

מערך שיעור בגישת המיזוג

שיעור מיזוג
1. יצירת עניין
2. חשיבה פעילה
3. חשיבה על חשיבה
4. העברה ויישום

נושא השיעור: ממוצעים

מיומנות החשיבה: חשיפת הנחות

כיתה: ו'-ח'

מתמטיקה

המקצוע:

מטרות השיעור

מבחינת מיומנויות החשיבה

התלמידים ילמדו לחשוף הנחות שעליהן נשענות מסקנות שלהם ושל אחרים. הם יפתחו מודעות לכך, שהנחות שהם מניחים מתבססות על סיבות מסוימות, ויתנסו בחשיפת הסיבות האלה.

מבחינת הנושא הנלמד

התלמידים יאמדו (לא יחשבו במדויק) ממוצעים בסדרות של מספרים, ויחשבו את הממוצעים של סדרות אלה. התלמידים יחדדו ויעמיקו את הבנתם בנושא "הממוצע", תוך חשיפה של הנחות מוטעות הכרוכות בו לעתים. הם ינתחו את ההנחות המוטעות וינסו לחשוף את מקורן.

שיטות ועזרים

מבחינת מיומנויות החשיבה

כלים: מפת חשיבה לחשיפת הנחות. מארגן חשיבה גרפי לחשיפת הנחות. **טכניקות עבודה:** עבודה בזוגות ועבודה כיתתית.

מבחינת הנושא הנלמד

סדרות של מספרים, מסודרות בצמדים, שלגביהן יש לחשב ממוצע. כל צמד של סדרות נועד לחשוף תפיסה שגויה ספציפית הקשורה למושג ה"ממוצע".

הערה: לתלמידים צריכה להיות היכרות קודמת עם מושג הממוצע; הם אמורים לדעת לחשב ממוצעים. ייתכן שיתברר שדרוש רענון קצר.

מהלך השיעור

1. יצירת עניין בנושא הנלמד ובמיומנות החשיבה

יצירת עניין
1. חשיבותה של המיומנות
2. מהלך החשיבה (כיצד חושבים?)
3. חשיבות הנושא הנלמד

• **אנו מבצעים פעולות רבות בחיי היום-יום על סמך הנחות שאנו מניחים. למשל, כשאנו נוסעים לים, אנו מניחים שאפשר יהיה להיכנס למים ולשחות. האם באמת אפשר תמיד להיכנס למים כשמגיעים לים? מדוע?**

תשובות אפשריות של תלמידים: לא תמיד אפשר להיכנס למים. לפעמים יש דגל שחור מפני שהים סוער, ואז אסור להיכנס. לפעמים המצילים שובתים ואז לא כדאי להיכנס למים (גם אם הים שקט). לפעמים יש במים מדוזות רבות ולא נעים להיכנס למים.

• **בכל המקרים הללו, כשהגענו לים מצאנו שאי אפשר להיכנס למים. במצב הזה, מסתבר לנו לפתע, שהנחותנו הן: שנוכל להיכנס למים.**

בדרך כלל אנו מגלים שהנחנו הנחה כאשר העולם אינו מתנהג בהתאם לה.

רשמו על הלוח את התרשים שלהלן:

נסענו לים ⇐ גילינו שאי אפשר להיכנס למים ⇐ שמנו לב שהנחנו הנחה

• אילו היינו מודעים להנחה שהנחנו לפני שיצאנו מהבית אל חוף הים, היינו יכולים לבדוק אותה. כיצד?

תשובות אפשריות: להקשיב לתחזית מזג האוויר כדי לדעת האם הים שקט; להתעדכן אצל חבר או שכן שחזרו זה עתה מהים; לטלפן לחבר שגר בסמוך לחוף ולבקש אותו לבדוק מה מצב הגלים כפי שזה נראה מחלון ביתו; וכדומה.

• הנחות שאנו מניחים מבלי לשים לב לכך נקראות הנחות סמויות. כל עוד האירועים סביבנו מתנהלים בהתאם לציפיותינו, אין אנו שמים לב להנחות הסמויות האלה. אם הים שקט ויש מציל, אנו שוחים בים, ואיננו שמים לב שהנחנו מראש שנוכל לעשות זאת.

