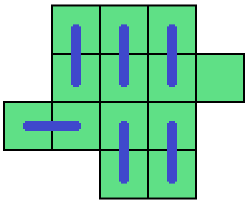
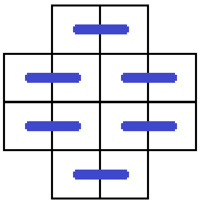




בעצם אם מתמקדים בכל צבע ספציפי, ומסובבים קצת את הלוח, מקבלים שאלה על לוח משבצות בצורה מוזרה ומנסים להציב כמה שיותר פרשים כך שעל אף שתי משבצות סמוכות לא יהיו שני פרשים.

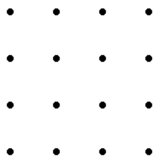



קל להציב בצורה כזאת 6 פרשים בצבע לבן ו-7 פרשים בכל צבע אחר. מתוך הלבן זה יתן בדיוק חצי מהמשבצות, ומתוך כל צבע אחר זה נותן חצי מהמשבצות ועוד חצי פרש. לכן בסה"כ נקבל חצי מכמות המשבצות ועוד 4 חצאי פרש, שזה חצי מכמות המשבצות ועוד שני פרשים, שזה בסה"כ 34.

השאלה האם לא ניתן להציב יותר פרשים. בכל אחת מהצבעים נוכל לחלק את המשבצות לזוגות, כאשר בכל זוג ניתן להציב רק פרש אחד:

בצבעים שהם לא לבן, יש חלוקה של המשבצות ל-6 זוגות ומשבצת נוספת, ולכן לא יכולים להיות יותר מ-7 פרשים בכזה צבע. בצבע הלבן יש חלוקה ל-6 זוגות.



10. בדף משבצות סומנו 16 קודקודים כמתואר בציור. כמה משולשים קהי זווית ישנם ששלושת קודקודיהם מסומנים?

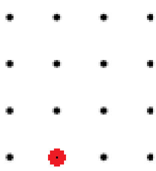
פתרון. לכל משולש עם זווית קהה יש רק זווית קהה אחת. לכן נעבור על כל הנקודות בסריג ונבדוק עבור כמה זוויות קהות נוצרות בדיוק בנקודה הזאת.

בעצם, עד כדי סימטריה, יש בציור שלנו 3 סוגים של נקודות:

(א) נקודות פינתיות. בהן אין זוויות קהות, אז לא צריך לספור אותן, כי כל הנקודות האחרות מתחילות בזווית ישרה מכל נקודה כזאת.
(ב) נקודות ליד אמצע של צלע של הריבוע, ויש בדיוק 8 כאלה, אז נספור עבור אחת מהן ונכפיל ב-8.
(ג) נקודות ליד המרכז של הריבוע ויש 4 כאלה, אז נספור עבור אחת מהן ונכפיל ב-4.

נשתמש בסימונים של שחמט: ניתן שמות א', ב', ג', ד' לעמודות (משמאל לימין) ומספרים 1, 2, 3, 4 לשורות (מלמטה למעלה) וזה נותן שם קצר לכל נקודת סריג, נגיד א1 זו הפינה השמאלית התחתונה.

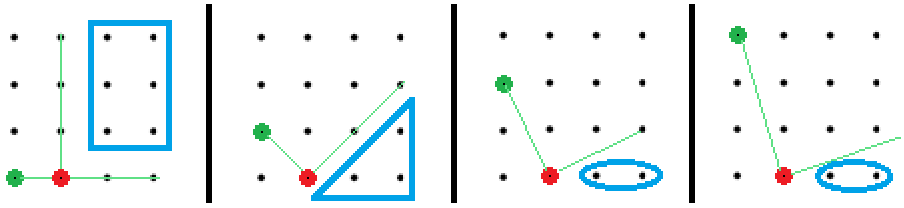
כעת נעבור לבדיקת המקרים.



(ב) נספור את כמות הזוויות הקהות עם קודקוד בנקודה **ב1**.

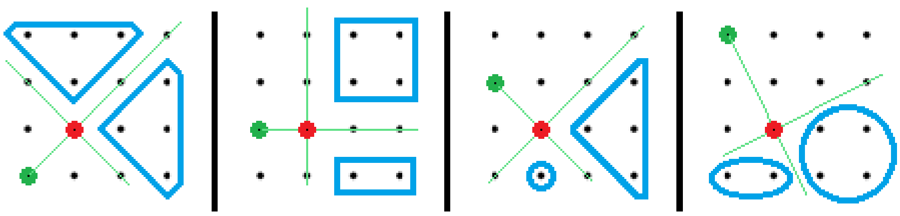
לא יתכן ששתי הנקודות על צלעות הזווית נמצאות בעמודות ב,ג,ד כי אז שתיהן בתוך זווית ישרה עם קודקוד בנקודה ב1. אז אחת מצלעות הזווית

עוברת בנקודה בעמודה א'. זה 4 אפשרויות לעבור עליהן. בכל אפשרות נעביר ישר דרך שתי הנקודות, אנך אליו דרך הנקודה ב1, ונספור את כמות הנקודות בתחום הרלוונטי:

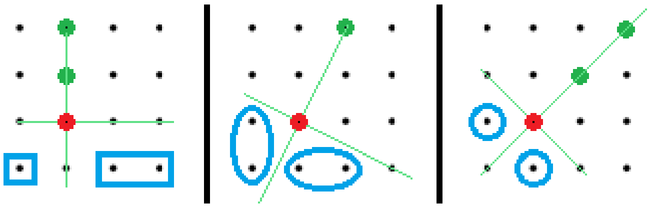


מקבלים $6+3+2+2=13$ אפשרויות.

(ג) נניח שהקודקוד של הזווית היא ליד המרכז, נגיד נקודה ב2. נבדוק לגבי כל נקודה אחרת שמגדירה קרן של זווית, כמה נקודות נוספות יכולות להשלים את זה לזווית קהה



דבר אחד שחוסך חלק מבדיקת מקרים זה סימטריה ביחס לאלכסון שעובר דרך נקודה ב2, נגיד אם בדקנו את כל עמודה א' זה בדיוק כמו לבדוק את שורה 1.



דבר אחר הוא שעל קרן אחת מנקודה 1 נמצאות לפעמים יותר מנקודה אחת, ולכן נקודות ב2, ב3 נותנות אותה כמות של זוויות, בדיוק כמו הנקודות ג3, ד4.

6	3	4	2
5	3	2	4
6		3	3
8	6	5	6

נרשום את כל התוצאות בטבלה. אם נחבר את כל המספרים בטבלה, זה יספור את כל הזוויות הקהות עם קודקוד ב1 פעמיים. לכן צריך חצי מסכום המספרים בטבלה.

לכן אפשר לחבר רק את המספרים מעל האלכסון, ולהוסיף מחצית מסכום המספרים על האלכסון: $6+5+6+3+3+4+4+1+1=33$.

נסכם: בכל המקרים נקבל $8\cdot 13+4\cdot 33=104+132=236$.