מדינת ישראל
משרד החינוך

28.10.2021
כ"ב בחשוון תשפ"ב

<u>פתרונות: אולימפיאדה ארצית במתמטיקה - שלב א'</u>
<u>תלמידי תיכון – מועד א'</u>

1. נתון כי $\frac{4}{9999}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}$. מצאו את x^2.

פתרון.

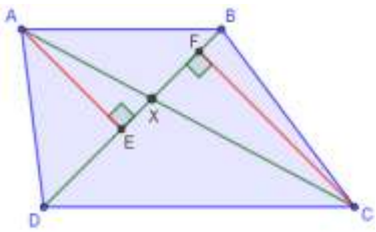
$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}=\frac{2}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+1}=2\cdot\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}=2\cdot\frac{2}{x^4-1}$$

כלומר המשוואה שלנו היא בעצם $\frac{4}{x^4-1}=\frac{4}{9999}$.

במילים אחרות $x^4-1=10^4-1$. כלומר $x^4=10^4$ מכאן $x^2=100$ (זה לא יכול להיות -100 כי ריבוע תמיד חיובי).

2. נתון טרפז ABCD כאשר הבסיסים הם AB ו-CD. נסמן את מפגש אלכסוני הטרפז ב-X. נתון שהשטח של המשולש ABX הוא 18 ושטח המשולש CDX הוא 50. מצאו את שטח הטרפז.



פתרון. משולש ABX דומה למשולש CDX, הרי זוויות מתאימות שוות. מכאן $\frac{BX}{DX}=\frac{AX}{CX}$.

משולש AEX דומה למשולש CFX, הרי הזוויות התואמות שוות, לכן $\frac{AE}{CF}=\frac{AX}{CX}$.

נסמן לשם קיצור $k=\frac{AX}{CX}=\frac{BX}{DX}=\frac{AE}{CF}$ וגם $h=\mathrm{CF}$, $v=\mathrm{DX}$, $u=\mathrm{CX}$ ואז מקבלים גם $k\cdot h=\mathrm{AE}$, $k\cdot v=\mathrm{BX}$, $k\cdot u=\mathrm{AX}$.

האלכסונים מחלקים את הטרפז ל-4 משולשים, ושטחיהם הם

$$S_{\mathrm{BCX}}=\frac{\mathrm{CF}\cdot\mathrm{BX}}{2}=\frac{h\cdot kv}{2}\qquad S_{\mathrm{ABX}}=\frac{\mathrm{AE}\cdot\mathrm{BX}}{2}=\frac{kh\cdot kv}{2}$$

$$S_{\mathrm{DAX}}=\frac{\mathrm{AE}\cdot\mathrm{DX}}{2}=\frac{kh\cdot v}{2}\qquad S_{\mathrm{CDX}}=\frac{\mathrm{CF}\cdot\mathrm{DX}}{2}=\frac{h\cdot v}{2}$$

נתון לנו כי $S_{\mathrm{CDX}}=50$, $S_{\mathrm{ABX}}=18$. מהנוסחאות שרשמנו רואים כי

$$S_{\mathrm{BCX}}=S_{\mathrm{DAX}}=\sqrt{S_{\mathrm{ABX}}\cdot S_{\mathrm{CDX}}}=\sqrt{18\cdot 50}=\sqrt{2\cdot 3^2\cdot 2\cdot 5^2}=2\cdot 3\cdot 5=30$$

לכן שטח הטרפז הוא

$$S_{\mathrm{ABCD}}=S_{\mathrm{ABX}}+S_{\mathrm{BCX}}+S_{\mathrm{CDX}}+S_{\mathrm{DAX}}=18+30+50+30=128$$

3. על דף נייר מסומן מעגל ועליו מודגשות 6 נקודות. יוסי רוצה לסמן את הנקודות ב-6 האותיות A, B, C, D, E ו-F, כך שכל אות תופיע פעם אחת בדיוק, ושהמשולשים ABC ו-DEF לא יחתכו. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

פתרון. השלישייה ABC צריכה ליצור רצף של קודקודים, יש 6 אפשרויות לבחירה של איפה מתחיל רצף זה. כאשר כבר הרצף נבחר, יש $1\cdot 2\cdot 3=6$ דרכים לבחור איזו מבין 3 הנקודות היא A, איזה מהשתיים שנותרו היא B, והנקודה האחרונה היא C, ובאופן דומה יש 6 דרכים לסמן את 3 הנקודות האחרות ב-D, E ו-F, לכן התשובה היא $6\cdot 6\cdot 6=216$
.

