ריצוף במכפלות

פיתוח וכתיבה: צבי שלם, גלי שמעוני

מערכת: ד"ר אבי פולג

מהדורת תשע"ד

נושא השיעור: פירוק לגורמים

כיתה: ד'

הפרק הרלוונטי בתכנית הלימודים: פירוק לגורמים

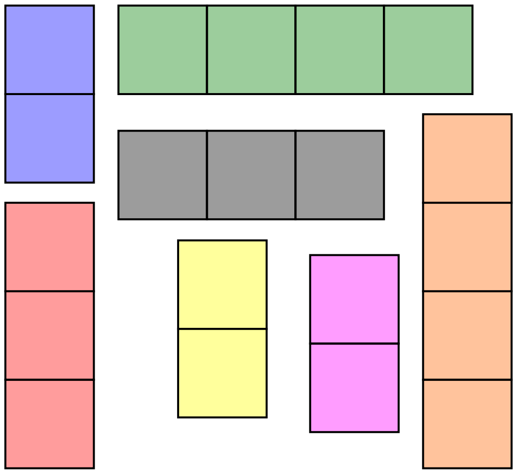
משך הזמן המומלץ: 90 דקות.

הקדמה למורה

הפעילות שלפנינו מיועדת לתלמידים הלומדים בסוף כיתה ד'. מרכז הפעילות הוא הנושא פירוק לגורמים. התלמידים יקבלו פאזלים מאתגרים, והם יתבקשו לפתור אותם. הנה דוגמה לפאזל כזה:

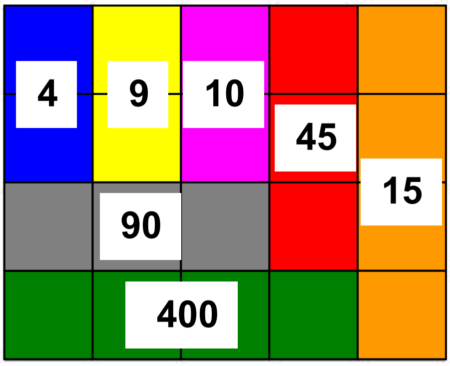
4 9 10 15 45 90 400

1	3	2	5	1
4	3	5	3	1
6	3	5	3	5
5	4	5	4	3



בכל אחת ממשבצות הלוח רשומים אחד מן המספרים השלמים 1-6. בפעילות לא יופיעו מספרים גדולים מ- 6. המשימה היא לרצף את הלוח באמצעות כל אחת מן הצורות הנמצאות לצדו כך שמכפלות המספרים שיכסו המצולעים השונים, יתאימו למספרים הרשומים מעל ללוח. חשוב לשים לב שהצורות צריכות להיות מונחות על הלוח כפי שהן מצוירות – בלא סיבוב או היפוך.

הנה פתרון הפאזל לעיל. למען הנוחיות נציג אותו בשתי צורות:



בפתרון כדאי להתמקד בשני סוגי אילוצים: אילוץ אחד הוא חישובי מספרי של מכפלות המספרים, ואילו האילוץ האחר הוא אילוץ גיאומטרי – הלוח חייב להתמלא לחלוטין בצורות הנתונות.

התבוננות במשימה מגלה שהידע המוקדם הנדרש הוא שליטה בפירוק לגורמים. הבה נסתכל מעט על התרגילים שהתקבלו בתוך הפאזל. נתחיל במלבן הכתום האנכי בן 4 המשבצות המכסה מספרים שמכפלתם 15. במקרה שלנו: $5\times3\times1\times1=15$. במהלך הפתרון כדאי לפרק את 15 לגורמים הראשוניים שלו: $5\times3=15$. בתרגיל זה אנו למדים שאפשר להוסיף מספרי 1 כרצוננו, והמכפלה תישאר 15. עניין זה יבוא לידי ביטוי בדף ההקרנה הפותח של הפעילות, אשר יהווה הכנה להמשך.

נסתכל כעת על המלבן האפור האופקי בן 3 המשבצות, המכסה מספרים שמכפלתם 90. במקרה שלנו: $6\times5\times3=90$. הפירוק לגורמים ראשוניים של המספר 90 הוא $5\times3\times3\times2=90$. כדי לקבל את המכפלה $6\times5\times3$ יש צורך "לאחד" את שני הכופלים 2 ו- 3 לכופל אחד שהוא 6. שימו לב שהתנאי שהמספר הגדול ביותר בפאזל הוא 6, אינו מאפשר "לאחד" שני גורמים אחרים מתוך: $5\times3\times3\times2$. אם ננסה "לאחד" למשל את שני מספרי ה- 3, נקבל אמנם מכפלה ששווה לתשעים: $5\times9\times2=90$, אך המספר 9 אינו מתאים לפאזל שלנו. למעשה, בהינתן שהמספר הגדול ביותר בפאזלים הוא 6, הרי "שהאיחודים" היחידים האפשריים הם 2×2 או 2×3. הרעיון הזה יוצג לתלמידים בדף ההקרנה הפותח של השיעור.

