אולימפיאדה למתמטיקה תשפ"א

שלב א' – מועד ב'

פתרונות

1. נתונה סדרה שמוגדרת על ידי $a_1 = 99999$, ונוסחת הנסיגה $a_{n+1} = a_n(a_n + 2)$.
מצאו את סכום הספרות של a_{10}.

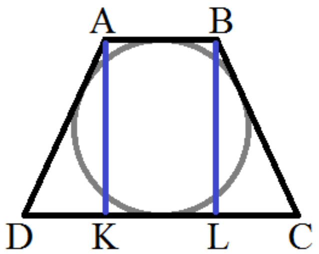
פתרון. קל לראות כי $a_2 = 99999(99999+2) = 99999 \cdot 100001 = 9999999999$.
בכללי, אם מספר a שמורכב מ- k תשיעיות ברישום, אז $a = 10^k - 1$, ואז

$$(10^k - 1)(10^k + 1) = 10^{2k} - 1$$

כלומר המספר $a(a+2)$ מורכב מכמות כפולה של תשיעיות.

בשביל להגיע מ- a_1 ל- a_{10} צריך לעשות 9 צעדים מסוג זה, וזה אומר שכמות התשיעיות תהפוך מ-5 ל- $2560 = 2^8 \cdot 10 = 2^9 \cdot 5$. סכום הספרות של המספר שמורכב מ-2560 תשיעיות הוא $2560 \cdot 9 = 25600 - 2560 = 23040$.

2. בטרפז שווה שוקיים שאורכי הבסיסים שלו הם 8 ו-18 חסום מעגל שרדיוסו R. מצאו את R.



פתרון. נגיד שהטרפז הוא ABCD, כאשר AB זה הבסיס הקצר. עקבי האנכים מ-A ומ-B לבסיס הארוך יסומנו K ו-L

בהתאמה. אורך הקטע CD הוא 18, נקודות K ו-L מחלקות את הקטע ל-3 חלקים שהאמצעי הוא באורך 8 והצדדיים הם באורך 5, כלומר $\mathrm{DK} = \mathrm{LC} = 5$.

הטרפז ABCD הוא מרובע חוסם, לכן סכום של כל שתי צלעות נגדיות הוא אותו הדבר. סכום הבסיסים הוא 26, לכן כך גם סכום השוקיים. לכן כל שוק הוא 13.

משולש KAD הוא משולש ישר זווית, יתר באורך 13 וניצב DK באורך 5, לכן לפי משפט פיתגורס $\mathrm{AK} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. אבל זה בדיוק המרחק בין הבסיסים, שזה שווה ל- 2R ולכן $\mathrm{R} = 6$.

3. למערכת המשוואות $\begin{cases} y^2 = 390 \cdot x^3 + x^2 \\ 2x^2 + y = 2xy + x \end{cases}$ יש מספר פתרונות (x, y).

מצאו את הערך הגדול ביותר האפשרי של y.

פתרון. נתחיל מהמשוואה השנייה. $2x^2 - 2xy = x - y$

$$2x(x-y) = x - y$$

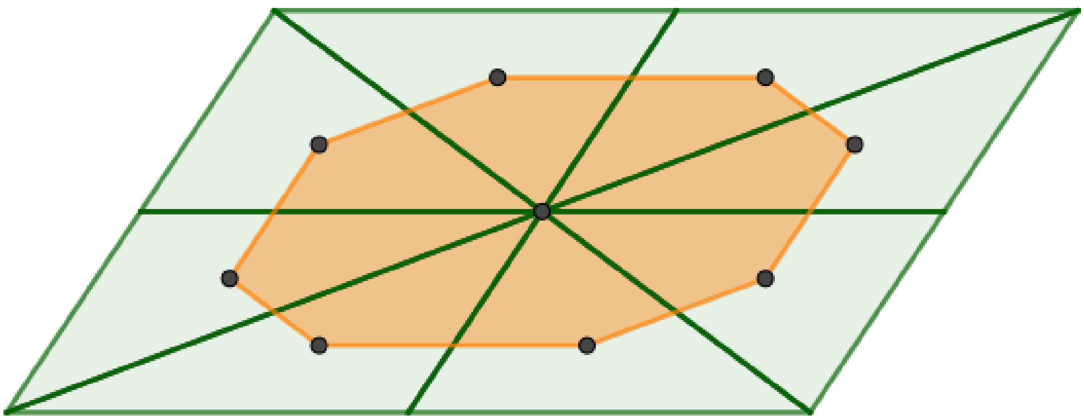
זה אומר אחד משני דברים או ש- $x = y$, או שאפשר לחלק את שני האגפים ב- $x - y$ ולהסיק ש- $2x = 1$.

