אולימפיאדה למתמטיקה תשפ"א

שלב א' – מועד א'

פתרונות

1. נתונים 2 מספרים ממשיים a,b המקיימים: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=24$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=18$.

חשבו את a^2+b^2.

פתרון. נעשה מכנה משותף בכל ביטוי: $\frac{a^2+b^2}{ab}=24$, וכן $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=18$.

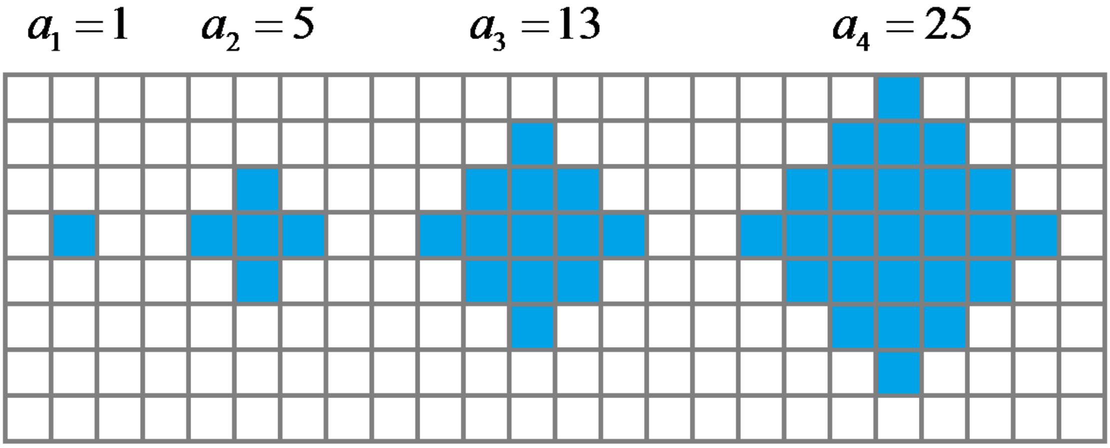
נסמן $q=a^2+b^2$, $p=ab$. אז $\frac{q}{p}=24$, $\frac{q}{p^2}=18$, וצריך למצוא את q. אם נעלה את המשוואה הראשונה בריבוע ונחלק בשנייה נקבל $q=\frac{24^2}{18}=\frac{6^2\cdot 4^2}{6\cdot 3}=2\cdot 16=32$.

2. אלכסוני המרובע ABCD מאונכים, AC = 14, BD = 48. נקודות האמצע של AB ושל CD הן M ו-N. חשבו את האורך של MN.

פתרון. נסמן גם את האמצע של BC ב-K. אז MK מקביל ושווה לחצי של AC הרי זה קטע אמצעים במשולש ABC. באופן דומה, NK מקביל ושווה לחצי של BD הרי זה קטע אמצעים במשולש BCD. ובכן $MK=7$, $NK=24$. היות ש-MK ו-NK מקבילים לאלכסוני המרובע AC ו-BD שמאונכים זה לזה, אז גם MK מאונך ל-NK.

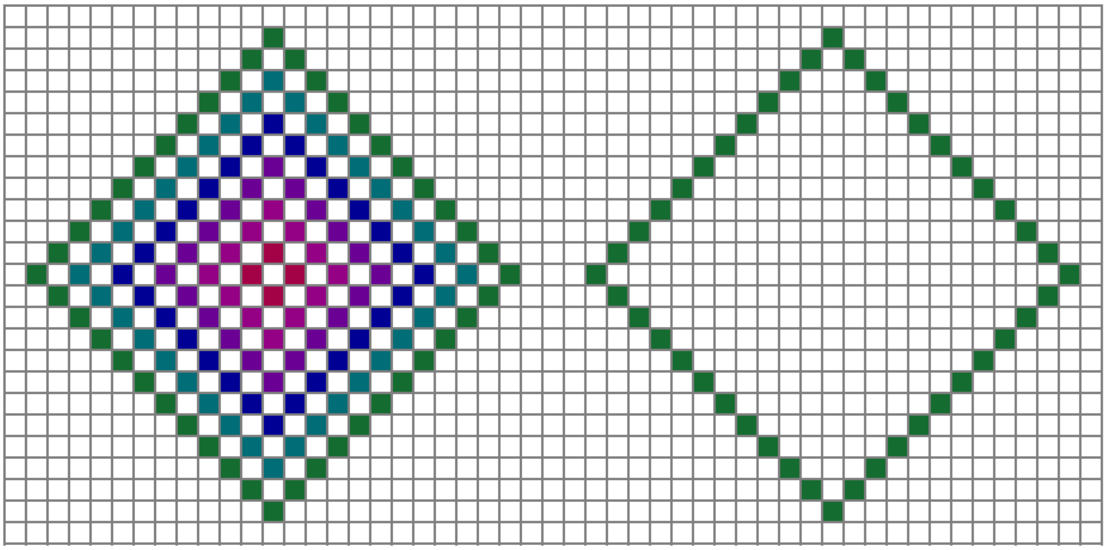
ובכן, המשולש MNK הוא משולש ישר זווית אורכי הניצבים שלו 7 ו-24, והיתר לפי משפט פיתגורס מקיים $MN^2=24^2+7^2=24^2+2\cdot 24+1=(24+1)^2=25^2$, כלומר $MN=25$.