מהלך השיעור

- התחילו בהקרנה של דפי ההקרנה 1-3. בכל אחד מן הדפים האלה יש שאלה העוסקות בפירוק לגורמים. פתרון שאלות אלה יסייע לתלמידים בהמשך כאשר יתמודדו עם הפאזלים של הפעילות. דונו עם התלמידים בכל אחת מן השאלות.
- הקרינו את דף הקרנה מספר 4 המפרט את חוקי הפאזל ופאזל ראשון לפתרון במליאה. דונו על התלמידים ברעיונות שרשמנו בשלב פתרון המשימה - מיד לאחר דף ההקרנה.
- חלקו לתלמידים את דף משימה 1 ובו 2 פאזלים לעבודה עצמית. אין הכרח לדון במליאה בפתרונות שלו. תוכלו לדון בו באופן פרטני בזמן עבודת התלמידים.
- תלמידים זריזים יקבלו את דף משימה 2 הכולל עוד פאזלים. התלמידים יוכלו לעבוד על דף זה בכיתה או בבית.

משך הזמן המתאים לפעילות הוא שיעור אחד בן 90 דקות.

שאלת הכנה ראשונה

רשמו את המספר 15 כמכפלה של 5 מספרים שלמים. המספרים השלמים האלה צריכים להיות מבין המספרים 1,2,3,4,5,6. מותר להשתמש יותר מפעם אחת באותו המספר.

שאלת הכנה שניה

רשמו את המספר 20 כמכפלה של 4 מספרים שלמים. המספרים השלמים האלה צריכים להיות מבין המספרים 1,2,3,4,5,6.

מצאו שני פתרונות שונים למשימה.

שאלת הכנה שלישית

1. פרקו את המספר 60 לגורמים הראשוניים שלו – רשמו אותו כמכפלה של מספרים ראשוניים.

2. רשמו את המספר 60 כמכפלה של 4 מספרים שלמים מבין 1-6.

   מצאו 3 פתרונות שונים למשימה.

פתרון שאלות ההכנה שבדפי ההקרנה

דף הקרנה 1

המשימה היא לפרק את המספר 15 למכפלה של 5 מספרים מבין המספרים 1-6.

ייתכן שהתלמידים יהיו מופתעים תחילה, אך סביר שלבסוף יגיעו אל הפתרון הזה: הפירוק של 15 למכפלה של מספרים ראשוניים הוא 5×3. הדרך היחידה להוסיף כאן כופלים היא להשתמש במספר 1 שלוש פעמים. **5×3×1×1×1**

דף הקרנה 2

המשימה היא למצוא שתי דרכים שונות לרישום המספר 20 כמכפלה של 4 מספרים שלמים מבין המספרים 1-6.

הפירוק של המספר 20 למכפלה של מספרים ראשוניים הוא: 5×2×2. כמו שעשינו בפתרון השאלה מדף הקרנה א', אפשר להוסיף כאן את הכופל 1 פעם אחת: **5×2×2×1**. הפתרון השני נובע מכך שאנו יכולים לרשום במקום 2×2 את המספר 4 שאינו ראשוני, כך נקבל 5×4=20. כעת יהיה עלינו להוסיף את המספר 1 פעמיים: **5×4×1×1**. דונו עם התלמידים בכך שהחלפה של 2×2 ב- 4 היא האפשרות היחידה כאן. לכאורה אפשר להחליף את 5×2 ב- 10, אך המספרים המותרים לשימוש הם מבין המספרים 1-6 בלבד.

דף הקרנה 3

המשימה היא לפרק את המספר 60 לגורמיו הראשוניים, ולאחר מכן למצוא שלוש דרכים שונות לרישום המספר 60 כמכפלה של 4 מספרים שלמים מבין 1-6.

חשוב להבין שכל עוד אנו עוסקים במספרים קטנים כמו 15 או 20, התלמידים יכולים לפתור את המשימה בצורה לא מסודרת. רבים מהם לא ישתמשו בפירוק לגורמים מסודר. המספר 60 גדול יותר מקודמיו, והוא גם לא נמצא בלוח הכפל. חשיבה לא מסודרת עלולה לגרום לתסכול. על כן ביקשנו תחילה לפרק את המספר 60 למכפלת הגורמים הראשוניים שלו: **5×3×2×2**. קיבלנו את אחד משלושת הפתרונות של המשימה. התלמידים אמורים לדעת כיצד לבצע פירוק כזה – באמצעות טבלה או באמצעות עץ. כעת חשוב לראות את האנלוגיה לפתרון השאלה בדף הקרנה 2. אפשר להחליף את 2×2 ב- 4, ואז לקבל את הפתרון: **5×3×4×1**, ואפשר גם להחליף את 3×2 ב- 6 ולקבל את הפתרון: **5×6×2×1**.

חשפנו כאן את התלמידים לכל הרעיונות המספריים שהם עשויים להידרש להם בפתרון הפאזלים.