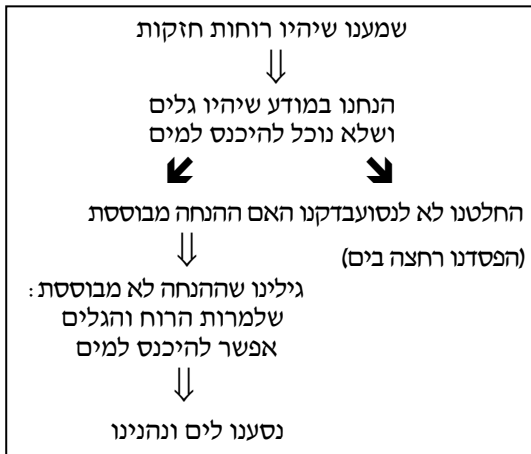
הוסיפו את המשפט "הנחנו הנחה סמויה: שנוכל להיכנס למים" מתחת למילים "נסענו לים":

נסענו לים ⇐ גילינו שאי אפשר להיכנס למים ⇐ שמנו לב שהנחנו הנחה
הנחנו הנחה סמויה: שנוכל להיכנס למים

• לפעמים אנחנו מודעים להנחה שהנחנו (כלומר, זו איננה הנחה סמויה אלא הנחה גלויה), אך איננו בודקים האם ההנחה מבוטלת. למשל, אנו שומעים את תחזית מזג האוויר ברדיו, לפיה צפויות רוחות חזקות, ואז אנו מניחים שלא ניתן יהיה להיכנס למים, ומחליטים לא לנסוע לים. אך לעתים

המצילים מתירים להיכנס למים למרות הרוחות והגלים. במקרה כזה, ההנחה שעליה הסתמכנו כשהחלטנו לוותר על הנסיעה לים ידועה לנו (היא אינה הנחה סמויה), אך אין היא מבוססת.

ציירו על הלוח (או הקרינו בשקף שהכנתם מבעוד מועד) את התרשים הממחיש את המקרה האחרון. הדגישו מהו ההפסד הנגרם כשלא בודקים האם ההנחה מבוססת.



• ננסה עכשיו לחשוב על חשיפת

הנחות באופן כללי, ולצורך כך ניעזר במפת חשיבה. מפת חשיבה זו נועדה להדריך אותנו תחילה בחשיפת הנחות, ולאחר מכן, בקביעה האם ההנחות האלה מבוססות.

מפת חשיבה לחשיפת הנחות

1. מהי הפעולה (האמונה או המסקנה) שלגביה אנו מבקשים לחשוף הנחות?
 2. מה עשויות להיות ההנחות שעליהן מבוססת הפעולה (האמונה או המסקנה)?
- ביחס לכל אחת מן ההנחות:**
3. מדוע הניחו זאת? (הסיבות)
 4. מהן העדויות שמאמתות או מפריכות את ההנחה?
 5. על סמך העדויות הללו – האם ההנחה מבוססת?

• הבה נבדוק כיצד יכולה מפת חשיבה כזו לעזור לנו בדוגמה הראשונה שלנו: (1) רצינו לחשוף הנחות לגבי פעולת הנסיעה לים. (2) ההנחה שחשפנו היא, שנוכל להיכנס לים. (3) סיבה אפשרית לכך שהנחנו הנחה זאת היא: נסענו לים בשבוע שעבר ואז נכנסנו לים, וחשבנו שמה שקרה אז יתקיים גם היום. (4) עדות נגד ההנחה יכולה להיות הודעה על שביתת מצילים, או תחזית מזג אוויר שלפיה הים סוער. (5) על סמך עדות כזאת, נגיע למסקנה שההנחה שנוכל להיכנס לים אינה מבוססת.

• יש חשיבות לבדיקת ההנחות הסמויות שלנו גם כאשר אנו עוסקים בנושאים מעולם המתמטיקה. כאשר אנו מתמודדים עם משימות מתמטיות, אנחנו מניחים הנחות, ולפעמים איננו בודקים האם ההנחות הללו מבוססות – דבר שעלול להביא אותנו לידי טעויות.

• לדוגמה, תלמיד שמוטלת עליו משימה לחבר את השבר $\frac{2}{3}$ עם השבר $\frac{3}{4}$, עלול להגיע למסקנה, מוטעית, שהסכום הוא $\frac{5}{7}$. האם תוכלו לומר, על איזו הנחה סמויה הוא הסתמך?

תשובה: ההנחה הסמויה של התלמיד היא, שכדי לחבר שני שברים יש לחבר את המספרים ש"למעלה" (המונים) כדי לקבל את המונה החדש $(2+3=5)$. הנחה סמויה שנייה היא, שיש לחבר את המספרים ש"למטה" (המכנים) כדי לקבל את המכנה החדש $(3+4=7)$. אלה הנחות סמויות מוטעות והן מובילות לתשובה שגויה.

• בשיעור זה נבדוק וננתח הנחות סמויות שאנו ואחרים מניחים לגבי מוצעים וזאת בעזרת השוואה בין ממוצעים. האם תוכלו לתת דוגמה מהחיים למצב שבו צריך לחשב ממוצע?