4. מתוך 11 אנשים הורכבו מספר ועדות. חלק מהאנשים שקרנים (תמיד משקרים) וכל השאר דוברי אמת. לכל ועדה הרכב שונה, אך אותו בן אדם יכול להשתתף במספר ועדות. בכל ועדה לפחות 2 אנשים.
בכל אחת מהוועדות **כל** משתתף התלונן שלפחות אחד מהאנשים האחרים שנמצאים איתו בוועדה הוא שקרן.
מהו מספר מרבי של ועדות שהיו יכולות להתקיים?

פתרון. נגיד שיש K שקרנים ו- M דוברי אמת. אם בוועדה יש שקרן והוא טוען שיש בוועדה שקרן נוסף, אבל הוא משקר, ולכן הוא השקרן היחיד. בכל ועדה שיש דובר אמת ניתן להסיק ממה שהוא אומר שיש גם שקרן. לכן בכל ועדה יש בהכרח שקרן אחד בדיוק.

מכיוון שבכל ועדה יש לפחות שני אנשים, אז יש שקרן ויש גם דוברי אמת.

לכן בשביל ליצור ועדה צריך לבחור בדיוק אחד מבין K השקרנים, וגם לבחור תת-קבוצה של דוברי אמת שאת זה אפשר לעשות ב-2^M-1 דרכים. אפשר ליצור $K\cdot\left(2^M-1\right)$ ועדות עם הרכב שונה בשיטה כזאת, והועדות האלו יעמדו בכל הדרישות.

אם $K=1$, $M=10$ נקבל $1\cdot\left(2^{10}-1\right)=1023$ ועדות.

אם מגדילים את K ב-1, ומקטינים את M ב-1, אז K יגדל פי 2 לכל היותר (הרי $2K\geq K+1$ לכל מספר טבעי) אבל 2^M-1 יקטן לפחות פי 2, הרי $2^M-1>2\cdot\left(2^{M-1}-1\right)=2^M-2$, כלומר המכפלה תקטן, לכן עבור K גדול יותר נקבל שניתן ליצור פחות ועדות. לכן עבור המספר הקטן ביותר של שקרנים (שזה שקרן אחד) נקבל את המספר הגדול ביותר של ועדות.

5. מצאו את הערך הגדול ביותר האפשרי של $M-N$, בהינתן ש- M ו- N הם מספרים תלת-ספרתיים בעלי סכום ספרות זהה.

פתרון. מכיוון ש- N מספר תלת-ספרתי, אז הוא לפחות 100. לכן אם $M-N$ חיובי, ספרת המאות שלו היא לכל היותר 8, ועל מנת שספרת המאות של ההפרש תהיה 8, ספרת המאות של M צריכה להיות 9 וספרת המאות של N צריכה להיות 1.

אחת הדוגמאות לזה היא $910-109=801$.

אם ספרת העשרות גם של M וגם של N גדולה מ-0, אז ניתן להקטין את שניהם ב-1 וסכום הספרות יהיה זהה עדיין. באופן דומה ניתן להניח כי יש 0 בספרת האחדות של אחד מהמספרים הנתונים. לכן המקרה שמספיק לבדוק אותו זה מקרה שמבין שש הספרות של M ושל N יש יחידה ולפחות שני אפסים, לכן סכום הספרות של שני המספרים הוא לכל היותר $9+9+9+1+0+0=28$. מכיוון שסכום הספרות של M ושל N זהה, כל אחד מהם הוא לכל היותר 14. כמובן גם סכום הספרות הוא לפחות 9 כי הספרה המובילה של M היא 9. אם סכום הספרות בדיוק 9, אז $M=900$ ואז $N\geq108$ ואז $M-N<800$ וזה לא הכי הרבה שיכול להיות. לכן ניתן להניח שסכום הספרות של M הוא לפחות 10 אבל לא יותר מ-14.