- שימוש בכופל 1 לפי צרכינו
- החלפת 2×2 ב- 4
- החלפת 3×2 ב- 6

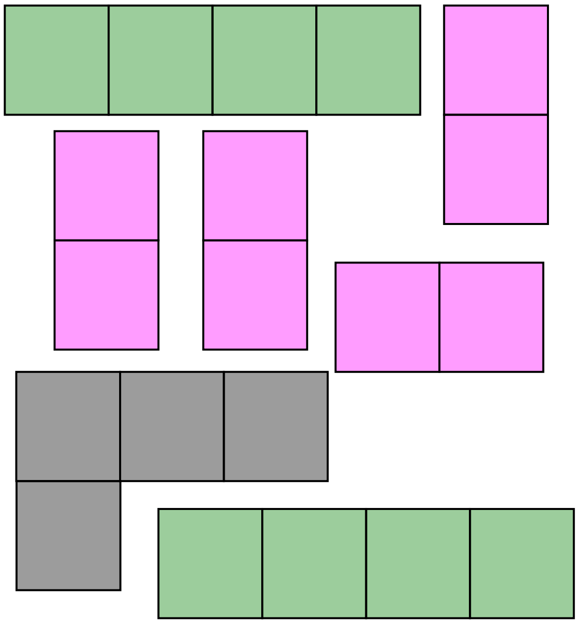
בכל זאת מאחר שהפאזלים יכילו גם מספרים הגדולים הרבה יותר מ- 60, מומלץ שתתנו לתלמידים כעת מספר משימות של פירוק לגורמים של מספרים גדולים יותר, כמו 400 או 135. לאחר מכן עברו לדף הקרנה מספר 4. בדף זה מפורטים כללי הפאזלים, ואף כולל פאזל אחד לדוגמה לפתרון במליאה.

שברים במצולעים – היכרות

התבוננו בלוח, בצורות שמימינו ובמספרים שמעליו:

2 3 6 12 15 30 60

1	1	6	2	3
2	3	2	1	1
5	3	1	4	3
3	2	1	5	5



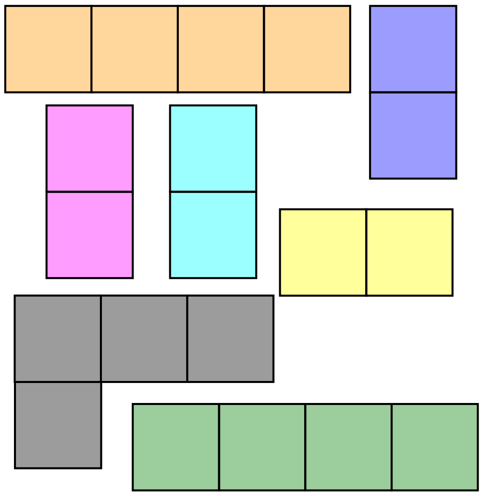
המשימה היא לרצף את הלוח בצורות הנתונות בלי לסובב אותן או להפוך אותן ובלי שיחפפו זו את זו.

על הצורות לכסות את כל הלוח, והמכפלות של המספרים המכוסים בצורות השונות יתאימו למספרים הרשומים מעל ללוח.

פתרון הפאזל בדף הקרנה 4

2   3   6   12   15   30   60

1	1	6	2	3
2	3	2	1	1
5	3	1	4	3
3	2	1	5	5



המכפלות הראשונות המושכת את העין הן 2 ו- 3. מספרים אלה קטנים וקלים לפירוק – רק מכפלה שלהם במספרי 1 אפשרית. המספר 2 אינו פשוט לאיתור כיוון שיש לו אפשרויות רבות על הלוח:

1	1	6	2	3
2	3	**2**	**1**	1
5	3	1	4	3
3	2	1	5	5

1	1	6	**2**	3
2	3	2	**1**	1
5	3	1	4	3
3	2	1	5	5

1	1	6	2	3
2	3	**2**	**1**	**1**
5	3	**1**	4	3
3	2	1	5	5

1	1	6	2	3
2	3	2	1	1
5	3	1	4	3
3	**2**	**1**	5	5

1	1	6	2	3
2	3	2	1	1
5	3	1	4	3
3	2	1	5	5

1	1	6	2	3
2	3	**2**	1	1
5	3	**1**	4	3
3	2	1	5	5

גם למספר 3 יש מספר אפשרויות שיבוץ.

אנו ממליצים לערוך כאן דיון במהלכו אתם מציבים לתלמידים משימות קטנות שיוליכו בסופו של דבר אל פתרון הפאזל. הנה הראשונה:

- **מצאו את כל אפשרויות הכיסוי עבור המכפלה 2**

על התלמידים יהיה לגלות את כל ששת המצבים לעיל.

