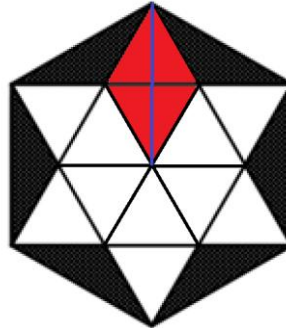


1. בציור רואים משושה משוכלל ששטחו 1 שהעבירו בו מספר אלכסונים. מצאו את סכום השטחים המושחרים.

תשובה: $\frac{1}{3}$

נוסיף לציור את האמצע וכמה ישרים ונקבל ציור חדש:



החלק הלבן בציור המקורי מורכב מ-6 פעמים החלק האדום בציור הזה, בנוסף, עם מעבירים את הקו הכחול רואים שהחלק האדום מורכב משני משולשים מושחרים.

בחלק השחור ישנם 6 משולשים, הם ביחד מרכיבים 3 חלקים אדומים, ולכן שטח החלק המושחר הינו חצי משטח החלק הלבן.

אם כך, שטח החלק המושחר הוא שליש משטח החלק השחור והלבן ביחד, שזהו כל המשושה, ששטחו

$$\frac{1}{3}$$

אחד, ולכן שטח החלק השחור הוא $\frac{1}{3}$.

2. מצאו את המספר החיובי השלם הקטן ביותר x כך שהמספר $7^{2017^{5778}} + x$ יתחלק ב-10.

$$\text{הבהרה: } 7^{2017^{5778}} = 7^{(2017^{5778})}$$

תשובה: 3

נשים לב ש- $7^4 = 2401$ לכן אם $7^a + x$ מתחלק ב-10 אז גם $7^{a+4} + x$ מתחלק ב-10 מכיוון ש:

$$7^{a+4} + x = 7^{a+4} - 7^a + 7^a + x = 7^a \cdot 2400 + (7^a + x)$$

וזה סכום שני מספרים המתחלקים ב-10, אפשר לחזור על זה שוב ושוב ולקבל שגם:

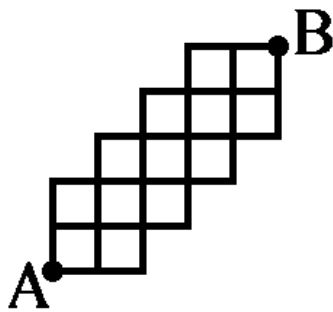
$$7^{4k+a} + x$$

מתחלק ב-10.

נשים לב גם ש- $2017 - 1 = 504 \cdot 4$, ולכן:

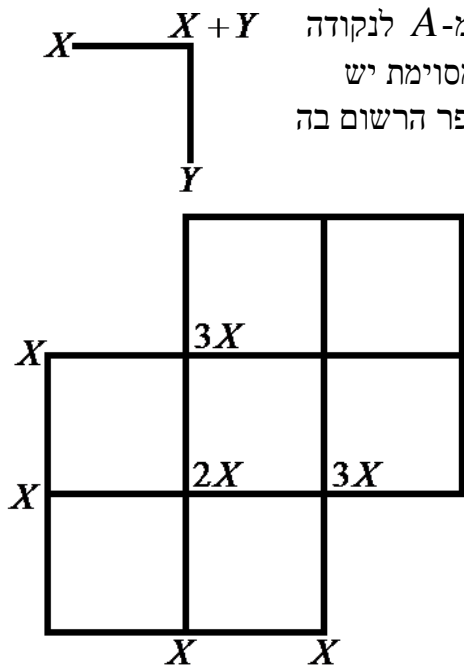
$$2017^{5778} - 1 = (2017 - 1) \cdot (1 + 2017 + \dots + 2017^{5777})$$

מתחלק ב-4, לכן נרשום $2017^{5778} = 4 \cdot k + 1$, ולכן יחד עם ש- $7^1 + 3$ מתחלק ב-10 נקבל שגם $7^{2017^{5778}} + 3 = 7^{4k+1} + 3$ מתחלק ב-10. אין מספר קטן יותר מכיוון שההפרש בין שני מספרים שמתחלקים ב-10 הוא לפחות 10, ולכן זו התשובה.



3. דור צריך להגיע מנקודה A בפינה דרום-מערבית של העיירה לנקודה B בפינה צפון-מזרחית של העיירה. הוא מוכן ללכת רק צפונה או מזרחה. מפת העיירה בציור, השבילים מסומנים בשחור. בכמה דרכים שונות הוא יכול להגיע מ-A ל-B?