3. נגדיר את סדרת כמות המשבצות ביהלום של משבצות, כמו בציור



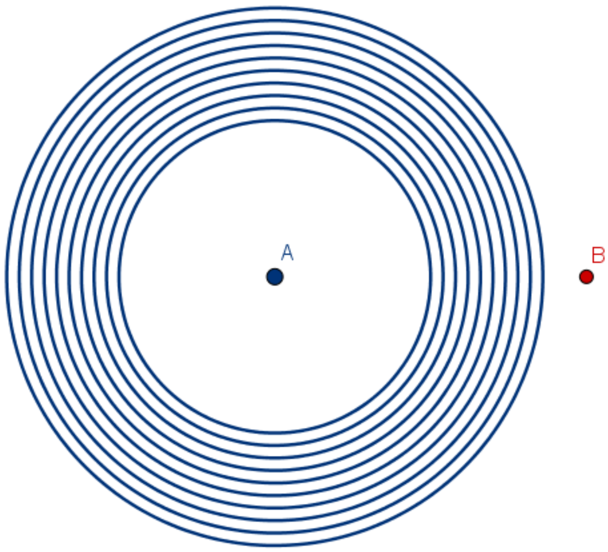
חשבו את $a_{12}-a_{11}+a_{10}-a_9+a_8-a_7+a_6-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1$.

פתרון. ההפרש בין $a_{2n}-a_{2n-1}$ זה כמות המשבצות במסגרת של ריבוע (ציור ימני).



כשנחבר 6 מסגרות כאלה בגדלים 12, 10, 8, 6, 4, 2 (ציור שמאלי) מקבל משבצות שנמצאות על 12 אלכסונים בכיוון אחד ו-12 אלכסונים בכיוון אחר, וזה $12^2=144$ משבצות.

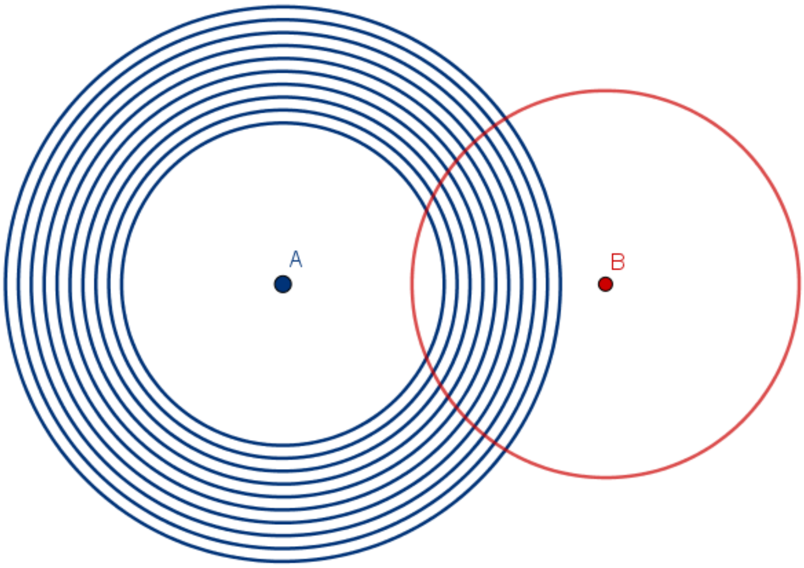
4. במישור ציירו 10 מעגלים שמרכזם הוא A ו-10 מעגלים שמרכזם הוא B. עשרים המעגלים מחלקים את המישור ל-N חלקים. מהו ה-N הגדול ביותר האפשרי?