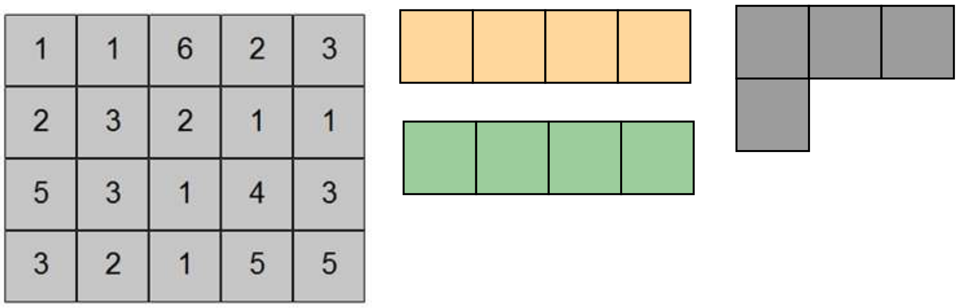
כעת הפנו אל התלמידים את המשימה השנייה:

- **מצאו את כל אפשרויות הכיסוי עבור המכפלה 60**

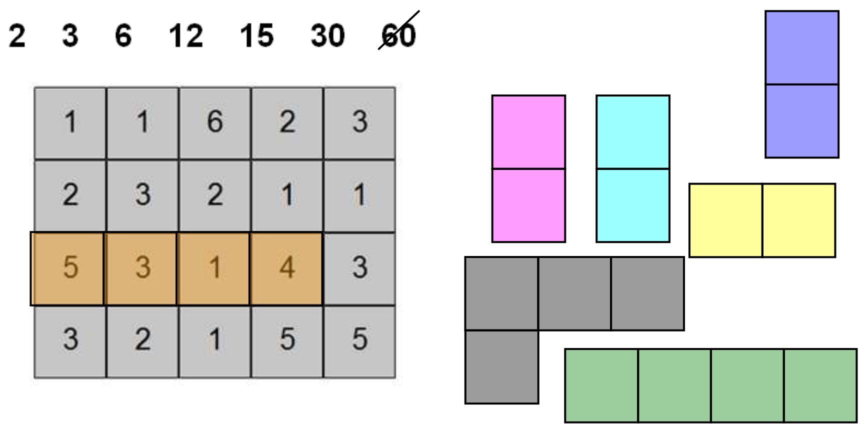
התלמידים אמורים לזכור שבדף הקרנה 3 הופיעה שאלה העוסקת במספר זה. הזכירו להם את שאלה זו ואת פתרונותיה. ביקשנו לרשום את 60 כמכפלה של 4 מספרים וקיבלנו שלושה פתרונות שונים:

2×2×3×5 **1×4×3×5** **1×2×6×5**

התלמידים יראו בנקל שאין דרך להשיג את המכפלה 60 בעזרת החלקים הקטנים בני 2 המשבצות כל אחת. על כן יש להשיג את המכפלה 60 בעזרת אחת מן החתיכות בנות 4 משבצות. יש לחפש על הלוח אפשרות כזו:

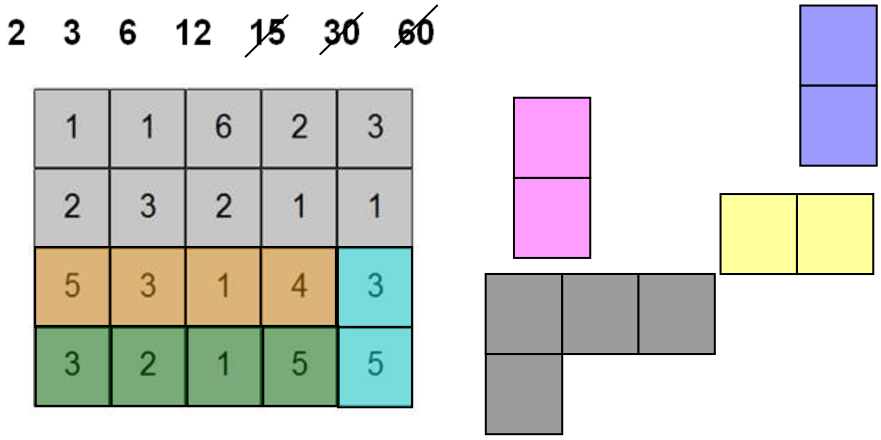


מספרי ה- 2 שעל הלוח רחוקים מדי זה מזה כך שהאפשרות **2×2×3×5** נפסלת. מבט קצר על המספר 6 שעל הלוח פוסל גם את האפשרות: **1×2×6×5**. לא קשה לאתר את האפשרות השלישית על הלוח. מצב זה אפשרי רק כך:



חשוב לדון כאן עם התלמידים בכך שעשוי להיות יתרון בחיפוש המכפלה הגדולה ביותר כיוון שבדרך כלל היא עושה שימוש בצורה גדולה. צורה זו מונחת על מספר גדול של משבצות כך שסביר שלא יהיה לה מספר גדול של אפשרויות.

