

19.11.2020
ג' בכסלו תשפ"א



אולימפיאדה ארצית במתמטיקה - שלב א'

תלמידי תיכון – מועד א'

לפניכם שאלון מתמטי בן תשע שאלות. השאלות אינן שגרתיות, וגם תלמידים חזקים במיוחד יתקשו לפתור את כולן. המצטיינים יוזמנו להשתתף בשלבים נוספים של תחרויות ואימונים, שבסופם תורכב הנבחרת שתייצג את ישראל באולימפיאדת המתמטיקה הבינלאומית - IMO, שתיערך בקיץ 2021.

יש להזין את התשובות הסופיות בלבד – אין צורך לנמק.
אין להשתמש במחשבון. משך המבחן: 90 דקות.

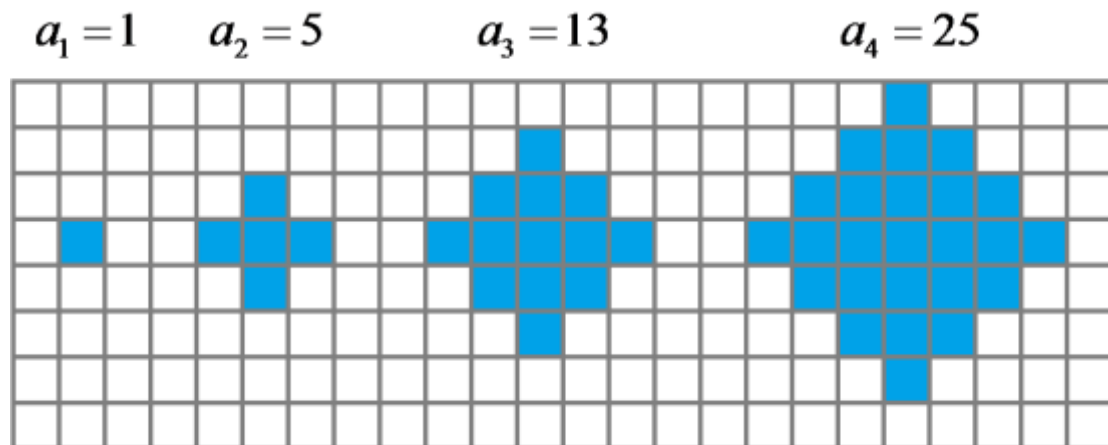
שאלות:

1. נתונים 2 מספרים ממשיים a, b המקיימים: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 24$, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 18$.

חשבו את $a^2 + b^2$.

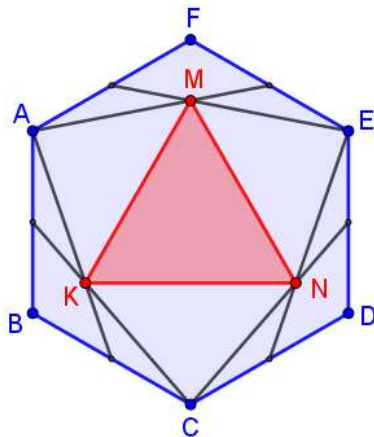
2. אלכסוני המרובע ABCD מאונכים, $AC = 14$, $BD = 48$. נקודות האמצע של AB ושל CD הן M ו-N. חשבו את האורך של MN.

3. נגדיר את סדרת כמות המשבצות ביהלום של משבצות, כמו בציור



חשבו את $a_{12} - a_{11} + a_{10} - a_9 + a_8 - a_7 + a_6 - a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1$.

4. במישור ציירו 10 מעגלים שמרכזם הוא A ו-10 מעגלים שמרכזם הוא B. עשרים המעגלים מחלקים את המישור ל-N חלקים. מהו ה-N הגדול ביותר האפשרי?



5. נתון משושה משוכלל ABCDEF ששטחו 270.

הישר שעובר דרך אמצע FA ודרך E, והישר שעובר דרך אמצע EF ודרך A, נפגשים בנקודה M. הישר שעובר דרך אמצע DE ודרך C, והישר שעובר דרך אמצע CD ודרך E, נפגשים בנקודה N. הישר שעובר דרך אמצע BC ודרך A, והישר שעובר דרך אמצע AB ודרך C, נפגשים בנקודה K. מצאו את שטח המשולש MNK.

6. מספרים שלמים חיוביים a, b מקיימים $a^2 + b^2 + a^2b^2 = 10003$. מצאו את $a \cdot b$.

7. במצולע קמור בעל N צלעות גדלי כל הזוויות הם מספרים שלמים במעלות, וכל שתי זוויות שונות זו מזו. מהו הערך הגדול ביותר האפשרי של N?

8. בדף משבצות, שתי משבצות שונות תקראנה סמוכות אם יש להן קודקוד או צלע משותפים. במלבן שמורכב מ-S משבצות נצבעו 6 משבצות כך שיש בדיוק משבצת צבועה אחת סמוכה לבדיוק משבצת צבועה אחת, בדיוק שתי משבצות צבועות שכל אחת מהן סמוכה לבדיוק שתי משבצות צבועות, ובדיוק שלוש משבצות צבועות שכל אחת מהן סמוכה לבדיוק שלוש משבצות צבועות. מהו הערך הקטן ביותר האפשרי של S?

9. מצאו את N השלם החיובי הקטן ביותר עבורו $N^3 - N$ מתחלק ב-7000 אך לא ב-9000.

בהצלחה!