במקרה הראשון של $x = y$ נקבל נקבל מהמשוואה הראשונה $x^2 = 390 \cdot x^3 + x^2$, ואז $0 = 390 \cdot x^3$ כלומר $x = 0$, ולכן גם $y = 0$.

במקרה השני $x = \frac{1}{2}$. ואז $y^2 = \frac{390}{8} + \frac{1}{4} = \frac{195}{4} + \frac{1}{4} = \frac{196}{4} = 49$. במקרה זה $y = \pm 7$.

מבין כל האפשרויות $y = 7$ נותן את הערך הגדול ביותר.

4. נתונה מקבילית ששטחה 900. במקבילית העבירו את שני האלכסונים, והעבירו קטעים שמחברים את אמצעי הצלעות הנגדיות; כך חולקה המקבילית ל-8 משולשים. בכל אחד מבין 8 המשולשים סימנו את נקודת מפגש התיכונים שלו. חברו את 8 הנקודות שהתקבלו ונוצר מתומן כתום, כמו בציור. מצאו את שטחו של המתומן הכתום.

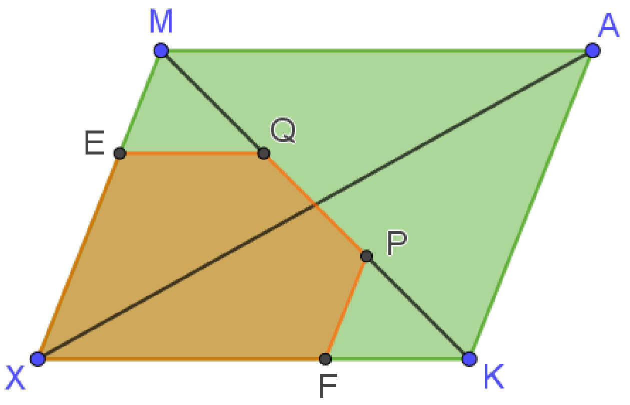


פתרון. נגיד שהמקבילית היא ABCD. אמצעי הצלעות AB, BC, CD, DA הן נקודות M, I, N, K בהתאמה. הקטעים AC, BD, MN, IK נפגשים בנקודה X.

נקודות מפגש התיכונים של המשולשים XMA ו-XMB הם Q ו-S. התיכונים מנקודה X במשולשים האלה הם XU ו-XV. כידוע נקודת מפגש התיכונים מחלקת את התיכון ביחס 2 ל-1, לכן נקודות Q ו-S מחלקות את XU ואת XV באותו היחס. לכן הקטע QS מקביל ל-UV, כלומר לצלע AB של המקבילית.

עכשיו אנחנו נעבור לדיון על המקבילית KAMX, ונשאל איזה נתח ממנה משתייך למתומן. ההוכחה תהיה רלוונטית גם למקביליות MBIX, ICNX, ו-NDKX, וזה יהיה אותו אחוז בכל אחה הרבעים, לכן גם בסה"כ יהי אותו יחס.

כבר אמרנו ש-Q מסמנת את נקודת מפגש התיכונים של AMX, ונסמן ב-P את נקודות מפגש התיכונים של AKX. הישר דרך Q שמקביל ל-AM פוגש את XM בנקודה E, כבר הוכחנו שעל ההמשך הישר הזה נמצאת הנקודה S, כלומר EQ זה חלק מהצלע של המתומן. הישר דרך P שמקביל ל-XM פוגש את XK בנקודה F, באופן דומה למה שהוכחנו גם הוא חלק מהצלע של המתומן. עלינו למצוא נוסחה ליחס בין המחומש XEQPF למקבילית KAMX; כמו שהסברנו זה יהיה בדיוק כמו היחס בין המתומן למקבילית הגדולה.



האלכסון KM עובר דרך הנקודות P ו-Q, כי הוא תיכון בשני המשולשים. נסמן ב-Y את מפגש האלכסונים של KAMX. נקודת מפגש התיכונים מחלקת את התיכון ביחס של 1:2, ולכן $2YP = PK$ וגם $2YQ = QM$ אבל מסימטריה $YP = YQ$ ולכן הנקודות P ו-Q מחלקות את הקטע KM לשלושה חלקים שווים.

