



אולימפיאדה ארצית במתמטיקה תשפ"ג - שלב א'
תלמידי תיכון – מועד א' 24.10.2022

לפניכם שאלון מתמטי בן עשר שאלות. השאלות אינן שגרתיות, וגם תלמידים חזקים במיוחד יתקשו לפתור את כולן. המצטיינים יוזמנו להשתתף בשלבים נוספים של תחרויות ואימונים, שבסופם תורכב הנבחרת שתניצג את ישראל באולימפיאדת המתמטיקה הבינלאומית - IMO, שתיערך בקיץ 2023 ביפן.

יש להזין את התשובות הסופיות בלבד – אין צורך לנמק. **אין להשתמש במחשבון. משך המבחן: 90 דקות.**

שאלות:

1. נסמן ב-A את סכום המספרים בין 1 ל-1001 שמתחלקים ב-2 ולא ב-3. נסמן ב-B את סכום המספרים בין 1 ל-1001 שמתחלקים ב-3 ולא ב-2. מצאו את $A - B$.

2. המספר 49×16 הוא ריבועי. מצאו את סכום שתי הספרות שהוסתרו.

3. איילת ובני מקבלים דמי כיס לאורך 40 חודשים. בחודש הראשון כל אחד מהם קיבל 20 שקלים. בחלק מהחודשים הבאים, איילת קיבלה ארבעה שקלים יותר מאשר שקיבלה בחודש הקודם, ואילו בני קיבל שקל אחד יותר מאשר שקיבל בחודש הקודם. בשאר החודשים, איילת קיבלה שני שקלים יותר מאשר שקיבלה בחודש הקודם, ואילו בני קיבל שלושה שקלים יותר מאשר שקיבל בחודש הקודם. ידוע שבני הרוויח 2678 שקלים בסך הכול לאורך 40 החודשים. כמה שקלים איילת הרוויחה בסך הכול באותו פרק זמן?

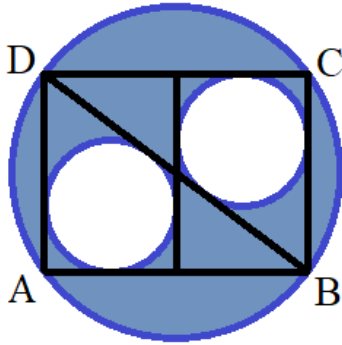
4. מרובע ABCD חסום במעגל שקוטרו באורך 25. ידוע כי

$$AB = 20 \qquad BC = 7 \qquad CD = 24$$

מצאו את האורך של הקטע AD.

5. מספר נקרא חיבורי אם הוא תלת ספרתי, כל ספרותיו שונות זו מזו, וסכום שתיים מספרותיו שווה לספרה השלישית. לדוגמא, המספרים 123 ו-495 הם חיבוריים. מצאו את הסכום של כל המספרים החיבוריים.

6. משבצות הטבלה 3×3 מוספרו בסדר כלשהו על ידי מספרים מ-1 עד 9. נסמן ב-X את סכום המספרים בשורה בה הסכום הוא הכי גדול. נסמן ב-Y את סכום המספרים בעמודה בה הסכום הוא הכי גדול. מצאו את הערך המקסימלי האפשרי ל- $X - Y$.



7. בציור נתונים מלבן ABCD, המעגל החוסם של ABCD, והמעגלים שחסומים במשולשים BAD ו-BCD. נתון כי הקטע שמחבר את האמצעים של AB ושל CD משיק לשני המעגלים הקטנים. נתון שהשטח של כל אחד מהעיגולים הקטנים שווה ל-4. מצאו את השטח הכחול – החלק של העיגול הגדול שלא מכוסה על ידי שני העיגולים הקטנים.

8. שני מספרים חיוביים x, y מקיימים את המשוואה $x^2y - 8xy + 64y^2 + 1 = 0$.

מצאו את $\frac{x}{y}$.

9. בהינתן מספר שהוא לפחות 10, נמחק את ספרת האחדות שלו, ואז נחסיר אותה מהמספר שנשאר. כך למשל, מ-2874 נקבל $287 - 4 = 283$. נחזור על הפעולה הזו עד שנקבל מספר קטן מ-10, שייתכן שיהיה שלילי. כך למשל, מ-283 נקבל 25, והתהליך יסתיים במינוס 3. כמה מספרים תלת ספרתיים יתנו מינוס 1 בסוף התהליך הזה?

10. נתונה קוביה בגודל $6 \times 6 \times 6$. נסתכל על הגוף שמורכב מכל הנקודות בתוך הקוביה שקרובות יותר למרכז הקוביה מאשר לכל אחד מקודקודי הקוביה. מצאו את הנפח של הגוף הזה.

בהצלחה!