הדוגמה האופיינית היא חישוב ממוצע הציונים. אם התלמידים מתקשים למצוא דוגמאות אחרות, אפשר לסייע להם: המוכר בדוכן הפלאפל יודע שביום טוב הוא מוכר 200 מנות וביום פחות טוב רק 120 מנות. כמה מנות צריך המוכר להכין בממוצע ביום (כלומר, ביום "רגיל")? ודוגמה נוספת: כל בוקר אמיר צועד חצי קילומטר אל בית-הספר, וחוזר באותה הדרך בצהריים. פעמיים בשבוע הוא הולך למגרש הכדורגל, המרוחק קילומטר אחד מביתו. כדי לבקר חברים הוא הולך עוד שלושה קילומטרים במהלך השבוע. כמה קילומטרים הולך אמיר בממוצע ביום? אם נעלי ההליכה של אמיר "נגמרות" אחרי שנה – כמה קילומטרים הלך בהם אמיר?

2. חשיבה פעילה

בקשו מהתלמידים לעבוד בזוגות. חלקו להם את רשימת צמדי הסדרות שבעמוד זה. כמו כן, הקרינו את הרשימה באמצעות שקף או רשמו אותה על הלוח.

• **לפניכם רשימה ובה סדרות של מספרים: בכל שורה זוג סדרות. ביחס לכל אחד מהזוגות, החליטו מהו הממוצע הגבוה יותר מבין ממוצעי שתי הסדרות. עשו זאת על פי ה ע ר כ ה ב ל ב ד , ל ל א ח י ש ו ב מ מ ו צ ע . למשל, הסתכלו על הזוג הראשון: האם הממוצע של הסדרה 1, 1, 10, 10 גבוה יותר או נמוך יותר מהממוצע של הסדרה 1, 10, 10, 10?**

תשובות אפשריות של תלמידים: הממוצע של 1, 1, 10, 10 גבוה יותר; הממוצע של 1, 1, 10, 10 נמוך יותר; הממוצע של שתי הסדרות זהה; קשה לנחש בלי לחשב.

בשלב זה אל תבקשו מהתלמידים נימוקים והסברים לדעותיהם. את הנימוקים הם יצטרכו לחפש בעצמם בהמשך, במסגרת העבודה בזוגות. השתדלו להבליט את חילוקי הדעות בכיתה, אם יש כאלה (אם אין חילוקי דעות, בחרו זוג סדרות שקשה יותר להחליט ביניהן). רשמו את כל התשובות על הלוח או בשקף, בטור השמאלי, תחת הכותרת "הממוצע הגבוה".

• **המשיכו עתה לעבוד בזוגות: העריכו (מבלי לחשב) לאיזו סדרה, בכל זוג סדרות, יש ממוצע גבוה יותר. לגבי כל זוג של סדרות רשמו בטור השמאלי, תחת הכותרת "לאיזו סדרה ממוצע גבוה יותר" – "א", "ב", או "=". נסו לסיים את העבודה על הדף בתוך שתי דקות.**

(למורה: הזמן הקצר נועד לעודד ביצוע הערכות ולמנוע חישובים מדויקים.)

סדרה א'	סדרה ב'	לאיזו סדרה ממוצע גבוה יותר?
10 10 1 1	10 10 1	1
10 10 10 1	10 10 1	2
10 10 10 1 1	10 10 1	3
5 5	5 5 5 5 5	4
120	60 40 20	5
18 17 17 18	60 2 2 4	6
5 5	4 4 4 4 4	7
1 20	20 1 1 1 1	8
1 1 1 1 1 5	5 5	9
1 5	1 1 5 5 5 1	10
1 1 5 10 10	5 4 4 6 6	11
3 2 1 2 3	2 2 3 3 1	12
5 4 3 2 1	5 4 3 2	13

• **ננסה עתה למצוא יחד מהן ההנחות הסמויות שעליהן התבססתם לגבי כל אחת מ-13 המסקנות שהסקתם ברשימה. שימו לב: אנו עונים עתה על שאלה 2 של מפת החשיבה לחשיפת הנחות. הפנו את התלמידים שוב למפת החשיבה (על הלוח, בשקף, או בכרזה).**

• הדגישו בפני התלמידים: **מטרתנו כרגע היא לא לגלות מה נכון ומה לא נכון, אלא לגלות מהן ההנחות שאנו מסתמכים עליהן.**

למשל, נסתכל שוב בתרגיל הראשון. האם יש מי שמעריך שהממוצע של 1, 1, 10, 10 שווה לממוצע של 1, 10, 10? למי שעונה בחיוב: האם תוכלו להסביר מהן ההנחות המובילות אתכם למסקנה שלכם?

