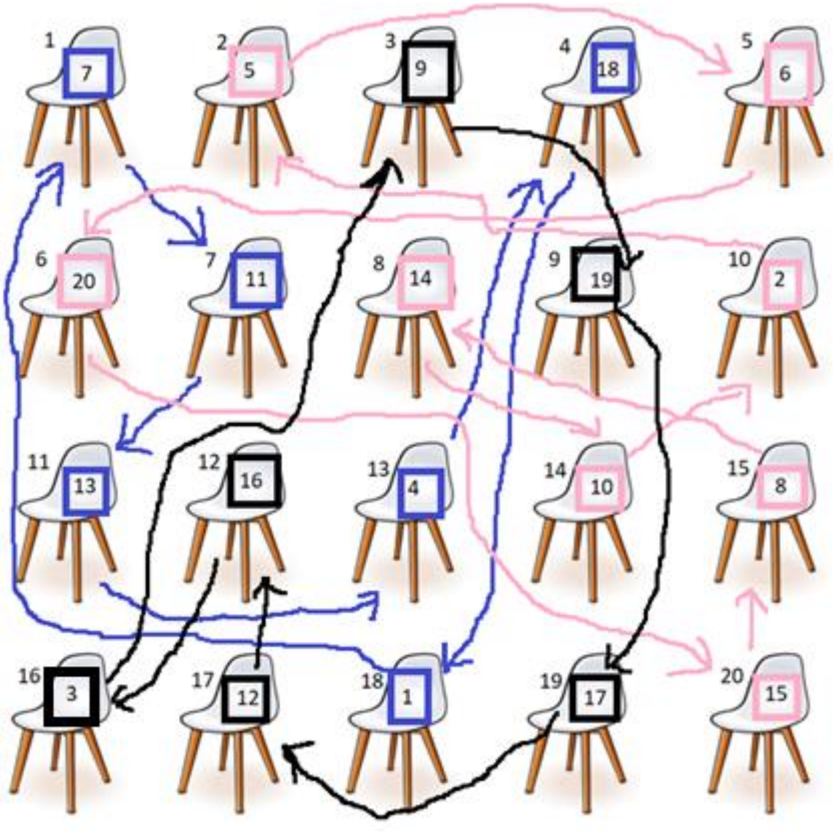
מועד ב' – מפתח תשובות ותקציר הפתרונות

1. 17. הדרך השיטתית לפתור את הבעיה היא בכל פעם למחוק את קישורי הרשת עם קצב ההורדה האיטי ביותר, ולבדוק האם עדיין תמונת האבטיח יכולה להגיע לסבתא סמית'. אם עדיין היא יכולה להגיע, מוחקים את הקישורים עם קצב ההורדה האיטי ביותר שנשאר, בודקים שוב, וכו', עד שמגיעים לשלב שבו שכשמורידים את כל הקישורים עם קצב ההורדה האיטי ביותר שנשאר כבר לא קיים מסלול מהשרת עם התמונה למחשב של סבתא סמית'.
הקצב הזה (נסמנו X) הוא התשובה – משום שאם מורידים את כל הקישורים שהקצב שלהם איטי או שווה ל-X כבר לא קיים מסלול שאפשר להוריד דרכו, לכן בכל המסלולים הקצב יהיה איטי או שווה ל-X, ומצד שני בשלב לפני, כשהורדנו את כל הקישורים שהקצב שלהם איטי מ-X (הרי נתקענו בשלב שבו X היה הקצב האיטי ביותר שנשאר) כן היה מסלול שניתן להוריד דרכו את התמונה, והקצב של הקישור הכי איטי בו היה בדיוק X. המוכשרים יוכלו אולי לראות את התשובה גם בעין 😊.

2. 25. נצייר חץ מכל כיסא לכיסא שאליו התלמיד שישב בו יעבור ביום למחרת. נראה שהכיסאות מחולקים למעגלים זרים, באיור הבא הם מומחשים ב-3 צבעים:



המעגל השחור והכחול בגודל 6, כלומר כל 6 ימים כל תלמיד בכיסא באחת מהצבעים הללו יחזור למקומו המקורי, והורוד בגודל 8, כלומר כל 8 ימים זה יקרה. לכן, כעבור כל מספר ימים שמתחלק גם ב-6 וגם ב-8 כל אחד מהתלמידים יחזור למקומו המקורי, והמספר הקטן ביותר הנ"ל הוא 24 (24 ימים אחרי היום הראשון = יום מספר 25, אך קיבלנו גם את התשובה 24 😊).

