אולימפיאדת מדעי המחשב תשע״ח – פתרונות שלב א׳

פתרונות סופיים:

שאלה	תשובה
1	3
2	א. 20
	ב. 7
3	732
4	א. 21
	ב. 30

שאלה 1 – ביקור במבוך

בכל משבצת נרשום את מספר המהלכים המינימאלי הנדרש להגיע אליה, באופן הבא:

- עבור המשבצת בה האסימון נמצא בתחילת המשחק - נרשום "0".
- עבור כל משבצת ריקה (שלא רשום בה עדיין מספר) אליה ניתן להגיע במהלך אחד ממשבצת בה רשום "0" - נרשום "1".
- עבור כל משבצת ריקה (שלא רשום בה עדיין מספר) אליה ניתן להגיע במהלך אחד ממשבצת בה רשום "1" - נרשום "2".
- וכן הלאה, וכן הלאה, עד אשר לא יוותרו עוד משבצות ריקות במבוך.

בסופו של דבר, נקבל:

3	4	4		4	5	5	5
3	4		2	3		6	
3		0	1		5	6	5
2	2	1		3	4		5
3		1	2	2		5	5
2	2	1		3	4	4	4
	3		5		5		5
4	3	4	4		5	6	5

כפי שניתן לראות, מספר המהלכים הגדול ביותר הוא 6, וישנן 3 משבצות אליהן ניתן להגיע ב-6 מהלכים ולכן התשובה היא 3.

שאלה 2 – משחק לוח

<u>סעיף א׳</u>

ננתח תחילה את סוף המשחק. נזהה שהשחקן המפסיד יקבל בתורו האחרון לוח שבו רק המשבצת 1, ואז לא תהיה לו ברירה אלא לסמן משבצת זו ולהפסיד. כדי לקבל תובנות נוספות **ננתח את הבעיה עבור מקרים מצומצמים**, ונראה אם ניתן לזהות כלל שיהיה טוב לכל התחלה עם לוח של שתי שורות ומספר כלשהו של עמודות.

נשחק תחילה משחק שבו בלוח ישנן בהתחלה **רק המשבצות 1, 2, 11, 12**. ניווכח שצריך להיות השחקן הראשון (הפותח), ולסמן את משבצת מס׳ 12 – הימנית עליונה. אז, נעבור ללוח תחילי שבו המשבצות **1, 2, 3, 11, 12, 13**. ניווכח ששוב צריך להיות השחקן הראשון, ושוב לסמן את המשבצת הימנית עליונה. ניתן לבדוק מקרים נוספים, ואז להיווכח שיש לפעול לפי הכלל הבא: **אחרי כל תור שלי: בשורה התחתונה ישנה בדיוק משבצת אחת יותר מאשר בשורה העליונה, וזוהי המשבצת הימנית תחתונה.** שמירה על כלל זה אפשרית (ללא תלות בצעדי היריב) ותוביל תמיד לניצחון. לכן, **התשובה לסעיף זה היא: 20.**

<u>סעיף ב׳</u>

גם כאן נתחיל מניתוח מקרים מצומצמים, אבל הפעם צורתם התחילית תהיה לאו דווקא מלבן, ונזהה את מקרי הלוח השונים אשר בהם חשוב להיות שני; כלומר – בהם ניתן ליריב לשחק.

כדאי לנתח בצורה שיטתית – את המקרים שבהתחלה ישנן 4 משבצות (למשל, בין השאר המקרה של 1, 2, 5, 9), אז – מקרים תחיליים של 5 משבצות, וכן הלאה. ניתוח זה יראה בין השאר **שצריך להיות השחקן השני כאשר בלוח נותרות המשבצות 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10**. ישנם כמובן מקרים נוספים בהם צריך להיות השחקן השני, חלקם – מסעיף א׳. נראה שניתן להגיע למצב המתואר בצעד אחד, כשחקן הפותח במשחק, על ידי **סימון משבצת מספר 7**. כעת עלינו לוודא כי אכן המשך המשחק (לאחר סימון משבצת מספר 7) יוביל את השחקן הפותח לניצחון.

לאחר סימון משבצת זו, המשחק יכול להתפתח באחת משתי הדרכים הבאות:

א. אם השחקן השני יסמן את 2, 3, 4, 5, 9 או 10: השחקן הפותח יכול, בתורו השני, להפוך את הלוח לבן שתי שורות או בן שתי עמודות, המקיימות תכונה שמורה **הדומה** לזו המתוארת בסעיף א׳ - ההפרש בין שתי השורות או בין שתי העמודות הוא בדיוק משבצת אחת. משלב זה ואילך, השחקן הפותח ימשיך לשחק על פי אסטרטגיה הדומה לזו המתוארת בסעיף א׳ - וינצח במשחק.