בהינתן סכום הספרות, נרצה ש- M יהיה גדול ככל האפשר, וכבר סיכמנו שהספרה המובילה היא 9, אז נרצה להקטין את ספרה האחדות כמה שאפשר ולהגדיל את ספרת העשרות ונקבל מספר ונקבל שספרת האחדות היא 0 וספרת העשרות היא a שאינו עולה על 5.

במספר N נרצה להקטין כמה שאפשר בהינתן סכום הספרות, לכן ספרה המאות תהיה 1 וספרה העשרות גם תהיה קטנה ככל האפשר וזה יגדיל את ספרת האחדות היא 9 וספרת העשרות היא $a-1$.

כמו שכבר אמרנו, ניתן להניח שספרת העשרות של N או של M היא 0, לכן $a-1=0$ ולכן הדוגמה $910-109=801$ שהצגנו קודם היא הדוגמה הכי טובה.

6. המספרים x,y מקיימים מערכת משוואות: $\begin{cases}\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}=3500\\ \sqrt{xy}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=1500\end{cases}$

מצאו את $|x-y|$.

פתרון. על מנת להיפתר מהשורשים נסמן $\sqrt{x}=a$, $\sqrt{y}=b$ ואז הנתונים הם

$$\begin{cases}a^3+b^3=3500\\ ab\cdot(a+b)=1500\end{cases}$$

והמספר שנרצה למצוא הוא $|a^2-b^2|$.

נחבר את למשוואה הראשונה את המשוואה השנייה שמוכפלת ב-3 ונקבל:

$$a^3+3ab\cdot(a+b)+b^3=3500+4500$$
$$(a+b)^3=8000$$

כלומר $a+b=20$. נחלק את המשוואות המקוריות במשוואה זו ונקבל

$$\begin{cases}a^2-ab+b^2=175\\ ab=75\end{cases}$$

נחסיר את שתי המשוואות שקיבלנו ונקבל $(a-b)^2=100$.

לכן $|a-b|=10$. כלומר $|x-y|=|a^2-b^2|=|a-b|\cdot|a+b|=10\cdot 20=200$.

הערה. בעצם אם יש זמן לא מזיק לבדוק ש- a,b כאלה קיימים ומקיימים את המשוואות. במבחן זה מספיק לתת תשובה, אבל במבחן אחר מהסוג שצריך לתת פתרון מלא, אולי הפתרון הנכון זה שאין מספרים כאלה. במקרה שלנו המשוואות סימטריות, אבל אם מתבוננים במקרה בו $a>b$ אז $a-b=10$ ויחד עם המשוואה $a+b=20$, כשלוקחים מחצית סכום של שתי המשוואות האחרונות מקבלים $a=15$, ומכאן $b=5$.

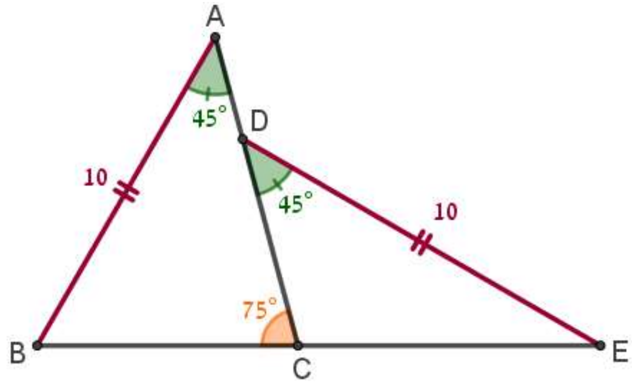
כעת נבדוק שזה מקיים את התנאים:

$$\begin{cases}15^3+5^3=3500\\ 15\cdot 5\cdot(15+5)=1500\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(3^3+1\right)\cdot 5^3=3500\\ 5\cdot 20=100\end{cases}$$

המשוואה השנייה ברורה לגמרי, את הראשונה נצמצם ב-5 ונקבל $28\cdot 5^2=700$ וגם זה נכון.

7. על הקטע BE נמצאת נקודה C. נתונות נקודה A שאינה על הישר BE ונקודה D על הקטע AC. נתון בנוסף כי הזוויות $\angle BAC$ ו- $\angle CDE$ שוות ל- 45°, והזווית $\angle BCA$ שווה ל- 75° מעלות. נתון בנוסף כי $AB=DE=10$. מצאו את סכום שטחי המשולשים ABC ו-CDE.



