טבלת תשובות:

1. 2016	2. 152
3. $\frac{7}{16}$	4. $\frac{1}{2}$
5. $(15,14),(11,14),$ $(15,8),(11,8)$	6. 99
7. $\frac{3}{4}$	8. א) 4 ב) 5
9. $\frac{6}{5}$	10. 5

פתרונות

1. על הלוח כתובים המספרים השלמים מ-1 עד 210012. בכל דקה מבצעים את הפעולה הבאה על כל אחד מהמספרים: אם המספר מתחלק ב-100 אז מחלקים אותו ב-100, ואחרת מחסרים ממנו 1.
מה המספר הגדול ביותר שיופיע על הלוח כעבור 183 דקות?

פתרון: ראשית נעקוב אחרי המספר 209999. לאחר 99 דקות הוא יהפוך ל209900, בדקה ה-100 אנחנו מחלקים אותו ב100, ומקבלים 2099. ב-83 דקות שנותרנו המספר יהפוך ל- 2016=2099-83.
כעת נשים לב לכמה דברים.
ראשית, כל מספר יחולק ב100 לפחות פעם אחת, כי לאחר כמות דקות ששווה למספר שנוצר משתי ספרותיו האחרונות המספר יתחלק ב100.
שנית, אילו יש מספר ברשימה שיחולק ב100 פעמיים או יותר, לבסוף הוא לא יהיה גדול מ-$\frac{210012}{100\cdot100}$, כלומר לא גדול מ22, וכבר ראינו כי ניתן לקבל 2016. לכן, מעתה נחשוב רק על המספרים שיחולקו ב100 פעם אחת בדיוק בתהליך, בפרט אין טעם להתייחס למספרים שגדולים מ-210000.

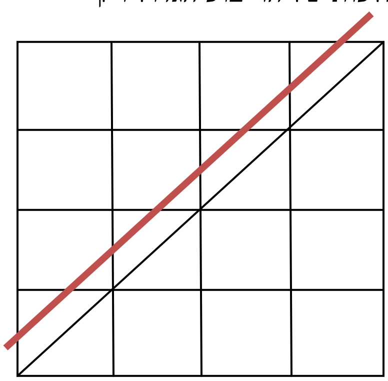
כעת נניח שהמספר שלנו הוא מהצורה AB *** כאשר הכוכביות הן ספרות כלשהן (לאו דווקא 3) וB,A מספרים דו-ספרתיים (ברור שצריך לפחות 6 ספרות, אחרת התוצאה בטוח תהיה קטנה מ2016). לאחר B דקות הוא יהיה $A00$ ***, בדקה ה B+1 הוא יהפוך לA ***, וב 182-B דקות שנותרו הוא יהפוך ל$(A+B-182)$ ***. המספר

בסוגריים הוא גם דו-ספרתי (אולי הספרה הראשונה 0), מהנחה שלנו שישנה רק חלוקה אחת ב100 בכל התהליך. לכן, על מנת למקסם את התהליך צריך שהספרות ההתחלתיות יהיו גדולות ככל שאפשר, וכי A+B גדול ככל האפשר. ברור שזה מושג על ידי 209999. לכן המספר המרבי שיהיה רשום על הלוח הוא 2016.

2. על דף נייר גדול צויר ריבוע שאורך צלעו 76, המחולק ל-76×76 משבצות ריבועיות 1×1. הגבולות בין המשבצות וגם הגבולות של הריבוע הגדול הם קווים שחורים. יוסי מעביר קו ישר אדום שלא עובר דרך אף קודקוד של אף משבצת. מהו המספר הגדול ביותר של פעמים שהקו האדום יכול לחתוך קווים שחורים?

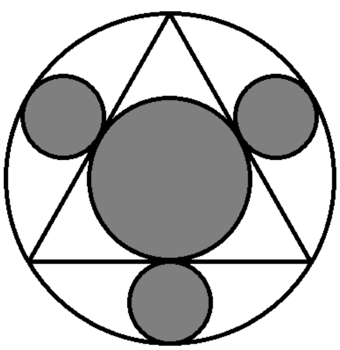
פתרון: התשובה היא 152. על מנת להצדיק זאת, יש להראות שני דברים; ראשית, כי אין קו אדום החותך יותר מ-152 קווים שחורים, ושקיים קו אדום שחותך בדיוק 152 קווים שחורים.