משולש KPF דומה למשולש KMX וצלעותיו קטנות פי 3, לכן השטח של KPF זה תשיעית מהשטח של KMX. באופן דומה גם השטח של המשולש MEQ הוא תשיעית מהשטח של KMX. לכן המחומש XEQPF יחסית לשמשולש KMX זה $\frac{7}{9}$. אבל משולש KMA הוא חצי מהמקבילית KAMX, ולכן שטח המחומש הכתום XEQPF הוא $\frac{7}{18}$ מהמקבילית KAMX.

לכן גם בתמונה הגדולה, המתומן הכתום הוא $\frac{7}{18}$ מהמקבילית הגדולה. שטח המקבילית הגדולה הוא 900, לכן שטח המתומן הוא 350.

5. מספר N נקרא מוצלח אם הוא מתחלק לפחות בחצי מהמספרים מ-1 עד N (כולל). מצאו את הסכום של כל המספרים המוצלחים.

פתרון. בשביל לקבל מחלק של מספר, צריך לחלק אותו במספר שלם, ושהמנה תצא שלמה. אחד המחלקים של N הוא N עצמו. מחלק אחר של N הוא אולי $\frac{N}{2}$ (אם N זוגי). מחלקים אחרים הם לכל היותר $\frac{N}{3}$. לכן כמות המחלקים הכוללת היא לכל היותר $\frac{N}{3}+2$.

זה אומר שאם המספר מוצלח אז $\frac{N}{3}+2 \geq \frac{N}{2}$.

נכפיל ב-6 את שני האגפים: $2N+12 \geq 3N$. לכן $12 \geq N$.

המספרים 11, 7, 5 בוודאות לא מוצלחים כי הם ראשוניים ויש להם רק 2 מחלקים, והרי 2 קטן מחצי שלהם.

כל מספר שלא גדול מ-4 בוודאות מוצלח, כי אפילו אם יש 2 מחלקים זה כבר לפחות חצי מהמספרים, ול-1 רק מחלק אחד אבל גם זה מספיק.

נשארו 5 מספרים חשודים שנצטרך לבדוק: 6, 8, 9, 10, 12.

ל-6 יש 4 מחלקים וזה מספיק. גם ל-8 יש 4 מחלקים וזה מספיק. ל-9 יש 3 מחלקים וזה לא מספיק. ל-10 יש 4 מחלקים וזה לא מספיק. ל-12 יש הרבה מחלקים אז נספור לאט: 1, 2, 3, 4, 6, 12 זה בדיוק 6 מחלקים וזה מספיק.

כלומר, המספרים המוצלחים הם 1,2,3,4,6,8,12. הסכום שלהם הוא

$$1+2+3+4+6+8+12=6+10+20=36\ .$$

6. נתון כי $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=5$ ובנוסף $\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}=6$. חשבו את $\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{c^4}+\frac{c^4}{a^4}$.

פתרון. נעלה את שתי הנוסחאות הנתונות בריבוע

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+2\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}+\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2=25$$

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+2\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)=25$$

באופן דומה:

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)=36$$

לכן

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}=25-2\cdot 6=13$$

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=36-2\cdot 5=26$$

נעשה את הטריק הזה שוב: נעלה את הנוסחה הלפני אחרונה בריבוע:

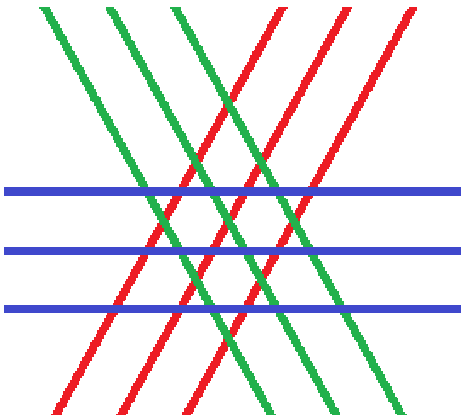
$$\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{c^4}+\frac{c^4}{a^4}+2\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)=\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)^2=169$$

$$\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{c^4}+\frac{c^4}{a^4}=169-2\cdot 26=169-52=117$$

7. במישור העבירו 9 ישרים שונים: 3 ישרים אדומים, 3 ישרים ירוקים, ו-3 ישרים כחולים. הישרים מאותו צבע מקבילים וישרים בצבעים שונים אינם מקבילים. הישרים מחלקים את המישור ל-N חלקים.

א. מהו הערך הגדול ביותר האפשרי של N?