תשובה: 162



לכל נקודה בעיירה נסמן את מספר הדרכים שבהם אפשר להגיע מ-A לנקודה זו, (בנקודות שאסור להגיע אליהן נסמן 0), כדי להגיע לנקודה מסוימת יש להיות צעד לפני זה בנקודה הדרומית או המערבית לה, ולכן המספר הרשום בה יהיה סכום המספרים הרשומים מתחתיה ומשמאלה, כמו בציור.

כך אפשר למלא את הטבלה עד שנגיע ל-B. כדי לקצר, נשים לב שחוף מההתחלה, היחס בין כמות הדרכים לנקודה על האלכסון הראשי לנקודה הבאה עליו, הוא שלוש. נראה את זה ממילוי הטבלה:

עכשיו מכיוון שבנקודה השנייה על האלכסון הראשי כמות הדרכים היא 2, ויש על האלכסון עוד 4 נקודות נוספות, כמות הדרכים להגיע ל-B היא $2 \cdot 3^4 = 162$.

4. נתונים 11 מספרים ממשיים a_0, a_1, \dots, a_{10} המקיימים

$$a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$$

חשבו את $\frac{a_0 - 3a_1 + 5a_2 - 7a_3 + \dots + 21a_{10}}{11a_0 - 10a_1 + 9a_2 - 8a_3 + \dots + a_{10}}$

תשובה: -2

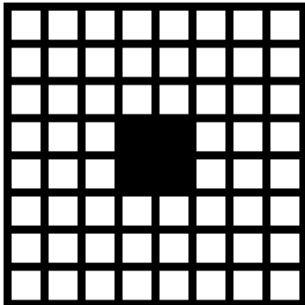
נרשום מחדש את התנאי כ:

$$a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{10} = 0$$

נכפיל את המכנה ב-2 ונוסיף את המונה, ונקבל:

$$2 \cdot (11a_0 - 10 \cdot a_1 + 9 \cdot a_2 - \dots + a_{10}) + a_0 - 3a_1 + 5a_2 - \dots + 21 \cdot a_{10} = 0$$

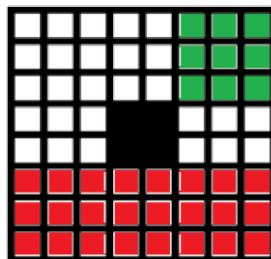
$$= 23 \cdot a_0 - 23 \cdot a_1 + 23 \cdot a_2 - \dots + 23 \cdot a_{10} = 0$$



לכן אם המכנה הוא K אז המונה הוא $-2K$ ואז היחס הוא -2 כרצוי.
 5. במרכז דף משבצות ריבועי 8×8 יש חור ריבועי 2×2 . בכמה דרכים ניתן לצבוע מלבן שמורכב ממשבצות שלמות? אסור שבמלבן הצבוע יהיה חור. גם ריבוע נחשב למלבן.

תשובה: 720

נשים לב שמלבן שאינו נוגע בחלק המושחר חייב להיות מוכל בחלק הצבוע באדום בתמונה, או באחד מארבע הסיבובים שלו:



אך יש לזכור שמלבנים המוכלים בריבועיים פינתיים (החלק הירוק או סיבובים שלו) נספרים בשני מלבנים אדומים.

נשאר להבין כמה מלבנים ישנם בחלק האדום, וכמה יש בחלק הירוק, בשביל זה, נשים לב שכדי לבנות מלבן יש לבחור שני ישרים אופקיים ושני ישרים אנכיים שיהיו השפה של המלבן.

במלבן האדום יש 4 ישרים אופקיים, ו-9 ישרים אנכיים, כמות הדרכים לבחור שני ישרים מתוך 4 היא 6 מכיוון שיש 4 אפשרויות לראשון ו-3 אפשרויות לשני, אך ספרנו כל בחירה פעמיים ולכן יש לחלק ב-2, וכמות הדרכים לבחור שני ישרים מ-9 היא 36 כי יש 9 אפשרויות לראשון, 8 לשני, ואז מאותה סיבה יש לחלק בשתיים.

$$\text{סך הכל כמות המלבנים בחלק האדום היא } 36 \cdot 6 = 216$$

בחלק הירוק יש 4 שורות ו-4 עמודות, ולכן בדומה למקודם יש $6 \cdot 6 = 36$ מלבנים בחלק הירוק.