3. א. 11 ב. 11 ג. 2013.

א'+ב' – סדר הפעולות של מר חרמון כלל לא משנה. אם נסתכל על המצב הסופי, בכל קופסה שיש בה גויאבה, בשלב לפני שהגויאבה הגיע אליה היו 2 גויאבות בקופסה שמשמאלה (מלבד הקופסה השמאלית ביותר כמובן). ניתן לכן לחזור מכל מצב סופי ולהבין כמה גויאבות היו בהתחלה. אם יש גויאבה בקופסה השמאלית ביותר, היא הייתה שם במקור. אם יש גויאבה בקופסה השניה משמאל, היו 2 גויאבות בקופסה השמאלית ביותר במקור שאחת מהן נאכלה, ולכן היא "שווה" 2 גויאבות מקוריות. גויאבה בקופסה השלישית משמאל "שווה" 2 גויאבות בקופסה השניה משמאל, שכל אחת מהן "שווה" 2 גויאבות מקוריות – סה"כ 4. גויאבה בקופסה הרביעית משמאל שווה 8, בחמישית 16, וכו'... מזהים את החוקיות?

נוח יותר לספור את הקופסאות מ-0, כש-0 היא השמאלית ביותר, ואז במצב הסופי הגויאבה בקופסה ה-i מייצגת במקור 2^i גויאבות, ומספר הגויאבות במקור הוא סכום החזקות הללו של 2 (של כל מספרי הקופסאות שבסוף יש בהן גויאבה), ואנחנו צריכים למצוא את הקופסה עם המספר הגבוה ביותר = החזקה הכי גדולה של 2 שקטנה מ-2021, שהיא 1024=10^2 (ומכיוון שהקופסאות ממוספרות אצלנו מ-0, מספר הקופסאות הוא 11).

(הערה: אם נכתוב פשוט 0 בכל קופסה שאין בה גויאבות ו-1 שיש, נקבל את הייצוג הבינארי (בסיס 2) של מספר הגויאבות שהיו במקור, לכן כדי לקבל את המצב הסופי ניתן להמיר את 2021 לבסיס 2, ומספר הספרות/ביטים ביצוג הבינארי הוא כמובן מספר הקופסאות).

ג' – מספר התורות הוא בדיוק מספר הגויאבות שנעלמו לנו, כי בכל תור נאכלת גויאבה אחת. צריך לספור כמה גויאבות נשארו בקופסאות בסוף (מספר ה-1 בייצוג הבינארי של 2021), ולהחסיר את זה מ-2021. בסוף נשארו 8 גויאבות, לכן התשובה היא 2013.

למי שלא יודע ייצוג בינארי – מכיוון שראינו בסעיף א'+ב' שסדר הפעולות לא משנה, ניתן להניח שמר חרמון תמיד לוקח זוגות מהקופסה הראשונה עד שאי אפשר יותר לעשות זאת, ואז מהשניה, וכו', ולעשות סימולציה לתהליך. אחרי 1010 תורות תשאר גויאבה אחת בקופסה השמאלית ויהיו 1010 מימינה, ואז אחרי עוד 5005 תורות ישארו 5005 גויאבות בקופסה השלישית, אחרי 2502...

ותשלימו לבד 😊

4. א. 4. ב. 1-. ג. 8.

יש 2 רצפים אפשריים שניתן להביא אליהם – הרצף שמתחיל ב-A (...ABABAB) והרצף שמתחיל ב-B (...BABABA). נבדוק לגבי כל אחד מהם האם ניתן להביא אליו ומה מספר הפעולות הקטן ביותר לצורך כך וניקח את התוצאה הטובה ביותר.

החלפה בין 2 אותיות זהות לא תשנה כלום.

נסתכל כמה A לא במקומן וכמה B לא במקומן, ונניח שעושים רק החלפות בין A ל-B.

אם מחליפים בין A ל-B כשב-2 המקומות צריכה להיות אותה האות, האות הנכונה תעבור מקום והאות השגויה תעבור מקום, אבל מספר המופעים של כל אות שלא במקום הנכון לא ישתנה בכלל.