נניח כי קיים קו החותך יותר מ-152 קווים שחורים. ישנם 77 קווים שחורים אופקיים ו77 קווים שחורים אנכיים. ארבעה מתוכם הם הצלעות של הריבוע הגדול. כל קו ישר אדום יכול לחתוך את הצלעות של הריבוע הגדול רק פעמיים: פעם אחת כאשר הוא נכנס אליו ופעם אחת כאשר הוא יוצא ממנו. לכן מבין $77+77=154$ קווים חייבים לדלג על שני קווים, וכך נקבל לכל היותר 152 נקודות חיתוך.



כעת נוכיח כי קיים קו אדום החותך בדיוק 152 קווים שחורים. נעביר קו אדום שקרוב לאלכסון של ריבוע ומקביל לו. בציור מופיעה דוגמא עבור ריבוע 4×4 לצורך המחשה. קל לראות שהקו יחתוך את כל האופקיים פרט לאחד ואת כל הקווים האנכיים פרט לאחד.

3. בציור רואים משולש משוכלל, מעגל חוסם ומעגל חסום, ושלושה מעגלים שמשיקים לאמצעי הצלעות של המשולש וגם למעגל החוסם. מצאו את המנה בין השטח האפור (סכום השטחים של ארבעת העיגולים הקטנים) לשטח של העיגול החוסם.



פתרון: נסמן ב- ABC את קודקודי המשולש, ב-A',B',C' את אמצעי הצלעות BC,AC,AB בהתאמה, ב-M_A, M_B, M_C את אמצעי הקשתות בהתאמה. נסמן ב- $O_{A,}O_B, O_C$ את מרכזי המעגלים הקטנים בהתאמה. ב-O נסמן את מרכז המעגל החסום במשולש (O גם מרכז המעגל החוסם, כי המשולש שווה צלעות).
נסמן ב- x את רדיוס המעגל החוסם. הישר O_AO עובר דרך A', כי המעגל החסום למשולש משיק למשולש באמצעי הצלעות (המשולש שווה צלעות), נתון שהמעגל הקטן משיק לאמצע הצלע מהצד השני. לכן המעגל הקטן והמעגל החסום משיקים בנק A', ולבסוף ישר המחבר בין שני מרכזים של מעגלים משיקים עובר גם דרך נקודת ההשקה. מצד שני, הישר OA עובר דרך A', כי OA חוצה את זווית A והמשולש הוא שווה צלעות. לכן הישרים O_AO ו- AO מתלכדים. על כן הנקודות A, O, A', O_A, M_A נמצאות על ישר אחד.

נעיר כי $\frac{x}{2} = OA = \frac{1}{2}OA' $, כי מפגש התיכונים מחלק את התיכון ביחס 2:1 והמשולש שווה צלעות. לכן רדיוס המעגל החסום הוא $\frac{x}{2}$.

וכעת:

$$M_A A' = OM_A - OA' = x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x.$$

ולכן קוטר המעגל הקטן מול A הוא $\frac{1}{2}x$ ולכן רדיוסו $\frac{x}{4}$. כעת אנו מוכנים לחשב את היחס הנדרש.

השטח האפור הוא שטח המעגל החסום ועוד 3 פעמים שטח המעגל הקטן מול A (כי שלושת המעגלים הללו שווים מסימטריה). נחשב:

$$\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3\pi\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \pi\frac{7x^2}{16}$$

שטח המעגל החוסם הוא כמובן πx^2. לכן היחס הנדרש הוא:

$$\frac{\pi\frac{7x^2}{16}}{\pi x^2} = \frac{7}{16}$$

4. שלושה מספרים חיוביים כתובים על הלוח. ארבעה אנשים הסתכלו עליהם וטענו את הטענות הבאות:

אלה: "המספר הראשון גדול פי 2 מהמספר השלישי".
בני: "המספר השני גדול פי 4 מהשלישי".
גילה: "סכום המספרים הראשון והשני גדול פי 5 מהשלישי".
דני: "המספר השני פחות המספר הראשון שווה לשלישי".

מבין הדברים שהם אמרו, שלושה היו נכונים ואחד שגוי. חשב את המנה בין המספר הראשון לבין סכום שני המספרים האחרים.

פתרון ראשון. נסמן ב-a, b, c את שלושת המספרים הרשומים על הלוח בהתאמה. נכתוב אלגברית מה כל אחד מהאנשים טוען:

אלה: $a = 2c$
בני: $b = 4c$
גילה: $a + b = 5c$
דני: $b - a = c$

על מנת להבין מי שוגה, ננתח מה קורה אם נניח שאדם ספציפי טועה.