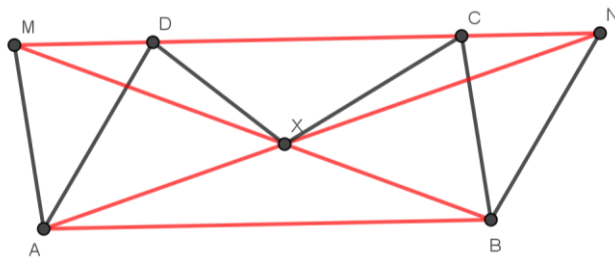
סך הכל קיבלנו שכמות המלבנים שלא נוגעים בחלק השחור היא:

$$216 \cdot 4 - 36 \cdot 4 = 720$$

6. נתון טרפז ABCD, כאשר AB מקביל ל-CD. נתון בנוסף ש- $AB = 4$, $CD = 3$. נתונה נקודה X בתוך הטרפז. שטחי המשולשים $S_{DAX} = S_{ABX} = S_{BCX} = 1$. מצאו את S_{CDX} .

תשובה: $\frac{15}{16}$

נשלים את המשולשים ABC ו-ABD למקביליות בעזרת הנקודות M, N כמו בציור.



נטען ש-X על האלכסון AN. זה נכון שמכיוון ש- $S_{ABX} = S_{ADX}$ ושטח משולש הוא גובה כפול בסיס חלקי 2 (והבסיס AX שווה בשניהם), הגבהים ל-AX מ-B ו-D שווים באורכם, זה נכון גם לאלכסון המקבילית, ולכן הם זהים. בדומה, גם על BM.

מכיוון שצלעות נגדיות במקבילית שוות $ND = MC = 4$ ואז קל לראות ש- $MD = CN = 1$ ולכן $NM = 5$, לכן לפי משפט תאלס על השעון חול המסומן באדום בציור, היחס בין הגובה מ-X

ל-CD והגובה מ-X ל-AB הוא $\frac{5}{4}$.

הגובה מ-X ל-AB הוא באורך $\frac{1}{2}$ לפי הנוסחא לשטח משולש, לכן הגובה מ-X ל-CD הוא

$$\frac{5}{8} \cdot 3 = \frac{15}{16}$$

מאורך $\frac{5}{8}$, ושטח המשולש הוא $\frac{15}{16}$.

פתרון נוסף:

לאורך האנך מ-X ל-CD נקרא h , אורך האנך מ-X ל-AB הוא $\frac{1}{2}$ בגלל ששטח משולש הוא גובה כפול בסיס חלקי 2, מכאן עם נוסחאות שטח משולש ושטח טרפז נקבל:

$$S_{CDX} = \frac{3}{2}h$$

$$S_{ABCD} = \frac{3+4}{2} \left(h + \frac{1}{2} \right)$$

מצד שני:

$$S_{ABCD} = S_{CBX} + S_{BAX} + S_{ADX} + S_{DCX} = 3 + \frac{3}{2}h$$

נשווה ונקבל:

$$\frac{7}{4} + \frac{7}{2}h = 3 + \frac{3}{2}h$$

$$2h = \frac{5}{4}$$

$$h = \frac{5}{8}$$

$$\frac{3}{2}h = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{16}$$

ואז השטח הוא $\frac{15}{16}$

7. מצאו את כמות זוגות המספרים השלמים x, y בתחום $1 \leq x \leq 2018, 1 \leq y \leq 2018$ כך שהמספר $2 \cdot x + 25 \cdot y$ מתחלק ב-1000.

תשובה: 4036

אם $2 \cdot x + 25 \cdot y$ מתחלק ב-1000 אז הוא בפרט מתחלק ב-2, ומכיוון ש- $2 \cdot x$ מתחלק ב-2 נקבל שגם $25 \cdot y$ מתחלק ב-2, ולכן גם y מתחלק ב-2. בדומה נקבל ש- x מתחלק ב-25. נסמן:

$$y = 2y' \quad 1 \leq y' \leq 1009$$

$$x = 25x' \quad 1 \leq x' \leq 80$$

וצריך ש- $50x' + 50y'$ יתחלק ב-1000, או באופן שקול ש- $x' + y'$ יתחלק ב-20.

עבור בחירה של y' המספרים שאפשר לסכום איתו כך שיתחלק ב-20 הם בדיוק:

$$\dots, -40 - y', -20 - y', -y', 20 - y', 40 - y', \dots$$

ההפרשים הם תמיד 20 ולכן יהיה שם בדיוק מספר אחד בין 1 ל-20, מספר אחד בין 21 ל-40 וכך הלאה, כלומר יש בדיוק 4 מספרים x' שעובדים ובתחום המותר.