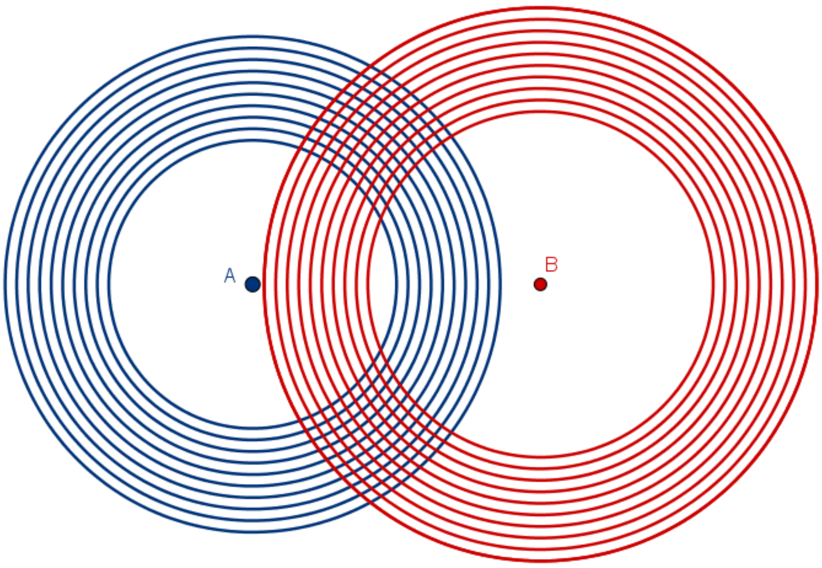
פתרון. נתחיל מלצייר 10 מעגלים עם מרכז ב-A. זה יחלק את המישור ל-11 חלקים בדיוק (לכל נקודה אפשר לשאול כמה מעגלים מפרידים בינה לבין A, וזה מספר בין 0 ל-10): יש עיגול פנימי, 9 טבעות והחלק החיצוני.

בשביל ההמשך נשתמש בעובדה ידועה: שני מעגלים יכולים להיחתך בשתי נקודות לכל היותר. לכן כל מעגל עם מרכז ב-B יכול לחתוך את המעגלים עם מרכז ב-A רק ב-20 נקודות בסה"כ. כל קשת כזאת יכולה לפרק חלק מסוים לשני חלקים לכל היותר, לכן כל פעם שמוסיפים מעגל עם מרכז ב-B זה יכול להוסיף 20 חלקים לכל היותר.

בעצם מה שאנחנו אומרים יכול לתת תשובה מדויקת בפנים אבל לא על טבעות. מעגל עם מרכז ב-B יכול לחתוך את העיגול הקטן ביותר עם מרכז ב-A או את האזור מחוץ לעיגול הגדול שמרכזו ב-A באמצעות קשת אחת, ויכול לחתוך כל טבעת בין שני עיגולים סמוכים שמרכזם ב-A על ידי קשת אחת או שתי קשתות. אם זה שתי קשתות, אז בטבעת נוצרים שני חלקים חדשים חוץ מאשר בפעם הראשונה שזה קורה בטבעת זאת, ואם זה קשת אחת אז כמובן כמות החלקים בטבעת גודלת ב-1.

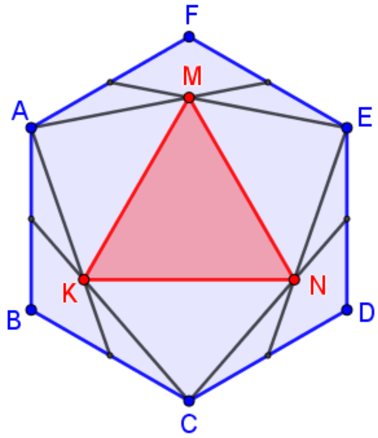


לכן אם בשם נוחות של חשבון נגיד, שכל פעם כשמוסיפים מעגל עם מרכז ב-B זה מגדיל את כמות החלקים ב-20 וכאשר מוסיפים 10 מעגלים אז כמות החלקים עלתה ב-200, אז בחשבון הזה יהיו 9 מעגלים יותר מאשר הכי הרבה שיכול להיות. כלומר לא יכול להיות שיש יותר מאשר $11+200-9=202$.