א. <u>בלי אלה:</u>

$$\begin{cases} b = 4c \\ a + b = 5c \\ b - a = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4c \\ a + 4c = 5c \\ 4c - a = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4c \\ a = c \\ 4c - a = c \end{cases} \Rightarrow 3c = c \Rightarrow c = 0$$

וזו סתירה, כי נתון שהמספרים שרשומים על הלוח חיוביים.

ב. <u>בלי בני:</u>

$$\begin{cases} a = 2c \\ a + b = 5c \\ b - a = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b + 2c = 5c \\ b - 2c = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = 3c \\ b - 2c = c \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b+c} = \frac{2c}{3c+c} = \frac{2}{3+1} = \frac{1}{2}$$

לכן במקרה זה התשובה היא חצי. נשים לב שזה שלא הגענו לסתירה במקרה זה, לא אומר שפתרנו את השאלה. אמנם הראנו כי ייתכן שבני טועה והשאר צודקים, וקיבלנו תשובה במקרה זה, אולי ייתכן גם שמישהו אחר טועה והשאר

צודקים. לכן על מנת לסיים יש לנתח את שני המקרים הנוספים. אם נשלול את שני המקרים הנוספים נקבל ש- $\frac{1}{2}$ זו התשובה היחידה, אבל אם לא יתכן שיש עוד תשובה.

ג. <u>בלי גילה:</u>

$$\begin{cases} a = 2c \\ b = 4c \\ b - a = c \end{cases} \Rightarrow 2c = 4c - 2c = b - a = c \Rightarrow c = 0$$

וזו סתירה.

ד. <u>בלי דני:</u>

$$\begin{cases} a = 2c \\ b = 4c \\ a + b = 5c \end{cases} \Rightarrow 6c = 4c + 2c = a + b = 5c \Rightarrow c = 0$$

וזו סתירה שוב. על כן נסיק שבני באמת האחד שטעה, וכי התשובה הסופית הינה חצי.

פתרון שני. נזכיר שוב את התנאים:

אלה:	$a = 2c$
בני:	$b = 4c$
גילה:	$a + b = 5c$
דני:	$b - a = c$

נניח כי אלה ובני צודקים, אז $a+b=6c$ ולכן גילה טועה, הרי היא בעצם אומרת כי $6c=5c$ וזה לא יתכן, הרי c חיובי. מצד שני דני אומר בעצם ש- $2c=c$ וזה גם לא יתכן. לכן אם אלה ובני צודקים, אז יש שניים שטועים בניגוד לנתון.

לכן מי שטועה זה אלה או בני, ואפשר לסמוך על מה שגילה ודני אמרו. נחבר את שני המשוואות של גילה ודני, ונסיק כי $b=3c$ בניגוד למה שבני אומר. לכן בני טועה. ולכן אלה צודקת, $a=2c$, ומכאן מחשבים כמו בפתרון הקודם.

5. מצאו את כל זוגות המספרים השלמים (x, y) המקיימים $x^2 - y^2 + 22y - 26x + 53 = 0$.

פתרון: נבצע ***השלמה לריבוע*** נעתיק את הנוסחה בצורה הבאה

$$x^2 - 26x + 169 - \left(y^2 - 22y + 121\right) + 5 = 0$$

$$(x-13)^2 - (y-11)^2 + 5 = 0$$

$$5 = (y-11)^2 - (x-13)^2 = (y - 11 + x - 13)(y - 11 - x + 13) = (y + x - 24)(y - x + 2)$$

כעת, מצד ימין שני הגורמים שלמים. הדרכים היחידות להציג את 5 כמכפלה של שני מספרים שלמים הן

$$1\cdot 5\ ,\ (-1)\cdot(-5)$$

ועל כן יש ארבע אפשרויות. בכל אפשרות כשנחבר את שתי המשוואות נמצא את y, וכשנחסיר נמצא את x:

$\begin{cases} y-x+2=1 \\ x+y-24=5 \end{cases} \Rightarrow x=15, y=14$

$\begin{cases} y-x+2=-5 \\ x+y-24=-1 \end{cases} \Rightarrow x=15, y=8$

$\begin{cases} y-x+2=-1 \\ x+y-24=-5 \end{cases} \Rightarrow x=11, y=8$

$\begin{cases} y-x+2=5 \\ x+y-24=1 \end{cases} \Rightarrow x=11, y=14$

אפוא, הפתרונות השלמים היחידים למשוואה הינם:

$$(15,14), (11,8), (15,8), (11,14)$$

הערה. קיים עוד פתרון, מבוסס על כך שאם הפרש של שני ריבועים שלמים הוא 5, אז הריבועים הם 9 ו-4, ולכן $x-13=\pm 2$ ו- $y-11=\pm 3$.

