

25.11.2020
ט' בכסלו תשפ"א



מדינת ישראל
משרד החינוך

אולימפיאדה ארצית במתמטיקה - שלב א'

תלמידי תיכון – מועד ב'

לפניכם שאלון מתמטי בן תשע שאלות. השאלות אינן שגרתיות, וגם תלמידים חזקים במיוחד יתקשו לפתור את כולן. המצטיינים יוזמנו להשתתף בשלבים נוספים של תחרויות ואימונים, שבסופם תורכב הנבחרת שתייצג את ישראל באולימפיאדת המתמטיקה הבינלאומית - IMO, שתיערך בקיץ 2021.

יש להזין את התשובות הסופיות בלבד – אין צורך לנמק. **אין להשתמש במחשבון. משך המבחן: 90 דקות.**

שאלות:

1. מעطף סלסלה מعرفة بواسطة $a_1 = 99999$, والقانون $a_{n+1} = a_n(a_n + 2)$. جدوا مجموع منازل a a_{10} .

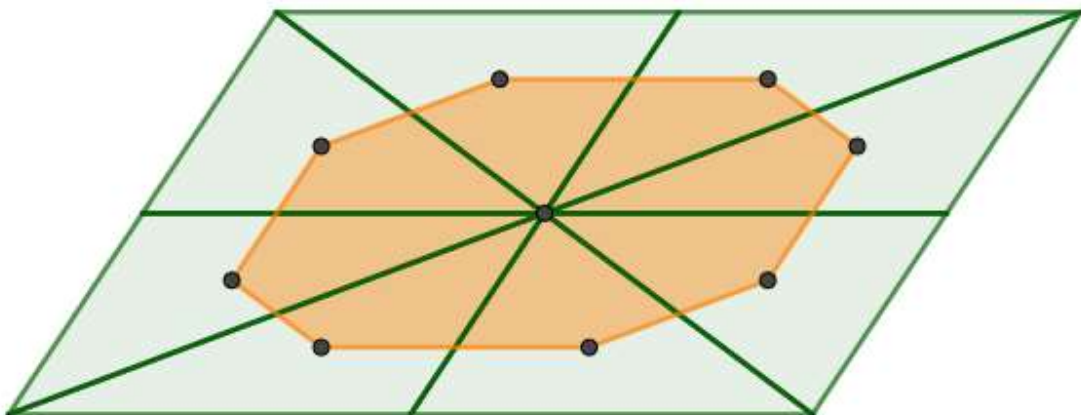
2. بشبه منحرف متساوي الساقين اطوال القاعدتان هما 8 و 18 ومحصورة به دائرة نصف قطرها R . جدوا R .

3. لنظام المعادلات التالي عدد من الحلول (x, y)

$$\begin{cases} y^2 = 390 \cdot x^3 + x^2 \\ 2x^2 + y = 2xy + x \end{cases}$$

جدوا اكبر قيمة ممكنة ل y .

4. معطى متوازي اضلاع مساحته 900. بمتوازي الاضلاع رسموا القطران, ورسموا القطع بين انصاف الاضلاع المتقابلة; هكذا قسم متوازي الاضلاع ل 8 مثلثات. بكل من المثلثات ال 8 علموا نقطة تقاطع المتوسطات. وصلوا النقاط ال 8 ونتج شكل ثماني برتقالي, كما في الرسم. احسبوا مساحة الشكل الثماني.



25.11.2020
ט' בכסלו תשפ"א



מדינת ישראל
משרד החינוך

5. عدد N يسمى عدد ناجح اذا قسم على نصف الاعداد بين 1 و N على الاقل (يشمل). احسبوا مجموع الاعداد الناجحة.

6. معطى ان $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 5$ وايضا $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = 6$. احسبوا $\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{c^4} + \frac{c^4}{a^4}$.

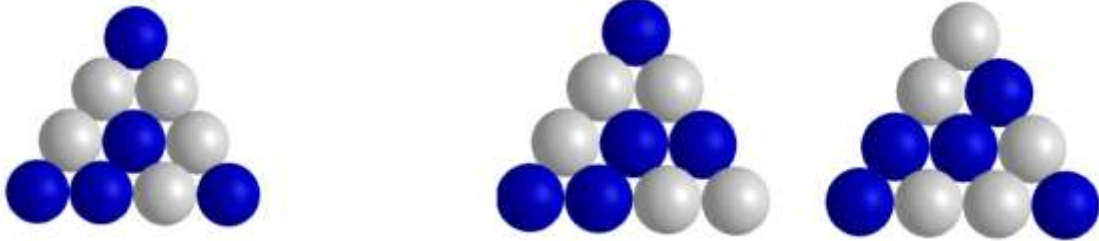
7. في المستوى رسموا 9 مستقيماً مختلفة: 3 مستقيماً حمراً, 3 مستقيماً خضراً, و3 مستقيماً زرقاً. مستقيماً من نفس اللون متوازية ومستقيماً من الوان مختلفة غير متوازية. المستقيماً تقسم المستوى ل N اقسام.

א. ما هي اكبر قيمة ممكنة ل N؟

ב. ما هي اصغر قيمة ممكنة ل N؟

8. لداني مخزون لا نهائي من كرات زرقاء وبيضاء بنفس الحجم. داني يلصق كرات ببعض وينشئ منهم مثلثات, كل مثلث مبني من 10 كرات, بالضبط 5 كرات زرق و 5 كرات بيض, ومرتبين كما في الرسم. هو يدخل المثلثات لصندوق ويعطيه لايليت. داخل الصندوق من الممكن ان تدور المثلثات وتقلب. داني يريد ان يصنع اكبر عدد ممكن من المثلثات حيث تستطيع ايليت ان تفرق بين كل مثلثان. كم مثلث يستطيع داني ان يصنع؟

مثلاً, من بين المثلثات في الرسم, ايليت لن تستطيع ان تفرق بين المثلثين على اليمين, لكنها تستطيع ان تفرق بينهم وبين المثلث على اليسار.



9. معطى صندوق اطولا اضلاعه اعداد صحيحة. مجموع اطوال الاضلاع ال 12 زائد حجم الصندوق يساوي مساحة اوجه الصندوق. ما هي اكبر قيمة ممكنة لحجم الصندوق؟

بالنجاح!