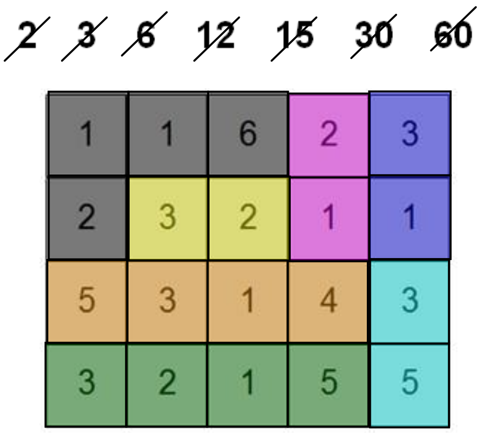
שימו לב כיצד האילוץ הגיאומטרי מגלה כעת עוד שתי צורות בלי להתייחס למספרים שהן מכסות:



בשלב זה כדאי להפנות אל התלמידים את המשימה האחרונה:

- **מצאו את המקום של הצורה הגדולה שנותרה**

סביר שהמיקום של צורה זו כבר יקבע את מיקומן של כל הצורות האחרות. קל לראות שפרט למיקום השמאלי ביותר האפשרי, כל מיקום אחר של הצורה הגדולה שנותרה יגרום למכפלה גדולה מדי. בעזרת האילוץ הגיאומטרי נסיים את פתרון הפאזל:



כעת חלקו לתלמידים את דף משימה 1 ובו 2 פאזלים לעבודה עצמית.

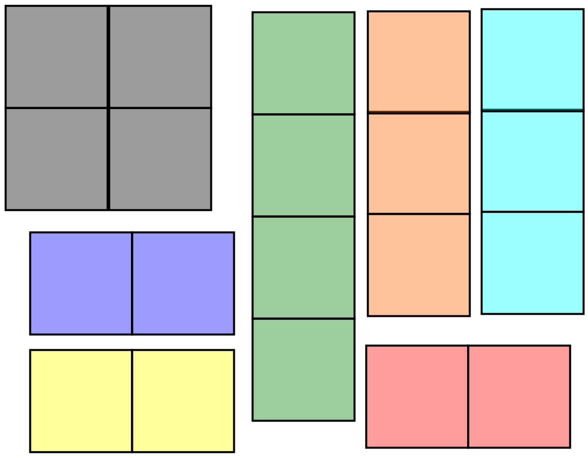
ריצוף במכפלה

לפניכם לוח מספרים ובצדו צורות. עליכם להשתמש בצורות כדי לרצף את הלוח כך שהמכפלות שיתקבלו בתוך הצורות המרצפות יתאימו למספרים שמעל ללוח. זכרו: הצורות צריכות להיות מונחות על הלוח כפי שהן מצוירות כעת. אין לסובב או להפוך אותן, והן אינן יכולות לחפוף זו את זו.

.1

6 6 8 12 15 108 192

6	3	3	1	4
1	6	2	2	3
6	1	1	4	4
3	4	5	3	4

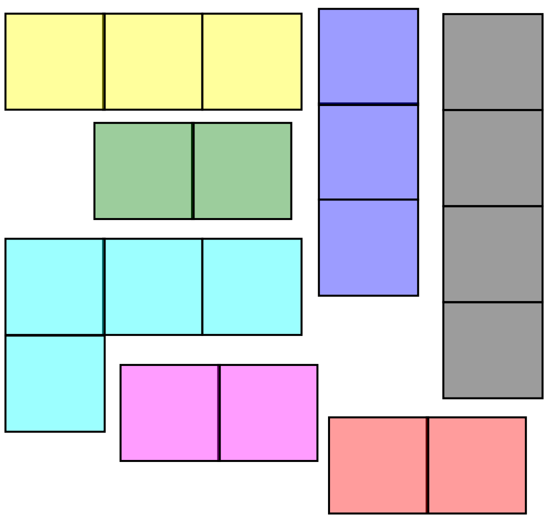


רמז: מבין המספרים הרשומים מעל הלוח יש שניים שהם קטנים מ- 108 ולכל אחד מהם יש רק כיסוי אחד אפשרי.

.2

1 2 8 12 36 144 480

2	1	4	3	3
5	4	6	4	4
4	1	2	3	6
1	1	6	2	2

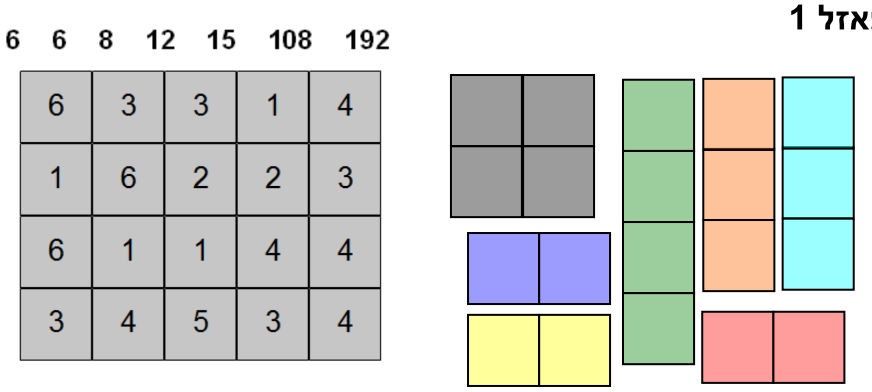


רמז: חפשו תחילה את המכפלה 480.