6. נתון משושה משוכלל ABCDEF ונקודה P בתוכו. המרחק מ-P לישר AB הוא 100, המרחק מ-P לישר CD הוא 101, והמרחק מ-P לישר EF הוא 105. חשבו את המרחק מ-P לישר BC.

פתרון.

טענת עזר 1: יהא ABC משולש שווה צלעות, וP נקודה בתוכו. אז סכום המרחקים מ P לצלעות המשולש קבוע (לא תלוי ב-P).

הוכחה: נוריד אנכים מהנק' P לצלעות, ונסמן את עקבי האנכים בH_A, H_B, H_C בהתאמה. נניח כי אורך צלע המשולש הוא a.

$$S_{ABC} = S_{PAB} + S_{PBC} + S_{PCA} = \frac{1}{2}(PH_A \cdot a + PH_B \cdot a + PH_C \cdot a)$$

לכן סכום המרחקים שווה ל-$\frac{2S_{ABC}}{a}$, וזה לא תלוי בנקודה P. נעיר שגודל זה שווה לגובה המשולש. זה ברור גם מהנוסחה שקיבלנו עבורו, וגם אם נציב את הנקודה A במקום P.

טענת עזר 2: יהא ABCDEF משושה משוכלל ונקודה P בתוכו. אזי סכום המרחקים מ-P לצלעות EF,CD,AB שווה לסכום המרחקים מ-P לצלעות FA,DE,BC.

הוכחה: נסמן ב-N את חיתוך של המשכי הצלעות AB ו-CD, בT את חיתוך של המשכי AB ו-EF, ב-M את חיתוך של המשכי CD ו-EF. משולש TNM הוא שווה צלעות משיקולי סימטריה. סכום המרחקים מ-P לצלעות CD,EF,AB שווים לגובה המשולש TNM, לפי טענת עזר 1. אם נחזור על התהליך עבור שלשת הצלעות CD,ED,AF נקבל כי סכום המרחקים מ-P לצלעות אלו שווה לגובה המשולש המתאים, אשר כמובן חופף למשולש TMN משיקולי סימטריה.

כעת להוכחה. נסמן את המרחקים מ-P לצלעות BC,AF,ED ב-x, y, z בהתאמה. מתקיים:

$$100 + z = 101 + y = 105 + x$$

כי שלושת הסכומים הם המרחקים בין הצלעות הנגדיות של המשושה, וכולם זהים כי המשושה משוכלל.

כמו כן, מתקיים $x+y+z=105+101+100$ לפי הטענה השנייה. כלומר:

$$\begin{cases}105+x=101+y\\105+x=100+z\\306=x+y+z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=x+4\\z=x+5\\306=x+y+z\end{cases}\Rightarrow 3x+9=306\Rightarrow x=99$$

ולכן המרחק מהנקודה P לצלע BC הוא 99.

7. חשבו את ערך הביטוי

$$\frac{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{997^2}+\frac{1}{999^2}-\frac{1}{1002^2}-\frac{1}{1004^2}-\frac{1}{1006^2}-\ldots-\frac{1}{1998^2}-\frac{1}{2000^2}}{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{999^2}+\frac{1}{1000^2}}.$$

פתרון. נוסיף ונחסיר את $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{1000^2}$ במונה נקבל

$$\frac{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{997^2}+\frac{1}{999^2}-\frac{1}{1002^2}-\frac{1}{1004^2}-\cdots-\frac{1}{1998^2}-\frac{1}{2000^2}}{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{999^2}+\frac{1}{1000^2}}=$$

$$=\frac{\begin{pmatrix}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}\right)-\\-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{998^2}+\frac{1}{1000^2}+\frac{1}{1002^2}+\cdots+\frac{1}{1998^2}+\frac{1}{2000^2}\right)\end{pmatrix}}{1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}}=$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}\right)}{1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}}=\frac{3}{4}$$

באשר המעבר האחרון נובע מכך ש:

$$\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^2}$$

8. ליוסי יש פנס. כדי להפעיל את הפנס נחוצות 4 סוללות תקינות. לשלומי יש ערימה של סוללות, שאחת מהן לא תקינה וכל האחרות תקינות. יוסי יכול לבדוק רביעיית סוללות בכך שהוא מכניס אותן לפנס ובודק האם הוא עובד. כמה בדיקות יוסי יצטרך לבצע, על מנת למצוא את הסוללה הלא תקינה בערימה, אם

א) בערימה יש 12 סוללות?
ב) בערימה יש 13 סוללות?