לא קשה להראות שקיימת דוגמה שבה כל מעגל עם מרכז ב-B חותך כל מעגל עם מרכז ב-A פעמיים ואז האי-שוויון הופך לשוויון, למשל הדוגמה בציור.

5. נתון משושה משוכלל ABCDEF ששטחו 270.



הישר שעובר דרך אמצע FA ודרך E, והישר שעובר דרך אמצע EF ודרך A, נפגשים בנקודה M.
הישר שעובר דרך אמצע DE ודרך C, והישר שעובר דרך אמצע CD ודרך E, נפגשים בנקודה N.
הישר שעובר דרך אמצע BC ודרך A, והישר שעובר דרך אמצע AB ודרך C, נפגשים בנקודה K.
מצאו את שטח המשולש MNK.

פתרון. נסמן ב-I את האמצע של AB, וב-J את האמצע של DE. תיכונים גם במשולש ABC וגם במשולש CDE (וגם בכל משולש אחר) מתחלקים ביחס 2:1. לכן $\frac{CK}{CI}=\frac{CN}{CJ}=\frac{2}{3}$. לכן המשולשים CNK ו-CJI דומים (הרי גם הזווית C משותפת), והיחס בין הגדלים הוא 2:3. אבל גם $IJ=BD$ הרי BIJD מלבן ולכן $NK=\frac{2}{3}BD$.

המשולש MNK הוא משולש משוכלל שצלעות שלו הן $\frac{2}{3}$ מהצלעות של המשולש המשוכלל BDF, לכן השטח של MNK זה $\frac{4}{9}$ מהשטח של BDF.

יהא X המרכז של המשושה. הישרים BX, DX, FX מחלקים את המשושה ל-3 מעוינים, והצלעות של BDF מחלקות אותם לחצאים; לכן BDF זה חצי מהמשושה ABCDEF. אבל MNK זה $\frac{4}{9}$ מהשטח BDF, לכן זה $\frac{2}{9}$ מהשטח של MNK. מכיוון שטח המשושה הוא 270, אז MNK זה $\frac{2}{9}$ מזה כלומר 60.

6. מספרים שלמים חיוביים a,b מקיימים $a^2+b^2+a^2b^2=10003$. מצאו את $a\cdot b$.

פתרון. באופן שקול: $1+a^2+b^2+a^2b^2=10004$

כלומר: $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)=10004$

$$10004=10404-400=102^2-20^2=(102+20)(102-20)=$$
$$=122\cdot 82=(121+1)(81+1)=\left(11^2+1\right)\left(9^2+1\right)$$

לכן תשובה אפשרית מתקבלת כאשר a ו-b הם 9 ו-11 באיזשהו סדר, ואז $a\cdot b$ שווה ל-99. מסתבר שאין שום אפשרות אחרת. אכן אם נפרק את המספר לגורמים עד הסוף נקבל

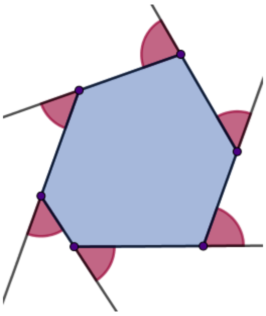
$$10004=122\cdot 82=61\cdot 41\cdot 2\cdot 2$$

כאשר 2, 41 ו-61 הם מספרים ראשוניים. 41 ו-61 הם לא מהצורה x^2+1. את 2 אפשר להציג בצורה 1^2+1, אבל את $2\cdot 41\cdot 61=2\cdot 2501=5002$ לא, הרי 5001 לא ריבוע, היות ו-$70^2=4900$, והריבוע הבא הוא $71^2=5041$.

לכן אין דרך להציג את 10004 כמכפלה $\left(1+b^2\right)\left(1+a^2\right)$ כאשר אחד הגורמים הוא ראשוני. אם כל גורם הוא מכפלה של שני ראשוניים, אז במקרה שכל גורם מתחלק ב-2 זה עובד וזו התשובה שמצאנו, והמקרה האחר זה כאשר גורם אחד הוא 4 והשני הוא $41\cdot 61$ אבל 4 זה לא x^2+1 כי 3 לא ריבוע.