ב. אם השחקן השני יסמן את 6: השחקן הפותח, בתורו השני, יסמן את משבצת מס׳ 4, כך שהלוח הנותר יהיה בצורת האות "L" ויהיה מורכב משורה אחת בדיוק ומעמודה אחת בדיוק, ושתיהן באותו האורך. במצב זה השחקן הפותח ימשיך ויפעל על פי הכלל הבא: **אחרי כל תור שלי: הלוח יהיה בצורת "L" ויהיה מורכב משורה אחת ועמודה אחת באותו האורך.** ניתן להיווכח כי גם שמירה על כלל זה אפשרית (ללא תלות בצעדי היריב) ותוביל את השחקן הפותח לניצחון.

שאלה 3 – שעון

נבחין כי בכל צביעה, בחירת הצבעים עבור המספרים 1-6 מקבעת בהכרח את הצבעים עבור 7-12. כמו כן, המספר 1 והמספר 6 צריכים להיות צבועים בצבעים שונים. לפיכך, פתרון הבעיה הנתונה שקול לפתרון הבעיה הבאה: מציאת מספר הדרכים השונות לצבוע מעגל של המספרים 1-6, כך שכל שני מספרים סמוכים יהיו צבועים בצבעים שונים.

אילו ששת המספרים לא היו מסודרים במעגל, אלא בשורה, אז מספר הדרכים השונות לצבוע אותם בארבעה צבעים היה: 3×3×3×3×3×4, שכן ישנן 4 אפשרויות לצבוע את המספר 1, ומשבחרנו עבור מספר 1 את הצבע שלו - עבור מספר 2 ישנן 3 אפשרויות (כל צבע, מלבד הצבע שבו נצבע מספר 1); עבור מספר 3 ישנן 3 אפשרויות (כל צבע, מלבד הצבע שבו נצבע מספר 2), וכן הלאה. אולם - מאחר וששת המספרים מסודרים במעגל ולא בשורה, יש להחסיר מהחישוב הנ"ל את כל הצביעות שבהן המספרים 1 ו-6 כן נצבעו באותו הצבע.

באופן כללי יותר - אם נגדיר צביעה "תקינה" כצביעה שבה כל שני מספרים סמוכים צבועים בצבעים שונים, אזי מספר הדרכים השונות לצבוע שורה של n מספרים צביעה תקינה עם ארבעה צבעים הוא $4 \times 3^{n-1}$ ועל מנת להגיע למספר הדרכים השונות לצביעה תקינה בארבעה צבעים של מעגל שבו n מספרים, יש להחסיר מהחישוב הנ"ל את כל הצביעות שבהן המספרים 1 ו-n כן נצבעו באותו הצבע.

נתבונן בשורה בת n מספרים שבה המספרים 1 ו-n כן נצבעו באותו הצבע. באמצעות "הדבקה" של המספר הראשון והאחרון - נגיע למעגל באורך $n-1$. הבחנה זו מאפשרת לנו להגדיר פונקציה רקורסיבית $f(n)$ המייצגת את מספר הדרכים השונות לצבוע מעגל של n מספרים צביעה תקינה בארבעה צבעים, כאשר את $f(n)$ נגדיר ונחשב באופן הבא:

$$f(n) = 4 \times 3^{n-1} - f(n-1)$$

תנאי העצירה של הרקורסיה הנ"ל הוא $f(2) = 4 \times 3$, כמספר הדרכים השונות לצביעה בארבעה צבעים מעגל בין 2 מספרים שצבועים בצבעים שונים.

בסך הכל, כדי למצוא את התשובה, יש לבצע את סדרת החישובים הבאה:

$$f(2) = 4 \times 3$$
$$f(3) = 4 \times 3^2 - f(2) = 36 - 12 = 24$$
$$f(4) = 4 \times 3^3 - f(3) = 108 - 24 = 84$$
$$f(5) = 4 \times 3^4 - f(4) = 324 - 84 = 240$$
$$f(6) = 4 \times 3^5 - f(5) = 972 - 240 = 732$$

כלומר, ישנן 732 דרכים שונות לצבוע את 12 מספרי השעון.

שאלה 4 – קלפים

בשלב זה לא יפורסמו ההסברים לפתרון בעיה זו.