א. התשובה היא 4. על מנת להצדיק תשובה זו, צריך להראות שתמיד ניתן לאתר את הסוללה הפגומה בלא יותר מ-4 בדיקות, וכי לא תמיד אפשר ב-3. ראשית נראה שתמיד ניתן לאתר את הסוללה הפגומה בלא יותר מ-4 בדיקות. נחלק

את 12 הסוללות ל3 קבוצות של ארבע. תוך שתי בדיקות לכל היותר נמצא באיזה רביעיה הסוללה הפגומה נמצאת: נבדוק את הרביעיה הראשונה והשניה. גם אם בפעם הראשונה הפנס לא דולק, הסוללה ברביעייה ראשונה, אם בפעם השנייה הפנס לא עובד, ברביעייה השנייה, ואם בשתי הבדיקות הפנס דולק, הסוללה הפגומה נמצאת ברביעיה השלישית.
אז יש לנו עכשיו 4 סוללות A, B, C ו-D, שאחת מהן פגומה, ועוד 8 סוללות שהן בוודאות תקינות. בבדיקה שלישית נבדוק סוללות A, B ועוד שתי סוללות תקינות, ובבדיקה רביעית נכניס לפנס סוללות A, C ועוד שתי סוללות תקינות. אם הפנס דולק בשתי הבדיקות האחרונות אז D פגומה; אם הפנס עובד בבדיקה שלישית אבל לא ברביעית אז C פגומה; עם דולק בבדיקה רביעית אך לא בשלישית אז B פגומה, ואם הפנס לא דולק בשתי הבדיקות האחרונות אז A פגומה.

נשאר להראות שלא קיימת שיטה אחרת, שמאתרת את הסוללה ב-3 בדיקות בלבד או אפילו פחות. נניח שבוצעו 2 בדיקות. אז קיימות לפחות 4 סוללות שעוד לא הוכנסו בפנס. אם הפנס דלק בשתי הבדיקות הראשונות, יש לפחות 4 סוללות חשודות. בדיקה נוספת תיתן אחת משתי תוצאות אפשריות: הפנס דולק או לא דולק. אין מצב שנוכל להתאים לכל סוללה חשודה תוצאה שונה של הבדיקה, הרי יש 4 סוללות חשודות ויש רק שתי תשובות.

לכן לא נוכל לאתר את הסוללה הפגומה בין הסוללות בחשודות בצורה חד-משמעית באמצעות בדיקה שלישית.

ב. התשובה היא 5. כמו בסעיף הקודם, צריך להראות שיטה למציאת סוללה פגומה ב-5 בדיקות, והסביר שאי-אפשר לשפר. נחלק את 13 הסוללות ל-3 קבוצות של 4 ונשאיר סוללה אחת בצד. כעת נבדוק את שלושת הרביעיות. אם אחת מהן לא עבדה, אז יש לנו ארבעה מומעדים ועוד שתי בדיקות לפחות (כי השתמשנו בשלוש בדיקות לכל היותר עד כה), וראינו בסעיף קודם שבאמצעות שתי בדיקות ניתן לאתר סוללה פגומה מבין ארבעה מומעדים. אילו בשלושת הבדיקות הפנס עבד, אנו מסיקים שהסוללה האחרונה היא הפגומה. על כן תוך 5 בדיקות לכל היותר אנו יכולים לאתר את הסוללה הפגומה. נוכיח כעת שלא תמיד ארבע בדיקות מספיקות.

נניח שעשינו שתי בדיקות בלבד והפנס עבד בשני הפעמים. נשארו לפחות 5 סוללות שלא היו בפנס. נראה שבמקרה זה לא ניתן לסיים את החיפוש תוך שתי בדיקות נוספות. אכן, בשתי בדיקות נוספות נוכל לקבל 4 תוצאות שונות:

(דולק, דולק) , (דולק, לא דולק), (לא דולק, דולק), (לא דולק, לא דולק).