מקרה אחרון זה שגורם אחת הוא 1 והשני הוא 10004 אבל אף אחד מהם הוא לא מהצורה x^2+1 כאשר x חיובי שלם.

7. במצולע קמור בעל N צלעות גדלי כל הזוויות הם מספרים שלמים במעלות, וכל שתי זוויות **שונות זו מזו**. מהו הערך הגדול ביותר האפשרי של N?



פתרון. נשתמש במשפט: סכום הזוויות החיצוניות של מצולע שווה ל- 360°. הכי קל להבין את זה, כאשר עושים טיול על היקף המצולע ומבצעים מספר סיבובים בקודקודים, אבל סכום זוויות הסיבוב שווה ל- 360°.

אם זוויות פנימיות שלמות במעלות ושוות, אז כך גם זוויות חיצוניות. סכום של N מספרים שלמים שונים שלא מכיל אותו מספר פעמים הוא לפחות $1+2+...+\mathrm{N}=\dfrac{\mathrm{N}\left(\mathrm{N}+1\right)}{2}$,

כלומר אם $\mathrm{N}=27$ אז הסכום הוא לפחות

$$1+2+...+27=\frac{27\cdot 28}{2}=27\cdot 14=270+108=378>360$$

לכן 28 זוויות זה יותר מדי. אבל $1+2+...+26=378-27=351$,

לכן $1+2+...+24+25+35=360$, כלומר סביר שיהיו 26 קודקודים.

כמובן אפשר לשאול, האם קיים מצולע שזוויותיו החיצוניות הם $1^\circ,2^\circ,...,24^\circ,25^\circ,35^\circ$ או במילים אחרות שזוויותיו הן $179^\circ,178^\circ,...,156^\circ,155^\circ,145^\circ$.

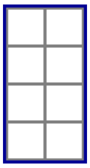
מצולע כזה אכן קיים, ואפשר לבנות אותו כך: מתחילים בנקודה אקראית בציר ה-x והולכים ימינה מרחק 10, פונים במעלה אחת נגד כיוון וממשיכים ללכת מרחק 10, אחר כך פונים ב- 2° נגד כיוון השעון מרחק 10, אחר כך פונים ב- 3° נגד כיוון השעון מרחק 10, ... , אחרי 18 פניות כבר מגלים שהכיוון השתנה, ביחס לכיוון המקורי, ב- $9\cdot 19^\circ=171^\circ$ כלומר אנחנו עדיין מתרחקים מציר ה-x אבל הולכים בכיוון ההפוך לכיוון שהתחלנו ממנו, אז עכשיו הולכים מרחק 1000000 בכיוון הזה ואז פונים ב- 19°, ממשיכים מרחק 1 ופונים ב- 20° ממשיכים מרחק 1 ופונים ב- 21°, ... , ממשיכים מרחק 1 ופונים ב- 25°, ואז ממשיכים עד ציר ה-x, ושם פונים ב- 35°, עד שחוזרים לנקודת ההתחלה.

8. בדף משבצות, שתי משבצות שונות תקראנה סמוכות אם יש להן קודקוד או צלע משותפים. במלבן שמורכב מ-S משבצות נצבעו 6 משבצות כך שיש בדיוק משבצת צבועה אחת שסמוכה לבדיוק משבצת צבועה אחת, בדיוק שתי משבצות צבועות שכל אחת מהן סמוכה לבדיוק שתי משבצות צבועות, ובדיוק שלוש משבצות צבועות שכל אחת מהן סמוכה לבדיוק שלוש משבצות צבועות. מהו הערך הקטן ביותר האפשרי של S?

פתרון. מכיוון שיש 6 משבצות צבועות, אז S גדול או שווה ל-6.

לא יתכן שיש שורה אחת או עמודה אחת בלבד, מכיוון שאז בסמוך לכל משבצת יש לכל היותר שתי משבצות צבועות, אז אם $S=6$ אז מדובר על מלבן 2×3 וצריך לצבוע בו את כל המשבצות.

גם $S=7$ או כל ראשוני אחר לא מתאים, כי אז יש רק שורה אחת או עמודה אחת.