התמונה היא להמחשה בלבד, לא מומלץ למדוד שטחים לפי התמונה.

פתרון. גם נקודה E וגם נקודה B מתקבלות כאשר מתרחקים מהישר AC במרחק 10 בזווית של 45°, ולכן הן במרחק שווה מהישר AC. לכן הישר AC חוצה את הקטע BE, כלומר $BC=CE$. לכן אם נסובב את המשולש CDE סביב נקודה C ב- 180°, אז CE יודבק ל-BC, ושני המשולשים: ABC והמשולש שמתקבל לאחר סיבוב יודבקו למשולש אחד, שיש לו שתי זוויות של 45° ושתי צלעות באורך 10. משולש כזה הוא בדיוק חצי מריבוע עם צלע 10, ולכן התשובה היא $\frac{10^2}{2}=50$.

8. נתונים שלמים חיוביים a,b,c,n כך ש- n מחלק את ארבעת המספרים

$$ab+a$$
$$bc+b$$
$$ca+c$$
$$(a+6)(b+6)(c+6)$$

מצאו את הערך הגדול ביותר האפשרי עבור n.

פתרון. את 3 המספרים הנתונים נרשום בצורה $a(b+1)$, $b(c+1)$, $c(a+1)$.

המספר n מחלק את $a(b+1)$, לכן ניתן לרשום אותו בתור $n=m\cdot k$, כאשר m מחלק את a, ו-k מחלק את $b+1$. מצד שני n גם מחלק את $b(c+1)$, אבל k זר ל-b לכן k מחלק את $c+1$. בנוסף k מחלק את $c(a+1)$ אבל k זר ל-c ולכן k מחלק את $a+1$ וגם את $b+1$ וגם את $c+1$.

באופן דומה ניתן להגיד שגם m מחלק את $c(a+1)$ אבל הוא זר ל-$a+1$ הרי הוא מחלק את a ולכן m מחלק את c. אבל m מחלק גם את $b(c+1)$ אבל הוא זר ל-$c+1$ לכן הוא מחלק את b.

נסכם: $n=m\cdot k$ כאשר m מחלק את b,a ואת c, יחד עם זאת k מחלק את $a+1,b+1$ ואת $c+1$.

נשים לב כי המחלק המשותף הגדול ביותר של $a+6$ עם $a+1$ הוא מחלק של 5, והמחלק המשותף הגדול ביותר של $a+6$ עם a הוא מחלק של 6, לכן המחלק המשותף הגדול ביותר של k עם $a+6$ הוא לכל היותר 5 והמחלק המשותף הגדול ביותר של m עם $a+6$ הוא 6, ולכן המחלק המשותף המרבי של $n=m\cdot k$ עם $a+6$ הוא לכל היותר 30. דבר דומה ניתן להגיד על $b+6$ ועל $c+6$. לכן המחלק המשותף המרבי של n עם $(a+6)(b+6)(c+6)$ הוא לכל היותר $30^3=27000$, ו-n הוא מחלק של $(a+6)(b+6)(c+6)$ לכן הוא לכל היותר 27000.

כמובן השאלה היא האם אכן אפשר להגיע ל-27000. בשביל שזה יקרה, צריך ש-$a+6$, $b+6$ ו-$c+6$ יתחלקו גם ב-5 וגם ב-6, ואז גם b,a ו-c יתחלקו ב-6 אבל לא ב-5, וגם $a+1$, $b+1$ ו-$c+1$ יתחלקו גם ב-5 אבל לא ב-6. אבל אם מספרים כמו $(a+1)c$ יתחלקו ב-$5^3\cdot 6^3$, חייבים ש-$a+1$ יתחלק לא רק ב-5 אלא ב-5^3, וגם ש-a יתחלק לא רק ב-6 אלא ב-6^3 כלומר המספרים $a+6, b+6, c+6$ צריכים להיות מהצורה $6^3\cdot u+6$ ובו-זמנית מהצורה $5^3\cdot v+5$.

קיום של כאלה מספרים זה מקרה פרטי של משפט השאריות הסיני, אבל אפשר גם לבנות מספרים כאלה במפורש.

בעצם נרצה שהמספרים a,b,c יהיו מהצורה 6^3u אבל גם מהצורה 5^3v-1.