כמות האפשרויות ל- y' היא 1009, ולכל אחד 4 פתרונות, ולכן כמות הפתרונות היא $1009 \cdot 4 = 4036$.

$$8. \text{ נתונה מערכת המשוואות: } \begin{cases} x - z = 3 \\ y - \sqrt[3]{xyz} = 9 \\ z - \sqrt[3]{xyz} = -6 \end{cases} \text{ מצאו את } x.$$

$$\text{תשובה: } -\frac{3}{7}$$

נחסיר את שתי המשוואות האחרונות, ונקבל:

$$y - z = 15$$

יחד עם המשוואה הראשונה נקבל:

$$x = z + 3$$

$$y = z + 15$$

נציב במשוואה השלישית, ונקבל:

$$z - \sqrt[3]{z \cdot (z + 3) \cdot (z + 15)} = -6$$

$$z + 6 = \sqrt[3]{z \cdot (z + 3) \cdot (z + 15)}$$

נעלה בשלישית ונקבל:

$$z^3 + 18z^2 + 108z + 216 = (z + 6)^3 = z \cdot (z + 3) \cdot (z + 15) = z^3 + 18z^2 + 45z$$

נצמצם ונעביר אגפים ונקבל:

$$63z = -216$$

$$z = -\frac{216}{63} = -\frac{24}{7}$$

ואז ניתן חזרה:

$$x = z + 3 = -\frac{3}{7}$$

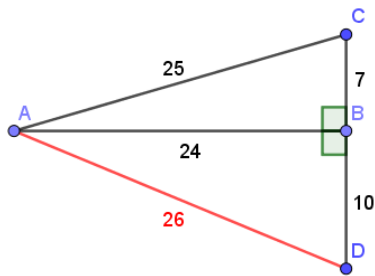
9. במשולש ABC נתון: $AB = 7$, $BC = 24$, $AC = 25$. נקודה X במישור מקיימת $AX = 17$, $BX = 10$. מצאו את האורך של CX.

תשובה: 26

נשים לב ש:

$$25^2 - 24^2 = (25 - 24) \cdot (25 + 24) = 49 = 7^2$$

כלומר $7^2 + 24^2 = 25^2$ וזו שלשה פיתגורית, ולכן המשולש ABC ישר זווית. עכשיו נשים לב ש- $AX - BX = 7 = AB$, זה סותר את אי-שיוון המשולש, אלא אם A, B, X על ישר, כמו בציור:



בפרט הזווית CBX ישרה, ולכן:

$$CX^2 = CB^2 + BX^2 = 24^2 + 10^2 = 676 = 26^2$$

ולכן $CX = 26$ כמבוקש.

10. בחדר יש 2017 אנשים, מתוכם 100 אילמים. כל איש הוא טוב או רע, כולל האילמים. אנשים טובים תמיד אומרים אמת ואנשים רעים תמיד משקרים. בכל דקה, אחד מהאנשים קם, ואם אינו אילם הוא אומר "בחדר יש כרגע מספר זוגי של אנשים רעים". מיד לאחר מכן הוא יוצא מהחדר. מהי הכמות המקסימאלית של שקרים שיכלו להיאמר במהלך 2017 הדקות?

תשובה: 101

נטען שבין שני אנשים רעים לא-אילמים, חייב לצאת באמצע איש אילם רע.

כאשר יוצא איש רע לא-אילם, יש בחדר (כולל אותו) כמות אי-זוגית של אנשים רעים, לכן לאחר יציאתו יש כמות זוגית. כאשר יוצא אדם טוב לא משתנה הזוגיות של האנשים הרעים. כל עוד כמות האנשים הרעים זוגית לא יכול לצאת מהחדר אדם רע שאינו אילם, כי אז הוא ייאלץ לומר את האמת. לכן, לאחר שיצא אדם רע לא-אילם מהחדר, האדם הרע הבא שיוצא מהחדר מוכרח להיות אילם.

מכיוון שיש בדיוק 100 אנשים אילמים, יכולים להיות לכל היותר 101 שקרים, כי בין כל שני שקרים יצא מישהו אילם.

אפשר גם לקבל כמות כזו של שקרים: נגיד שכל האנשים האילמים רעים, ו-101 מהנותרים גם רעים. נוציא לחילופין איש רע לא-אילם ואז איש רע אילם, עד שלא יהיו אנשים רעים, ולבסוף נוציא את כל האנשים הטובים. בהתחלה יש 201 אנשים רעים ולכן הראשון שיוצא אכן משקר. עבור כל אדם רע לא-אילם שיוצא אחר כך, יש בינו לבין הראשון כמות זוגית של אנשים (רעים) שיצאו, ולכן כמות האנשים הרעים היא אי-זוגית בעת שהוא עוזב, כלומר הוא אכן משקר.