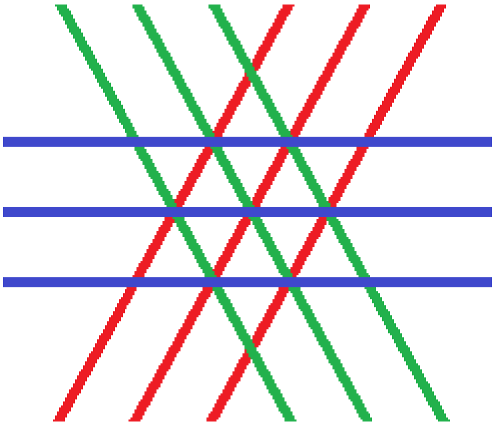
ב. מהו הערך הקטן ביותר האפשרי של N?



פתרון. א. הישרים האדומים מקבילים, ומחלקים את המישור ל-4 חלקים. הישרים הירוקים גם מקבילים, ומחלקים כל אחד מבין החלקים האלה ל-4 חלקים, ועכשיו כבר יש 16 חלקים. נוסיף

עכשיו את הישרים הכחולים. ישר כחול נחתך עם 6 ישרים נוספים: 3 אדומים ו-3 ירוקים. זה יכול ליצור על הישר הכחול לכל היותר 6 נקודות חיתוך (ואולי גם פחות). במקרה שזה בדיוק 6 נקודות חיתוך הישר מתחלק ל-7 קטעים, וכל קטע כזה מחלק תחום לשני תחומים. כלומר כל ישר כחול מוסיף 7 תחומים, לכן נקבל לכל היותר

$16+7+7+7=16+21=37$.



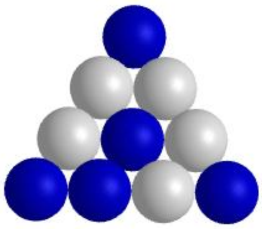
ב. כמו בסעיף הקודם, הישרים האדומים והירוקים מחלקים את המישור ל-16 חלקים, וכל ישר כחול מוסיף עוד מספר חלקים, בהתאם לכמות נקודות החיתוך שלו עם הישרים האחרים. בשביל להגיע לכמות מינימלית של חלקים, צריך שעל כל ישר כחול יהיו כמה שיותר נקודות שבהן עוברים 3 ישרים – ישר מכל צבע.

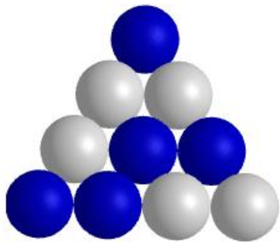
נסובב את התמונה כך, שהישרים הכחולים יהיו אופקיים. אם ישר כחול עובר דרך 3 נקודות חיתוך של ישרים ירוקים ואדומים, אז הישר הירוק הכי ימני חותך את הישר האדום הכי ימני על הישר הזה, וגם הישר הירוק הכי שמאלי חותך את הישר האדום הכי שמאלי על הישר הזה, כלומר הישר הכחול חייב לעבור בשתי נקודות ספציפיות. כלומר יש רק ישר כחול אחד שיש עליו שתי נקודות חיתוך של ישר ירוק וישר אדום. על שני הישרים הכחולים האחרים יכולות להיות לכל היותר 2 נקודות חיתוך של 3 ישרים, לכן יש רק 7 נקודות כאלה לכל היותר. המצב של 7 נקודות כאלה קיים, כמו שרואים בציור.

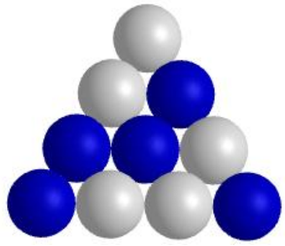
אם היינו מזיזים את נקודות הישרים האחרים בקצת, היינו מקבלים את המצב של סעף א' עם 37 חלקים כמו שכבר חישבנו, אבל ליד כל נקודת חיתוך של 3 ישרים היה נוצר משולש קטן. לכן במצב שלנו יש 7 חלקים פחות, כלומר 30 בסה"כ.

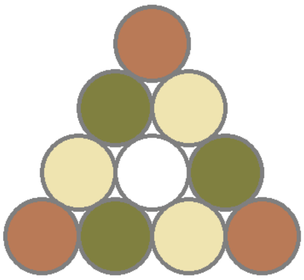
8. לדני יש מלאי בלתי מוגבל של כדורים כחולים ולבנים בגדלים זהים. הוא מדביק כדורים יחד ויוצר מהם משולשים, שכל אחד מורכב מ-10 כדורים, בדיוק 5 כחולים ובדיוק 5 לבנים, ומסודרים כמו באיורים. הוא מכניס את המשולשים לקופסה ונותן לאיילת. בתוך הארגז המשולשים יכולים להסתובב ולהתהפך. דני רוצה ליצור כמות גדולה ביותר של משולשים כאלה כך שאיילת תוכל להבדיל בין כל שניים. כמה משולשים דני יכול להכין?