תשובה אפשרית (ושגויה, במקרה זה): אם אותם מספרים מופיעים בשתי הסדרות, הממוצעים שווים.

• האם יש גם מי שמעריך, שהממוצע של 1, 1, 10, 10 גדול יותר מהממוצע של 1, 10, 10?

למי שעונה בחיוב: האם תוכלו להסביר מהן ההנחות המובילות אתכם למסקנה שלכם?

תשובות אפשריות של תלמידים (שגויות כמובן): יש יותר מספרים בסדרה הראשונה; יש אותו מספר של עשיריות ("10") בשתי הסדרות, אבל בראשונה יש יותר מספרי "1", ולכן הסכום שלה גדול יותר.

• נבדוק עתה את התרגיל השני. האם יש מי שמעריך, שהממוצע של 1, 10, 10, 10 גדול מהממוצע של 1, 10, 10? למי שעונה בחיוב: האם תוכלו להסביר מהן ההנחות המובילות אתכם למסקנה שלכם?

תשובות אפשריות של תלמידים: בסדרה הראשונה יש יותר עשיריות; בשתי הסדרות יש אותם מספרים אבל בראשונה יש יותר עשיריות; הסדרה הראשונה ארוכה יותר.

בשעה שאתם עוברים עם התלמידים על הרשימה, הקפידו לשאול אותם על הערכות נכונות כמו גם על הערכות שגויות. השתדלו שנימת הדיבור שלכם לא תסגיר את נכונותן או אי-נכונותן של ההערכות הנבדקות.

רכזו את תשובות התלמידים על הלוח. עברו על התרגילים לפי הסדר והוסיפו לרשימה שעל הלוח הנחות חדשות שהתלמידים מעלים. לפי שעה, אל תבדילו בין הנחות מוצדקות והנחות שאינן מוצדקות – רשמו את כולן. הבהירו לתלמידים את המצב: שימו לב, כי חלק מההנחות שאנחנו רושמים מוצדקות וחלק אינן מוצדקות. בהמשך נבדוק יחד אילו מהן מוצדקות ואילו לא.

להלן הנחות שתלמידים עשויים להעלות במהלך פעילות זו (עזרו להם להגיע לרשימה כזאת אם הם מתקשים):

– אם אותם המספרים מופיעים בשתי הסדרות, הממוצעים שווים;

– הממוצע גדול יותר כאשר סכום האיברים גדול יותר;

– סדר האיברים לא משנה;

– כאשר מספר האיברים זהה – הממוצע גדול יותר כאשר סכום האיברים גדול יותר;

– הממוצע גדול יותר כאשר המספרים בסדרה גדולים יותר;

– לסדרה שבה מופיע המספר הגדול ביותר יש הממוצע הגדול ביותר;

– אם מספר האיברים ברשימה גדול – הממוצע גדול.

עתה חלקו לתלמידים את מארגן החשיבה הגרפי לחשיפת הנחות.

• מארגן חשיבה זה יקל עלינו לעקוב אחר דרך החשיבה שלנו בזמן שאנו מנסים לחשוף הנחות. רשמו בראש המארגן, כי הפעולה שלגביה אנו רוצים לחשוף הנחות היא **הערכה של ממוצעים**. אל הטור הימני, טור ה"הנחות", העתיקו את רשימת ההנחות שנאספו ונרשמו כאן על הלוח (ראו מארגני חשיבה בהמשך).

• **נעבור עתה לשאלה השלישית שבמפת החשיבה לחשיפת הנחות, וננסה להבין מדוע הנחנו את הנחות שברשימה.** עברו יחד עם התלמידים על רשימת הנחות שנרשמה על הלוח.

הערה למורה: זהו שלב שבו התלמידים עלולים להתקשות. כדאי לדלג על שלב זה בכיתות מסוימות, ולחזור אליו בסיום, או אפילו לוותר עליו בכלל.

• **הנחנו, שאם אותם המספרים מופיעים בשתי הסדרות – גם הממוצעים שווים. מהן הסיבות שיכולות להוביל אותנו להניח הנחה זו?**

תשובה אפשרית: **לפעמים השיקולים שלנו פזיזים ופשטניים מדי.** במקרה זה, אפשר לפרש את העובדה שהממוצע תלוי במספרים שבסדרה בפשטנות כך: אם מופיעים אותם המספרים, אז הממוצע הוא אותו ממוצע.