נשים לב כי $6^3=216=5\cdot 43+1$. לכן

$$6^3\cdot 11=(5\cdot 2+1)(5\cdot 43+1)=25\cdot 86+5\cdot 45+1=25(86+9)+1=$$
$$=25\cdot 95+1=125\cdot 19+1$$

לכן $6^3\cdot 11\cdot 124=(125\cdot 19+1)(125-1)=125n-1=5^3n-1$.

לכן אם ניקח $a=b=c=6^3\cdot 11\cdot 124$ נקבל שגם $a+1=b+1=c+1$ מתחלק ב-5^3
ולכן $(a+1)c$ מתחלק ב-27000, כלומר $n=27000$ יכול להיות.

9. ישנה חלקת אדמה בגודל 9×9 המחולקת למשבצות בגודל 1×1. בארבע מן המשבצות, המסודרות בריבוע 2×2, קבורים אוצרות. באפשרותכם לבחור בכל פעם משבצת אחת, ולבדוק האם קבור בה אוצר. מהי כמות הפעולות הקטנה ביותר לה תזדקקו כדי לדעת בוודאות היכן נמצאים כל האוצרות?

(אין צורך לראות את כולם, מספיק לדעת היכן הם נמצאים)

פתרון. נמספר את המשבצות באמצעות זוגות מספרים (i,j) כאשר i מספר עמודה, j מספר שורה, וכל מספר הוא בין 1 ל-9. ישנם 16 מספרים שבהם גם מספר השורה וגם מספר העמודה זוגי, ובאחד מהם בוודאות יש אוצר. אם נחפור בכל 16 משבצות אלה, אז נמצא לפחות משבצת אחת עם אוצר (i,j). בעצם מספיק לחפור ב-15 מהמשבצות, ואז נדע שבמשבצת האחרונה מבין 16 המשבצות הזוגיות יש אוצר.

יש גם אוצר משבצת באותה שורה שהיא מימין או משמאל לאוצר הראשון שמצאנו. אם בודקים את המשבצת מימין, אז נדע איזו משבצת רלוונטית.

יש גם משבצת באותה עמודה כמו האוצר הראשון שמצאנו, מעל או מתחת למשבצת עם האוצר, אם נבדוק את המשבצת שמעל נדע איפה בדיוק.

זו שיטה שמאפשרת לעשות הכול ב-17 בדיקות.

האם יש שיטה יעילה יותר? האוצר השמאלי עליון יכול להיות ב-64 משבצות שונות. אם בודקים משבצת מסוימת ולא מגלים בה אוצר, זה פוסל 4 אפשרויות למיקום האוצרות. לכן אם בדקנו פחות מ-15 משבצות, פסלנו פחות מ-60 אפשרויות, ולכן גם בבדיקה הבאה שבודקת האם האפשרות החדשה היא אחת מבין 4 אפשרויות מסוימות יתכן שהתשובה תהיה שהאוצר לא שם.

גם אחרי שבדקנו 15 אפשרויות וכל פעם לא מצאנו אוצר, זאת אומרת שיש לפחות 4 אפשרויות למיקום האוצר. אם כעת אפילו יורשה לנו לעבור לשאלות כלשהן של כן או לא, לא תספיק לנו שאלה אחת אלא שנצטרך לפחות שתי שאלות נוספות.

10. משולש ABC הוא ישר זווית ושווה שוקיים, הזווית A היא ישרה. בתוך המשולש נבחרה נקודה P עבורה $CP = 7$, $BP = \sqrt{149}$, $AP = \sqrt{50}$. מצאו את AB.

נציג שני פתרונות: פתרון "ראש בקיר" חישובי ופתרון גיאומטרי.