נבדוק את המקרה של $S=8$. מקרה של 1×8 לא יתכן, אז המלבן הוא 2×4. הוא מורכב משני ריבועים 2×2. באחד מהם יש משבצת מסומנת שסמוכה למשבצת מסומנת אחת בלבד, לכן בריבוע 2×2 זה יש לכל היותר עוד משבצת מסומנת אחת. לכן 4 משבצות מסומנות נוספות צריכות להיות בתוך ריבוע 2×2 האחר. משבצות אלו כולן סמוכות זו לזו, לכן יש לכל אחת מהן לפחות 3 משבצות סמוכות, אבל זה כבר 4 משבצות כאלה ונתון שיש רק 3. אז גם $S=8$ לא עובד.

נבדוק $S=9$. המשבצת המרכזית לא מסומנת, כי אז היא סמוכה לכל 5 המשבצות המסומנות האחרות. לכן כל משבצת פינתית יכולה להיות סמוכה רק ל-2 משבצות. צריכות להיות 3 משבצות מסומנות שסמוכות ל-3 משבצות מסומנות אחרות, אלה צריכות להיות משבצות שסמוכות לאמצעים של 3 צלעות. בגלל סימטריה אפשר להניח ללא הגבלת הכלליות שאלו 3 משבצות חוץ מהאמצע של השורה הראשונה. המשבצת המסומנת שסמוכה רק למשבצת מסומנת אחת חייבת להיות פינה בשורה הראשונה (כי כל שאר המשבצות סמוכות ללפחות 2 משבצות שכבר סימנו), לה"כ הפינה הימנית העליונה, ולכן המשבצת האמצעית בשורה הראשונה ריקה

ליד המשבצת האמצעית בעמודה השמאלית ובעמודה הימנית רצינו שיהיו 3 משבצות מסומנות, זה כבר מחייב אותנו לסמן 7 משבצות בסה"כ וזה יותר מדי. לכן, $S>9$.

המקרה של $S=10$ יתכן, כמו שרואים בציור.

9. מצאו את N השלם החיובי הקטן ביותר עבורו N^3-N מתחלק ב-7000 אך לא ב-9000.

פתרון. ניתן לראות כי $N^3-N=(N-1)\cdot N\cdot(N+1)$. אם מכפלה של 3 גורמים רצופים מתחלקת ב-$7000=7\cdot 2^3\cdot 5^3$, אז אחד הגורמים מתחלק ב-7, ואחד הגורמים מתחלק ב-5 ואפילו ב-$125=5^3$, הרי לא יתכן ששני גורמים יתחלקו ב-5. חשוב גם שהמכפלה תתחלק ב-8 אבל לא ב-9; בהכרח יש גורם אחד בדיוק שמתחלק ב-3 אבל אסור שיתחלק גם ב-9. יש מעט מספרים שמתחלקים ב-125, אז נתחיל לעבור עליהם לפי הסדר עד שנמצא אחד מתאים.

אם אחד הגורמים הוא 125, אז צריך לקחת 3 מספרים ברצף מבין

123, 124, 125, 126, 127

המספר 126 מתחלק ב-9, אז זה $123\cdot 124\cdot 125$, אבל זה לא מתחלק ב-8.

אפשרות שנייה: אם אחד הגורמים הוא 250, אז צריך לקחת 3 מספרים ברצף מבין

248, 249, 250, 251, 252

אבל מבין המספרים האלה 252 מתחלק ב-7, מצד שני הוא מתחלק גם ב-9 ואסור לקחת אותו.

אפשרות שלישית: אם אחד הגורמים הוא 375, אז צריך לקחת 3 מספרים ברצף מבין

373, 374, 375, 376, 377

אבל אין כאן מספר שמתחלק ב-7.

אפשרות רביעית: אם אחד הגורמים הוא 500, אז צריך לקחת 3 מספרים ברצף מבין

498, 499, 500, 501, 502

אבל אין כאן מספר שמתחלק ב-7, כי 497 מתחלק ב-7.

אפשרות חמישית: אם אחד הגורמים הוא 625, אז צריך לקחת 3 מספרים ברצף מבין

623, 624, 625, 626, 627

קל לראות שרק 623 מתחלק ב-7. מה שטוב גם זה ש-624 מתחלק ב-8, וגם ב-3 אבל לא ב-9. לכן $623\cdot 624\cdot 625$ מתחלק ב-7000 אבל לא ב-9000.