

19.11.2020
ג' בכסלו תשפ"א



מדינת ישראל
משרד החינוך

אולימפיאדה ארצית במתמטיקה - שלב א'

תלמידי תיכון – מועד א'

לפניכם שאלון מתמטי בן תשע שאלות. השאלות אינן שגרתיות, וגם תלמידים חזקים במיוחד יתקשו לפתור את כולן. המצטיינים יוזמנו להשתתף בשלבים נוספים של תחרויות ואימונים, שבסופם תורכב הנבחרת שתייצג את ישראל באולימפיאדת המתמטיקה הבינלאומית - IMO, שתיערך בקיץ 2021.

יש להזין את התשובות הסופיות בלבד – אין צורך לנמק. אין להשתמש במחשבון. משך המבחן: 90 דקות.

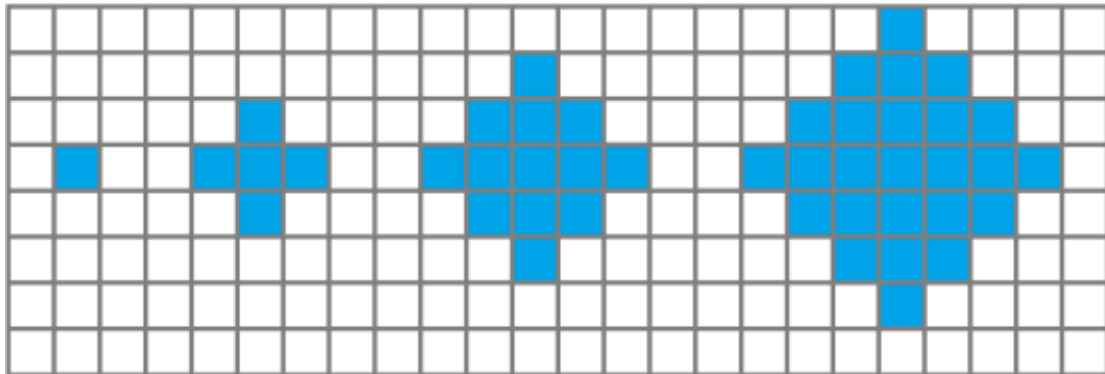
שאלות:

1. معطى عدنان حقيقتان a, b بحيث ان: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 24$, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 18$. احسبوا $a^2 + b^2$.

2. اقطار الشكل الرباعي ABCD متعامدان, $AC=14$, $BD=48$. منتصف الاضلاع AB و CD هما M و N. - احسبوا طول MN.

3. نعرف سلسلة عدد المربعات في معين, كما في الرسم :

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 5 \quad a_3 = 13 \quad a_4 = 25$$



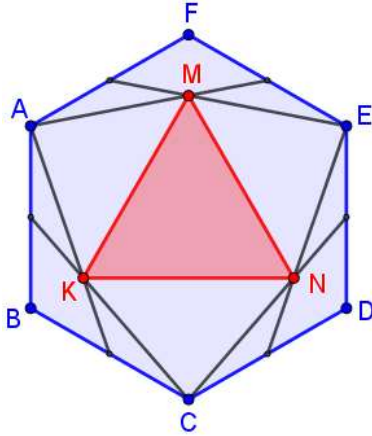
احسبوا: $a_{12} - a_{11} + a_{10} - a_9 + a_8 - a_7 + a_6 - a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1$.

4. على المستوى رسموا 10 دوائر مركزها A و 10 دوائر مركزها B. الدوائر الـ 20 تقسم المستوى الى N اقسام. ما هي اكبر قيمة ممكنة ل N?



מדינת ישראל
משרד החינוך

19.11.2020
ג' בכסלו תשפ"א



5. معطى سدس منتظم $ABCDEF$ مساحته 270. المستقيم الذي يمر بمنتصف الضلع FA وب E , والمستقيم الذي يمر بمنتصف الضلع EF وب A , يتقاطعان بالنقطة M . المستقيم الذي يمر بمنتصف الضلع DE وب C , والمستقيم الذي يمر بمنتصف الضلع CD وب E , يتقاطعان بالنقطة N . المستقيم الذي يمر بمنتصف الضلع BC وب A , والمستقيم الذي يمر بمنتصف الضلع AB , وب C , يتقاطعان بالنقطة K . احسوا مساحة المثلث MNK .

6. عددان صحيحان موجبان a, b يحققان

$$a^2 + b^2 + a^2b^2 = 10003. \text{ احسوا } a \cdot b.$$

7. بمضلع محدب مبني من N اضلاع, قيمة كل الزوايا اعداد صحيحة بالدرجات, ولكل زاويتان قيمة مختلفة. ما هي اكبر قيمة ممكنة ل N ?

8. بورقة مربعات, مربعان مختلفان هما متجاوران اذا كان لهم ضلع او رأس مشترك. بمستطيل مركب من S مربعات لونوا 6 مربعات بحيث ان هنالك مربع ملون واحد بالضبط مجاور لمربع ملون واحد بالضبط, مربعان ملونان اثنان بالضبط كل منهم مجاور لمربعان ملونان بالضبط, وبالضبط 3 مربعات ملونة كل منهم مجاور ل 3 مربعات ملونة بالضبط. ما هي اصغر قيمة ممكنة ل S ?

9. جدوا اصغر N صحيح موجب بحيث ان $N^3 - N$ يقسم على 7000 ولا يقسم على 9000.

بالنجاح!