• **רשמו סיבה זו בטור השני במארגן החשיבה, תחת הכותרת "סיבות להנחה".**

הערה למורה: במקרה זה, הסיבה כבר כוללת את האבחון שההנחה שגויה. אולם, אפשר לחפש ולנסח סיבות להנחות גם מבלי להתייחס לנכונותן או לאי-נכונותן.

• **עתה, הבה נבדוק יחד אם נוכל למצוא עדויות בעד או נגד ההנחה, שאם אותם מספרים מופיעים בסדרות – גם הממוצעים של הסדרות שווים. האם תוכלו להצביע על מקרה שבו ההנחה מוצדקת? האם תוכלו להצביע על מקרה שבו ההנחה אינה מוצדקת? חפשו מקרים כאלה (עדויות כאלה) בין 13 התרגילים שרשמנו על הלוח. עבדו שוב בזוגות. הפעם, חשבו במדויק את הממוצעים.**

הקציבו לתלמידים די זמן כדי לחשב את הממוצעים ולחפש זוגות של סדרות שבהן מופיעים אותם המספרים.

תשובות אפשריות: בשלושת צמדי הסדרות הראשונים, מופיעים אותם המספרים בשתי הסדרות ("1"-ים ו"10"-ים), אך בכל המקרים הללו הממוצעים אינם שווים. מקרים כאלה, שבהם ההנחה אינה מתקיימת, מהווים עדות נגד ההנחה.

• **שימו לב לנקודה חשובה: בחישוב ממוצעים, ובמתטיקה בכלל, די למצוא עדות אחת נגד הנחה, כדי להוכיח שההנחה בלתי מבוססת. לכן, נשלים את השורה הראשונה במארגן החשיבה, ונרשום "–".**

• **כדי שלא נשכח שההנחה שהנחנו מוטעית, סמנו עתה X גדול על ההנחה שבתחילת השורה. הדגימו פעולה זו בטבלה שעל הלוח.**

• **נעבור עתה לניתוח ההנחה השנייה שרשמנו במארגן החשיבה: שהממוצע גדול יותר כאשר סכום האיברים גדול יותר. איזו סיבה יכולה להוביל להנחה זו?**

תשובות אפשריות: **כשמחשבים ממוצע, הדבר הראשון שעושים בדרך כלל הוא לחבר את כל האיברים ולמצוא את הסכום. כשמחשבים ממוצע של שני מספרים, ככל שהסכום גדול יותר, גם הממוצע גדול יותר.**

מארגן חשיבה גרפי לחשיפת הנחות בשלב זה:

חשיפת הנחות				
הפעולה, האמונה או המסקנה:				
השוואת ממוצעים של שתי סדרות מספרים				
שיפוט	עדייות נגד ההנחה	עדייות בעד ההנחה	הסיבות להנחה	ההנחה
-	ל- 1, 1, 10, 10 ול- 1, 10, 10 ממוצעים שונים	אין	לפעמים השיקולים שלנו פזיזים ופשטניים מדי. במקרה זה, הממוצע תלוי במספרים שבסדרה. אפשר לפרש זאת בפשטנות כך: אם מופיעים אותם מספרים, אז הממוצע הוא אותו הממוצע.	אם אותם המספרים מופיעים בשתי הסדרות, גם הממוצעים שווים
				הממוצע גדול יותר כאשר סכום האיברים גדול יותר
				סדר האיברים לא משנה
				כאשר מספר האיברים זהה, הממוצע גדול יותר כאשר סכום האיברים גדול יותר
				הממוצע גדול יותר כאשר המספרים בסדרה גדולים יותר
				הסדרה שבה מופיע המספר הגדול ביותר היא בעלת הממוצע הגדול ביותר
				אם מספר האיברים בסדרה גדול יותר - גם הממוצע גדול יותר

שיפוט:
+ ההנחה מבוססת
- ההנחה לא מבוססת
? אי אפשר לקבוע

- רשמו את הסיבות הללו במארגן החשיבה. עתה חפשו עדויות נגד ההנחה. זכרו: במתמטיקה די בעדות אחת נגד הנחה כדי להוכיח שהיא בלתי מבוססת!

תשובות אפשריות: בצמד מס' 6 הסכום גדול יותר בסדרה א' וגם הממוצע גדול יותר בסדרה זו. זוהי עדות בעד ההנחה. בצמד מס' 4 הסכום גדול יותר בסדרה ב' אבל הממוצע שווה בשתי הסדרות. זוהי עדות נגד ההנחה. בצמד מס' 1 הסכום גדול יותר בסדרה א' אך הממוצע של סדרה זו דווקא קטן יותר. זוהי עדות נוספת נגד ההנחה.