אם 2 האותיות היו במקום הנכון לפני ההחלפה, אחריה נוספה A שלא במקום ו-B שלא במקום.

אם 2 האותיות היו במקום השגוי לפני ההחלפה, אחריה ירדה A שלא במקום וגם B שלא במקום.

מסקנה: לא משנה איזו החלפה תתבצע, ההפרש בין מספר ה-A שלא במקום לבין מספר ה-B שלא במקום ישאר קבוע! מכיוון שברצף הנכון זה 0, אם בהתחלה יש הבדל בין מספר ה-A לבין מספר ה-B שלא במקומם, לא ניתן להגיע לרצף היעד בעזרת החלפות.

במקרה שבו ניתן להגיע לרצף היעד – מכיוון שכל פעולה מחליפה בין זוג אותיות ולא משנה את המיקום של שאר האותיות, כלומר היא לא יכולה לפגוע במצב של אותיות אחרות, אם בכל פעולה ניקח 2 אותיות שלא נמצאות במקומן וההחלפה שלהן תביא אותן למקומן, כלומר ניקח A שנמצאת במקום של B ו-B שנמצאת שמקום של A ונחליף אותן, זה יהיה אופטימלי. מכיוון שבדקנו שיש מספר זהה של A ושל B שלא במקומן, אפשר פשוט לזווג אותן לזוגות ולבצע את ההחלפות בין כל זוג, לכן התשובה היא מספר האותיות שלא נמצאות במקומן חלקי 2!

5. א. 2020 ב. 6050.

סעיף א' – אם שואלים האם א' מכיר את ב' והתשובה היא לא, ב' לא מפורסם (כי לא כולם מכירים אותו), ואם התשובה היא כן, א' לא מפורסם (כי הוא מכיר מישהו אחר), לכן כל שאלה נותנת לפסול מועמד אחד מלהיות מפורסם. קל לראות שאי אפשר לפסול יותר מזה בשאלה בודדת, לכן מספר השאלות הוא מספר הנוכחים במסיבה פחות אחד.

סעיף ב' – אם נעשה את התהליך של א' נמצא מועמד אחד בלבד שיכול להיות מפורסם, ואז נאלץ לבדוק האם המועמד מכיר את כולם וכולם מכירים אותו (כי לא נתון לנו שבוודאות יש מפורסם במסיבה). נקרא למועמד זה פוג'י. אנחנו בטוח כבר יודעים לגבי לפחות אחד מהנוכחים, באחד מהכיוונים (האם פוג'י מכיר אותו או האם הוא מכיר את פוג'י) את התשובה מהשאלות שביצענו כדי לאתר את פוג'י, לכן נשארו $2020*2-1=4039$ שאלות בגישה הנאיבית וזה יצא סה"כ 6059 שאלות בגישה זו. אבל אפשר לשפר את השלב הראשון של מציאת המועמד ללהיות מפורסם (פוג'י) כדי שיותר תשובות יהיו לנו שימושיות בשלב השני ונוכל לחסוך בו חלק מהשאלות! אם בהתחלה נחלק את הנוכחים במסיבה לזוגות זרים ונשאל על כל זוג האם אחד מהם מכיר את השני, נפסול חצי מהמשתתפים במסיבה (שלא יכולים להיות פוג'י). אחר כך מאלו שעוד לא פסלנו נעשה זאת שוב (נחלק לזוגות זרים ונשאל לכל זוג), וחוזר חלילה. זה עדיין יצא 2020 שאלות לאיתור של פוג'י שיכול להיות מפורסם, אבל הפעם בטוח לפחות ב-10 מהשאלות האלו ($2^{10}=1024<2021<2048=2^{11}$) פוג'י היה אחד האנשים בזוג שלגביו שאלנו שאלה וכל השאלות הללו היו עם נוכחים אחרים במסיבה! לכן, בשלב השני נחסכו לנו 10 שאלות כדי לבדוק האם פוג'י אכן מפורסם, ונקבל בסה"כ 6050 שאלות. ניתן להוכיח שזהו חסם תחתון למקרה הגרוע, אבל זה מורכב מידי לכאן 😊.