לדוגמה, במשולשים באיור, איילת לא תוכל להבדיל בין שני המשולשים הימניים, אך כן תוכל להבדיל בינם לבין המשולש השמאלי.





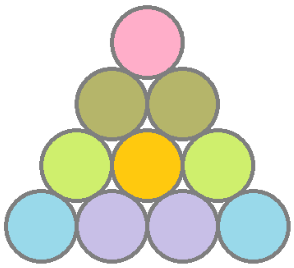




פתרון. נשים לב שאין כזה משולש שהופך לאותו דבר כשמסובבים אותו ב- 120°. אכן אם נסובב את המשולש במקום, אז הכדור המרכזי נשאר במרכז, והכדורים האחרים מתחלקים ל-3 שלישיות, כאשר בכל שלישיה הכדורים עוברים אחד לשני, ולכן אמורים להיות באותו צבע. לכן לפחות שתי שלישיות הן באותו צבע, ולכן, יהיו או לפחות 6 כדורים כחולים או לבנים. לכן כל משולש שמורכב מ-5 כדורים לבנים ו-5 כדורים כחולים, כאשר מסובבים אותו ב- 120° עם כיוון השעון או נגד כיוון השעון מקבלים 3 צביעות שונות.

אם נהפוך את המשולש, נקבל עוד 3 מצבים או אותם שלושה מצבים, זה תלוי בצביעה. נגיד שבארגז של איילת יש X משולשים שמהם אפשר לקבל 6 צביעות ו-Y משולשים שמהם אפשר לקבל 3 צביעות של המשולש. המטרה שלנו היא לחשב את X+Y, אבל אפשר להגיד כי כמות הצביעות זה מצד אחד $6X+3Y$ ומצד שני

$$\binom{10}{5}=\frac{10!}{5!\cdot 5!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=9\cdot 4\cdot 7$$



לכן $6X+3Y=9\cdot 4\cdot 7$, כלומר $2X+Y=3\cdot 4\cdot 7=84$.

בעצם Y קשור למשולשים שלא משתנים כאשר הופכים אותם ביחס לאחד הגבהים. אם רוצים לספור כל משולש כזה פעם אחת, מספיק ליצור מצבים שסימטריים ביחס לאחד הגבהים. ביחס לגובה זה, יש 4 זוגות שצריכים להיות צבועים באותו צבע, ושתי משבצות על הגובה. צריך לבחור בדיוק כדור אחד על הגובה ושני זוגות ולצבוע בכחול, אפשר לעשות זאת ב- $2\cdot 6=12$ דרכים, לכן $Y=12$.

מקודם גילינו ש- $2X+Y=84$, נחבר את שתי המשוואות ונקבל $2(X+Y)=96$.

לכן $X+Y=48$.

9. נתונה תיבה שאורכי המקצועות שלה הם מספרים שלמים. סכום האורכים של כל 12 המקצועות של התיבה ועוד הנפח שלה שווה לשטח פניה. מהו הנפח המרבי של התיבה?

פתרון. אם התיבה $a \times b \times c$ אז הנתון הוא $4a+4b+4c+abc=2ab+2bc+2ca$. במילים אחרות $abc-2ab-2bc-2ca+4a+4b+4c-8=-8$, כלומר

$$(a-2)(b-2)(c-2)=-8$$

כאשר a,b,c שלמים חיוביים, אז $a-2,\ b-2,\ c-2$ גם שלמים, ולפחות -1.

אחד הגורמים שלילי, והוא -1. לא יכול להיות שכל הגורמים -1, לכן אחד מהם חיובי, ולכן שניהם חיוביים. מכפלה של שני הגורמים החיוביים שווה ל-8, לכן הגורמים הם $1\cdot 8$ או $2\cdot 4$.
אם $a-2,\ b-2,\ c-2$ הם $-1,1,8$ באיזשהו סדר, אז a,b,c הם $1,3,10$ באיזשהו סדר ואז הנפח 30.
אם $a-2,\ b-2,\ c-2$ הם $-1,2,4$ באיזשהו סדר, אז a,b,c הם $1,4,6$ באיזשהו סדר ואז הנפח 24.

מבין שתי האפשרויות לנפח, 30 זה מספר יותר גדול.