- רשמו במארגן החשיבה את העדויות שמצאתם, ובטור האחרון רשמו האם ההנחה מבוססת, בלתי מבוססת, או שאי אפשר לקבוע. ייתכנו תשובות שונות, בהתאם לעדויות שהתלמידים מצאו. ודאו שהתלמידים משתכנעים בסופו של דבר שההנחה היא בלתי מבוססת.

• מצאנו שההנחה, שלפיה הממוצע גדול יותר כאשר סכום האיברים גדול יותר אינה מבוטאת. הבה נחזור ונבדוק את הסיבות שרשמנו ואשר הובילו אותנו להנחה זו. הצביעו על המקום שבו נרשמו הסיבות להנחות במארגן החשיבה שעל הלוח.

• שימו לב: נכון שכאשר מחשבים ממוצע, הדבר הראשון שעושים הוא למצוא את הסכום של האיברים. עם זאת, אנו יודעים שאחר כך צריך גם לחלק את הסכום במספר האיברים; ככל שיש יותר איברים, תוצאת החילוק תהיה קטנה יותר. הסכום של הסדרה 1, 10, 10, 1 הוא 21, והממוצע שלה הוא 7. הסכום של הסדרה 1, 1, 10, 10 הוא גדול יותר – 22, אך את הסכום הזה צריך לחלק ב-4 ולא ב-3, ולכן הממוצע של הסדרה השנייה הוא רק 5.5.

• צדקתם גם כשאמרתם שכאשר מחשבים ממוצע של שני מספרים – ככל שהסכום גדול יותר, גם הממוצע גדול יותר. למשל: הממוצע של 30, 40 גדול יותר מהממוצע של 25, 40. שימו לב שזהו מקרה מאוד מסוים (אנו קוראים לזה גם: "מקרה פרטי") של השוואת סדרות: לכל הסדרות מהסוג שמדברים עליו כאן, יש אותו מספר איברים. עם זאת, כאשר משווים סדרות שמספר האיברים בהן שונה, הממוצע הגדול יותר הוא לא דווקא זה של הסדרה שיש בה יותר איברים. האם תוכלו לתת דוגמה משלכם לצמד סדרות כזה?

הערה למורה:

מחקרים מראים שכישלונות במתמטיקה נובעים במקרים רבים משימוש לא מודע שעושים תלמידים בתפיסותיהם הנאיביות (והשגויות) את עולם המספרים (דוגמת ההנחות הסמויות על אודות ממוצעים – שאותן אנו חושפים בשיעור זה). לכן נודעת חשיבות לבחינה מפורטת של כל ההנחות שהתלמידים הניחו ושל הסיבות שהובילו אותם להנחות אלה, כמודגם לעיל. בחינה כזו תביא להעלאת תפיסות נאיביות אלו למודעות התלמיד, וכך תסייע להם להעמיק באופן מהותי את הבנתם המתמטית.

הנחו את התלמידים להמשיך במילוי מארגן החשיבה שורה אחר שורה. בדקו אם אפשר להפחית את הסיוע הניתן על ידכם. על כל הנחה שנמצאה בלתי מבוססת, סמנו X גדול בטור הראשון במארגן החשיבה, המתמלא בהדרגה, שעל הלוח. נתחו יחד עם התלמידים את הסיבות שהובילו אותם להנחות המוטעות. במקרים רבים יש בהנחות אלה גרעין מבוסס, המתאים למקרה פרטי, אך אינו נכון כאשר מכלילים ממנו למקרים אחרים.

עם סיום הפעילות, ייוותרו במארגן החשיבה הנחות מבוססות בלבד על אודות ממוצעים (על ההנחות הבלתי מבוססות סומנו איקסים). במקרה שהודגם, שתי ההנחות שייותרו הן:

– סדר האיברים בסדרה אינו משנה (זהו המקרה, למשל, בצמד סדרות מס' 12);

– כאשר מספר האיברים זהה, הממוצע גדול יותר כאשר סכום האיברים גדול יותר (צמד מס' 6).

דוגמה למארגן חשיבה מלא מובאת בהמשך.

אבחנות נוספות לגבי ממוצעים של סדרות, שעשויות לעלות תוך כדי השיעור כהנחות, יפורטו להלן. ניתן לשלבן ברשימת ההנחות המנותחות על ידי התלמידים. ניתן גם לבנות צמדי סדרות נוספים שימחישו אותן.