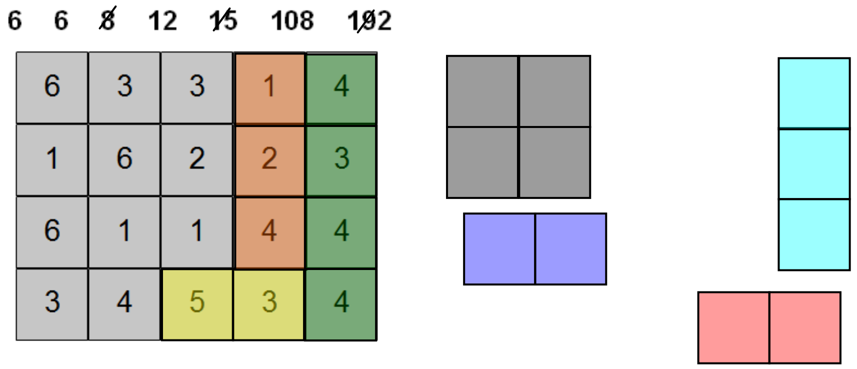
ריצוף במכפלה – פתרונות

לאחר שהתלמידים יסיימו לעבוד על הפאזלים, דונו במליאה על כל אחד מהם. נציג כעת פתרונות אפשריים שיוכלו לשמש לכם מצע לדיון.

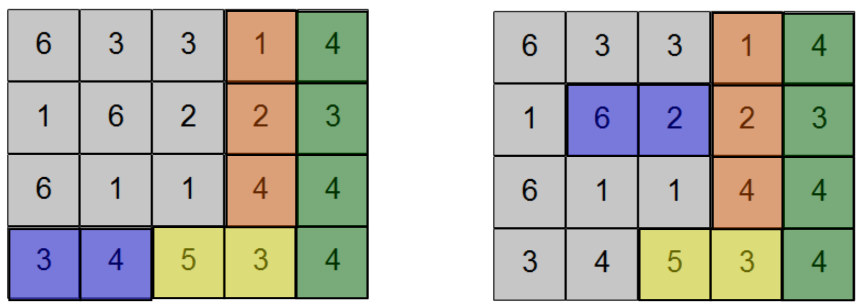
פתרון פאזל 1



נפעל לפי הרמז: שתי המכפלות הלא גדולות שאפשר למצוא מיד על הלוח הן 8 ו- 15. מיקום של שתי הצורות המתאימות יוביל מיד גם למיקום הצורה האנכית הארוכה:



יש דרכים רבות להמשך. אפשר למשל לחפש את המספר 12. מספר זה קטן ואפשר לעבוד כאן בלי פירוק לגורמים מסודר. בכל זאת נפרק אותו לגורמים הראשוניים שלו: 2×2×3. על הלוח נותר רק מספר 2 אחד, ולכן יש "לאחד" את אחד ממספרי ה- 2 האלה עם ה- 2 השני או עם ה- 3. כך נקבל 2×6 ו- 3×4. אפשר כמובן להוסיף מספרי 1 כרצוננו. מבט על הלוח מגלה שתי אפשרויות:



לא קשה לראות שהאפשרות הימנית אינה מאפשרת להכניס אל הלוח את שתי הצורות הגדולות שעוד נותרו - אפשר להכניס את כל אחת מן הצורות לחוד, אך אי־אפשר להכניסם ביחד.

כעת לא קשה לבדוק שהפס האנכי בעל 3 המשבצות יכול לעמוד רק בטור המרכזי כי מיקום אחר יוצר מכפלות שאינן ברשימה שלנו, ומכאן הסיום פשוט:

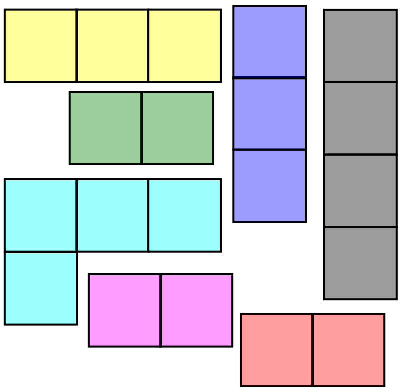
~~6~~ ~~6~~ ~~8~~ ~~12~~ ~~15~~ ~~108~~ ~~192~~