אבל יש 5 סוללות חשודות. לא נוכל להתאים לכל סוללה חשודה תוצאה זהה של בדיקות, הרי יש 5 סוללות ו-4 תוצאות של בדיקות. לכן לא משנה איזה אסטרטגיה נבחר, קיימות שתי סוללות, שמתאימות לאותה תוצאה. אם אחת מבין שתי הסוללות הללו פגומה, לא נוכל לדעת איזה על סמך שתי הבדיקות הללו, הרי הן נותנות אותה תוצאה בשתי הבדיקות.
הערה. ניתן לקרוא קצת יותר על איך לפתור שאלות מסוג זה במאמר: http://taharut.org/articles/coins1.pdf .

9. פונקציה f מקיימת $f(x)\cdot f\left(1-\frac{1}{x}\right)=|x|$ לכל $x\neq 0$ ממשי. מצאו את $|f(6)|$.

פתרון. נציב $x=6$ ונקבל $f(6)f\left(\frac{5}{6}\right)=6$. לו היינו יודעים $f\left(\frac{5}{6}\right)$ היינו פותרים את השאלה.

נציב $x=\frac{5}{6}$ ונקבל $f\left(\frac{5}{6}\right)f\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{6}$. לו היינו יודעים עכשיו את $f\left(-\frac{1}{5}\right)$ היינו מוצאים $f\left(\frac{5}{6}\right)$ ואז מסיימים את הפתרון, אבל אנחנו לא.

לכן נציב $x=\frac{5}{6}$ ונקבל $f(6)=\frac{1}{5}\,f\left(-\frac{1}{5}\right)$. המעגל נסגר.

קיבלנו שלוש משוואות עם שלושה נעלמים, ניקח ערך מוחלט על שלושת המשוואות, ונסמן:

$$a=|f(6)|,\ b=\left|f\left(\frac{5}{6}\right)\right|,\ c=\left|f\left(-\frac{1}{5}\right)\right|.$$

כעת, נוכל לכתוב את מה שהסקנו באופן הבא:

$$\begin{cases} ab=6 \\ bc=\frac{5}{6} \\ ca=\frac{1}{5} \end{cases}$$

נכפיל משוואה ראשונה באחרונה ונחלק בשלישת. נקבל

במעבר האחרון ניתן לקחת שורש, כי כל הנעלמים אי שליליים.
וכעת נסיים:

$$a^2=\frac{ab\cdot ac}{bc}=6\cdot\frac{1}{5}\Big/\frac{5}{6}=\left(\frac{6}{5}\right)^2$$

אבל $a\geq 0$, לכן $a=\frac{6}{5}$.

10. במרובע ABCD, נתונות הזוויות $\sphericalangle DAB=90^\circ, \sphericalangle ABC=75^\circ, \sphericalangle BCD=45^\circ$. בנוסף ידוע כי $\sphericalangle ADB=30^\circ$, וכי $BC=\sqrt{50}$. חשבו את $AB+CD$ (יש לתת תשובה במפורש בתור מספר ולא בתור ביטוי).

פתרון. במשולש ABD נתונים שתי זוויות: זווית A ישרה, וזווית D היא 30°, ולכן זווית B היא 60°.
כלומר זווית $\sphericalangle ABD=60^\circ$.

במרובע ABCD סכום הזוויות היא 360° כמו בכל מרובע, 3 זוויות נתונות, לכן הזווית האחרונה $\sphericalangle CDA=150^\circ$.

אם נוריד מזה $\sphericalangle ADB=30^\circ$, נקבל $\sphericalangle CDB=\sphericalangle CDA-\sphericalangle ADB=120^\circ$.

נחתוך את המרובע ABCD לאורך אלכסון BD, נהפוך את אחד החלקים ונדביק שוב לאורך אותו אלכסון, אבל בכיוון הפוך למה שהיה קודם. אז הזוויות $\sphericalangle CDB$ ו-$\sphericalangle ABD$ יוצמדו וירכיבו ביחד זווית של 180°, כלומר קו ישר. לכן לאחר השינוי שעשינו יש כבר משולש. אחת מצלעות המשולש הודבקה מ-$AB+CD$, צלע אחרת היא AD וצלע שלישית היא BC ואורכה $\sqrt{50}$.

מול BC נמצאת זווית ישרה. אחד הזוויות לצד BC הגיע מ-$\sphericalangle BCD=45^\circ$. לכן יש לנו משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים; היתר הוא $\sqrt{50}$ וצריך למצוא את אחד הניצבים שלו.

קל לראות שכל ניצב שווה 5, הרי $5^2+5^2=50$ לכן זה בדיוק מסתדר עם משפט פיתגורס.