– כאשר הסכום של שתי הסדרות זהה, הממוצע הגדול יימצא בסדרה שבה מספר האיברים קטן יותר (צמד מס' 5);

- כאשר כל האיברים בסדרה זהים זה לזה, הממוצע של הסדרה שווה לאותו איבר (צמד מס' 4);
- כשסדרה אחת היא "כפולה" של השנייה, כלומר, כל האיברים בסדרה הראשונה מופיעים בדיוק פעמיים, או בדיוק 3 פעמים בסדרה השנייה, ממוצעי שתי הסדרות זהים (צמד מס' 10);
- כאשר שתי הסדרות זהות בכל האיברים פרט לאחד, הממוצע הגדול יותר נקבע על פי האיבר יוצא הדופן (אין דוגמה כזו בסדרות שהובאו).
- כאשר שתי הסדרות זהות בכל האיברים, ובאחת הסדרות יש איבר אחד נוסף, הממוצע של אותה סדרה גדול יותר אם אותו איבר גדול מן הממוצע של שאר איברי הסדרה (צמד מס' 2).
להלן דוגמה למארגן חשיבה מלא שאפשר להגיע אליו בסוף השיעור.

חשיפת הנחות				
הפעולה, האמונה או המסקנה: השוואת ממוצעים של שתי סדרות מספרים				
שיפוט	עדיפות נגד ההנחה	עדיפות בעד ההנחה	הסיבות להנחה	ההנחה
-	ל- 1, 1, 10, 10 ול- 1, 10, 10 ממוצעים שונים	אין	לפעמים השיקולים שלנו פזיזים ופשטניים מדי. במקרה זה, הממוצע תלוי במספרים שבסדרה. אפשר לפרש זאת בפשטות כך: אם מופיעים אותם המספרים, אז הממוצע הוא אותו ממוצע.	אם אותם המספרים מופיעים בשתי הסדרות , הממוצעים שווים
- [אלא אם מספר האיברים בשתי הסדרות זהה]	הממוצע של 1, 1, 100 קטן מהממוצע של 40, 40	הממוצע של 40, 30 גדול מהממוצע של 40, 25	כשמחשבים ממוצע של שני מספרים, ככל שהסכום גדול יותר, גם הממוצע גדול יותר	הממוצע גדול יותר כאשר סכום האיברים גדול יותר
+	אין	ל- 3, 2, 1, 2, 3 ול- 2, 3, 3, 1 יש אותו הממוצע	חישוב ממוצע כרוך בפעולת חיבור, שבה הסדר לא משנה	סדר האיברים לא משנה
+	אין	ל- 18, 17, 17, 18 יש ממוצע גדול מאשר ל- 2, 2, 4, 60. סכומי האיברים הם, בהתאמה: 70 ו- 68	כשמספר האיברים זהה, מחלקים את הסכום באותו המספר ולכן מהסכום לבדו אפשר להסיק לגבי הממוצע	כאשר מספר האיברים זהה, הממוצע גדול יותר כאשר סכום האיברים גדול יותר
- [אלא אם מספר בסדרה אחת יש מספר בסדרה השנייה שגדול או שווה לו]	ל- 5, 5, 5, 200, 100 ממוצע קטן יותר מאשר ל- 80, 70	ל- 120 ממוצע גדול יותר מאשר ל- 60, 40, 20	אינטואיטיבית, אנו שמים לב יותר למספרים הגדולים	הממוצע גדול יותר כאשר המספרים בו גדולים יותר
-	ל- 5, 5, 5, 200, 100 ממוצע קטן יותר מאשר ל- 80, 70	ל- 120 ממוצע גדול יותר מאשר ל- 60, 40, 20	אינטואיטיבית, אנו שמים לב יותר למספר הגדול ביותר	הסדרה שבה מופיע המספר הגדול ביותר היא בעלת הממוצע הגדול ביותר
-	ל- 1, 1, 1, 1, 20 ממוצע קטן יותר מאשר ל- 20, 1		ככל שמגדילים את מספר האיברים בסדרה גדל גם הסכום של הסדרה	אם מספר האיברים בשימוש גדול , הממוצע גדול

שיפוט:
+ ההנחה מבוססת
- ההנחה לא מבוססת
? אי אפשר לקבוע

3. חשיבה על חשיבה (מטאקוגניציה)

דיון מטאקוגניטיבי

1. זיהוי המיומנות
2. זיהוי שלבי התהליך
3. תפקיד וחשיבות כל שלב
4. הערכת החשיבה: האם מהלך החשיבה היה יעיל? האם ניתן לשפרו? איך תעשו זאת בעתיד?

• הבה נחשוב עכשיו על תהליך החשיבה שביצענו. כיצד חשבתם לאורך תהליך חשיפת ההנחות? תארו מה עשיתם בשלב ראשון ומה עשיתם בכל שלב ושלב אחר כך?