6	3	3	1	4
1	6	2	2	3
6	1	1	4	4
3	4	5	3	4

פתרון פאזל 2

1 2 8 12 36 144 480

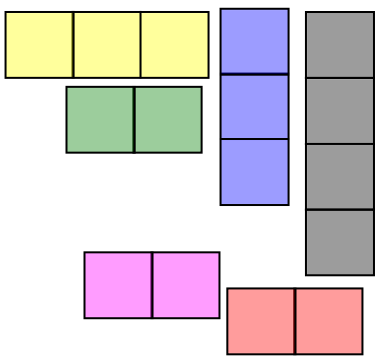
2	1	4	3	3
5	4	6	4	4
4	1	2	3	6
1	1	6	2	2



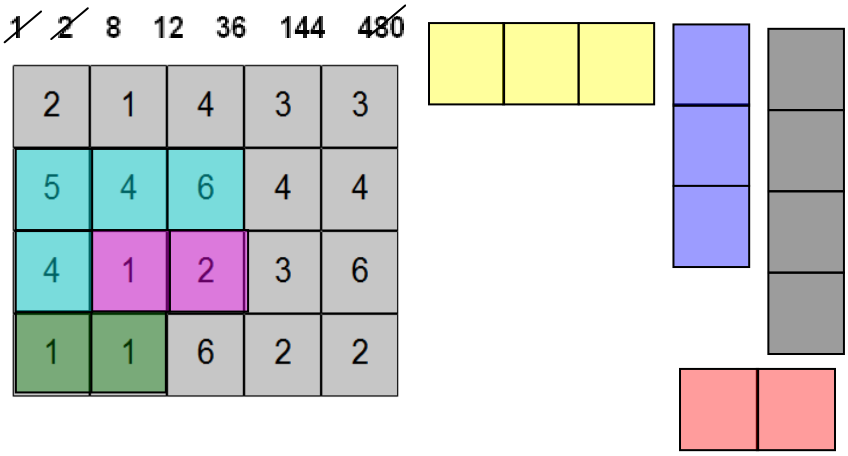
הרמז הוביל אותנו לפירוק המספר 480 למכפלה של גורמיו הראשוניים: 5×3×2×2×2×2×2. הדרך היחידה להגיע לארבעה כופלים היא לבצע שלושה "איחודים": 2,2 2,2 2,3. כך נקבל: 5×6×4×4 ונגלה את הצורה התכולה:

1 2 8 12 36 144 ~~480~~

2	1	4	3	3
5	4	6	4	4
4	1	2	3	6
1	1	6	2	2



נמשיך ונפעיל שיקולים גיאומטריים. בחלק השמאלי העליון של הלוח עדיין לא ברור אם יש להכניס צורה אופקית באורך 3 משבצות או צורה בת 2 משבצות כיוון שגם המכפלה 8 וגם המכפלה 2 עוד נותרו. לעומת זאת בחלק השמאלי התחתון של הלוח חייבת להיכנס צורה אופקית בעלת 2 משבצות (צורה בת 3 משבצות יוצרת מכפלה מחוץ לרשימה). שיקול דומה תקף גם על הצורה שמעליה כפי שמסומן:



כעת ברור שבפינה השמאלית העליונה יש להשתמש בצורה בעלת 3 משבצות כיוון שאם נשתמש בצורה באורך 2 משבצות, נקבל מכפלה 2 שכבר נתפסה. מכאן סיום הלוח מבוסס על אילוצים גיאומטריים בלבד:

בשלב זה יש לחלק לתלמידים את דף משימה 2. אפשרו לתלמידים לעבוד עליו בחופשיות. גם על משימותיו אין צורך לדון במליאה, אפשר להסתפק בדיון עם תלמידים בודדים או עם זוגות תלמידים בזמן שהם עובדים על המשימות. תלמידים שלא יספיקו לפתור פאזלים אלה בכיתה יוכלו לקחת אותם ולפתור אותם בבית.

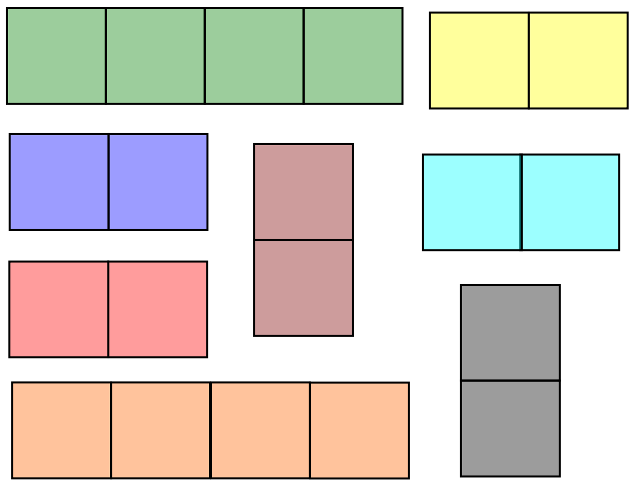
ריצוף במכפלה – עוד משימות

לפניכם לוח מספרים ובצדו צורות. עליכם להשתמש בצורות כדי לרצף את הלוח כך שהמכפלות שיתקבלו בתוך הצורות המרוצפות יתאימו למספרים שמעל ללוח. זכרו: הצורות צריכות להיות מונחות על הלוח כפי שהן מצוירות כעת. אין לסובב או להפוך אותן, והן אינן יכולות לחפוף זו את זו..