פתרון ראשון. ניתן לבחור מערכת צירים עם צירים לאורך השוקיים של ABC, אז

$$\mathrm{A} = (0,0)\,,\ \mathrm{B} = (a,0)\,,\ \mathrm{C} = (0,a)$$

כאשר a זה אורך השוק שעוד צריך לגלות אותו, והנקודה P היא (x, y). את הנתונים של השאלה נרשום כמערכת משוואות:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50 \\ (x-a)^2 + y^2 = 149 \\ x^2 + (y-a)^2 = 49 \end{cases}$$

נחסיר את המשוואה הראשונה משתי המשוואות האחרות ונקבל

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50 \\ a^2 - 2ax = 99 \\ a^2 - 2ay = -1 \end{cases}$$

משתי המשוואות האחרונות אפשר לבטא את x, y באמצעות a ולקבל

$$x = \frac{1}{2}\left(a - \frac{99}{a}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

ואפשר להציב את הערכים האלה במשוואה הראשונה:

$$\left(\frac{1}{2}\left(a - \frac{99}{a}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right)^2 = 50$$

$$\left(a-\frac{99}{a}\right)^2+\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=200$$

$$2a^2+2\cdot(1-99)+\frac{1}{a^2}\left(99^2+1^2\right)=2\cdot100$$

נשים לב כי $99^2=(100-1)^2=10000-200+1=9801$, ולכן

$$2a^2+2\cdot(-99-99)+\frac{1}{a^2}(9802)=0$$

$$a^2-2\cdot99+\frac{1}{a^2}\cdot4901=0$$

$$a^4-2\cdot99\cdot a^2+4901=0$$

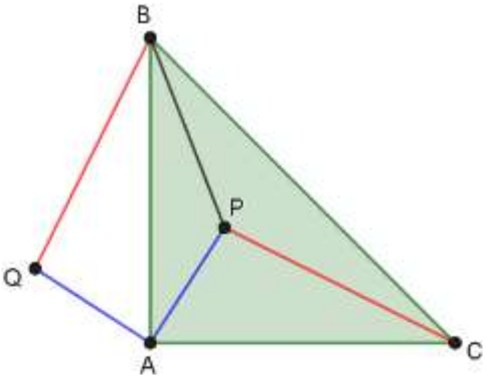
$$\left(a^2-99\right)^2=9801-4901=4900$$

$$a^2-99=\pm70$$

לכן a^2 הוא 29 או 169, כלומר a הוא $\sqrt{29}<6$ או 13.

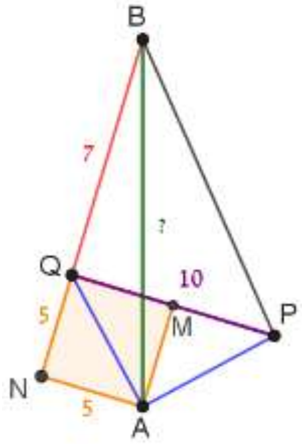
המקרה של $\sqrt{29}$ לא מתאים לנו, כי אז היתר במשולש ABC הוא $\sqrt{58}$ שזה פחות מ-8, אבל בתוך משולש זה מוכל קטע באורך $\sqrt{149}$ שזה מעל 12. לכן המקרה הרלוונטי הוא $a=13$.

פתרון שני. סיבוב ב- 90° סביב A מעביר את C ל-B ואת P לנקודה נוספת Q. לפי נתון $\text{CP}=7$, $\text{BP}=\sqrt{149}$, $\text{AP}=\sqrt{50}$,
לכן גם $\text{BQ}=7$, $\text{AQ}=\sqrt{50}$.
המשולש PAQ ישר זווית, לכן לפי משפט פיתגורס $\text{PQ}=\sqrt{50+50}=10$.



מדינת ישראל
משרד החינוך

28.10.2021
כ"ב בחשוון תשפ"ב



במשולש BPQ מתקיים $BP^2 = 149 = 100 + 49 = PQ^2 + BQ^2$,
לכן גם הוא משולש ישר זווית עם זווית ישרה ב-Q. לכן ציור מדויק יותר ללא נקודה C נראה כך:

בציור הזווית PQB ישרה, ומשולש PAQ הוא ישר זווית ושווה שוקיים שהיתר שלו $PQ = 10$. נוספה גם נקודה M באמצע של PQ, והמרחק ממנה לנקודות P, Q ו-A הוא 5, ונקודה N כך ש-QMAN הוא ריבוע וצלע הריבוע שווה ל-5. אז B, Q ו-N על ישר אחד ולכן $BN = 12$, והמשולש BAN הוא ישר זווית, לכן ניתן לחשב את AB לפי משפט פיתגורס:

$$AB^2 = BN^2 + AN^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$$

לכן $AB = 13$.