רצוי שבתגובות התלמידים תיכללנה שאלות המפתח המופיעות במפת החשיבה של חשיפת ההנחות. אם שאלות מסוימות חסרות בדיון, כווננו את הדיון לחשיבותן של שאלות אלה. למשל, מה קורה אם לא מתייחסים אליהן?

• האם הרגשתם שהיבטים מסוימים בפעילות זו היו קשים? כיצד תוכלו לבצע את הפעילות בקלות רבה יותר בפעם הבאה?

צפויות תשובות שונות. למשל, התלמידים עשויים להצביע על הקושי להעריך ממוצע מבלי לחשב אותו. זוהי הזדמנות לומר כמה מילים על החשיבות של הערכת ממוצעים במצבים יום-יומיים (כמה פיצוחים צריך לקנות כשמזמינים חברים למסיבה? כמה מים צריך לקחת כשיוצאים בקבוצה לטיול בנגב?).

תלמידים עשויים להצביע על קושי בזיהוי הנחות שהם מניחים ובניסוחן. זוהי הזדמנות להזכיר להם את הדוגמאות שניתנו בתחילת השיעור ולומר, כי עצם המודעות לכך שאנו מניחים הנחות מסייעת לנו לחפש אותן הנחות בחיי היום-יום, כמו גם במתמטיקה.

תלמידים עשויים להצביע גם על קושי במציאת הסיבות להנחות שהם מניחים. אכן, זוהי אולי המשימה הקשה ביותר במסגרת שיעור זה. הדרך הטובה ביותר לסייע בנקודה זו היא באמצעות קונקרטיזציה של הדיון: על ידי חיפוש דוגמאות שבהן הסיבות מבוססות, ועל ידי חיפוש הדומה והשונה בינן לבין המקרה הכללי.

• מה דעתכם על דרך זו של חשיפת הנחות? האם זוהי דרך טובה? מהם יתרונותיה ומהם חסרונותיה?

התשובות יהיו שונות ועשויות לכלול את:

יתרונות:

השיטה עוזרת לנו להיות מודעים לטעויות שלנו ולסיבות להתרחשותן;

השיטה עוזרת לנו להבין את הטעויות שלנו וכיצד להימנע מהן בעתיד;

השיטה עוזרת לסדר את המחשבות ולהתייחס בשיטתיות לצעדים שאנחנו עושים;

השיטה משפרת את הביטחון בצעדים שאנחנו עושים משום שאנו מתייחסים לכל צעד בביקורתיות;

השיטה גורמת לנו לפעול מתוך הבנה של מה שאנחנו עושים.

חסרונות:

העבודה בדרך זו מייגעת ונמשכת זמן רב;

הנחות רבות שאנחנו מניחים הן נכונות, ולכן, במקרים רבים הבדיקה לא תלמד אותנו שום דבר חדש.

• **מתי כדאי לעסוק בחשיפת הנחות ובבדיקתן?**

תלמידים עשויים להעדיף את דרך העבודה הזו כאשר אינם בטוחים במסקנות שלהם (בנושאים שונים) או כאשר למסקנות אלה נודעת חשיבות רבה במיוחד.

• **כיצד תוכלו להבטיח שאכן תשתמשו בתהליך החשיבה שאותו למדנו בשיעור זה גם בעתיד?**

התלמידים עשויים להציע: נסתכל על התוכנית שרשמנו לפני כל שיעור במתמטיקה. כשאנחנו רוצים לעשות משהו חשוב, נשאל את עצמנו מהן ההנחות שאנו מניחים. וכד'.

4. העברה ויישום של מיומנות החשיבה

העברה מיידיית:

• **חשבו על מסקנה שהסקתם בימים האחרונים, או על החלטה מסוימת שקיבלתם על עצמכם לבצע על סמך מסקנה זו. חשבו עליה באמצעות השאלות המופיעות במפת החשיבה לחשיפת ההנחות. אחרי שתבדקו את המסקנה שלכם על סמך מהלך החשיבה שבמפה, ציינו עד כמה אתם מרגישים בטוחים בשלבים השונים של מהלך חשיבתכם על פי המפה שבה השתמשתם.**

רענון בשלב מאוחר יותר במקצועות אחרים:

מצאו בשיעורי הספרות, ההיסטוריה או התנ"ך דמות אנושית שהתלמידים למדו עליה בחודש האחרון ואשר ביצעה פעולה חשובה או מורכבת. בקשו מהם לשים את עצמם במקום אותה הדמות, ולנסות לגלות, באמצעות המפה לחשיפת הנחות, אילו הנחות הנחו אותה בפעולתה.