.1

4 10 10 18 24 25 40 250

6	4	5	2	6
4	1	2	5	3
5	5	2	5	5
2	4	5	1	5

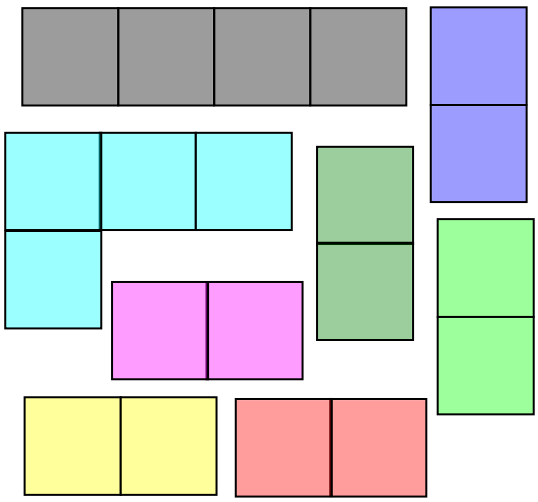


רמז: כדאי לחפש תחילה את המכפלה 250. זהירות! יש כאן יותר מאפשרות אחת להנחת צורה על הלוח המכסה מכפלה זו.

.2

1 6 8 12 24 30 32 270

5	3	3	5	6
6	2	4	6	2
1	6	6	4	1
4	2	2	2	1



רמז: כדאי לחפש תחילה את המכפלה 1, ואחר־כך את המכפלה 270.

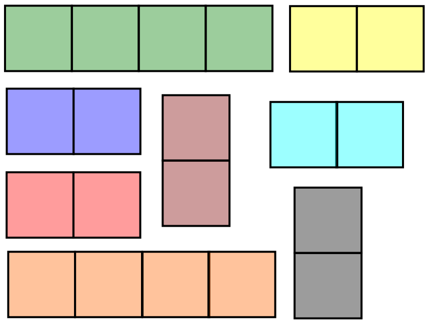
ריצוף במכפלה – עוד משימות – פתרונות

מעניין לשים לב שבשתי השאלות שבדף המשימה מופיעות צורות רק בנות 2 או 4 משבצות. העובדה שאין צורה בת 3 משבצות יכולה להקל כיוון שהיא מורידה אפשרויות למכפלות. להלן הפתרונות:

פתרון פאזל 1

4 10 10 18 24 25 40 250

6	4	5	2	6
4	1	2	5	3
5	5	2	5	5
2	4	5	1	5



נפעל בהתאם לרמז ונפרק את המספר 250 למכפלת הגורמים הראשוניים שלו: 2×5×5×5. אין דרך אחרת להציג את המספר 250 כמכפלה של 4 מספרים. יש שני מקומות על הלוח להנחת צורה המכסה את המכפלה 250:

6	4	5	2	6
4	1	2	5	3
5	5	2	5	5
2	4	5	1	5

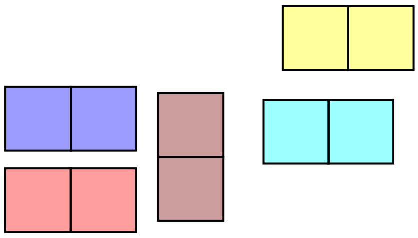
6	4	5	2	6
4	1	2	5	3
5	5	2	5	5
2	4	5	1	5

באפשרות השמאלית אי־אפשר להניח אף לא צורה אחת שתכסה את המספר 5 שבפינה הימנית התחתונה. אם ננסה לכסות מספר זה בצורה אופקית בת 2 משבצות, נקבל מכפלה 5 שאינה מופיעה ברשימת המכפלות. אם ננסה לכסות את ה-5 הזה בצורה הארוכה, נקבל מכפלה 100 שאף היא אינה נמצאת ברשימת המכפלות.

נותרנו עם האפשרות השמאלית. תוכלו לבדוק שמתחת לצורה הראשונה שהנחנו יש להניח את הצורה הגדולה השנייה, ואחר־כך צורה אנכית קטנה מימין:

4 10 10 18 24 ~~25~~ ~~40~~ ~~250~~

6	4	5	2	6
4	1	2	5	3
5	5	2	5	5
2	4	5	1	5



ההמשך מכאן פשוט מאוד בעיקר כיוון שנותרו רק צורות בנות 2 משבצות ומכפלות שהתלמידים כבר מכירים מלוח הכפל:

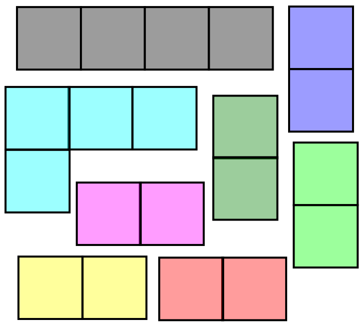
~~4~~ ~~10~~ ~~10~~ ~~18~~ ~~24~~ ~~25~~ ~~40~~ ~~250~~

6	4	5	2	6
4	1	2	5	3
5	5	2	5	5
2	4	5	1	5

פתרון פאזל 2

1 6 8 12 24 30 32 270

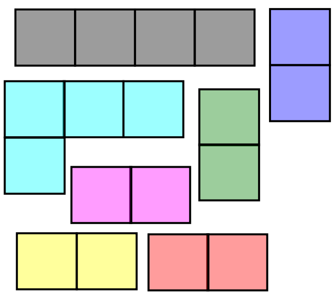
5	3	3	5	6
6	2	4	6	2
1	6	6	4	1
4	2	2	2	1



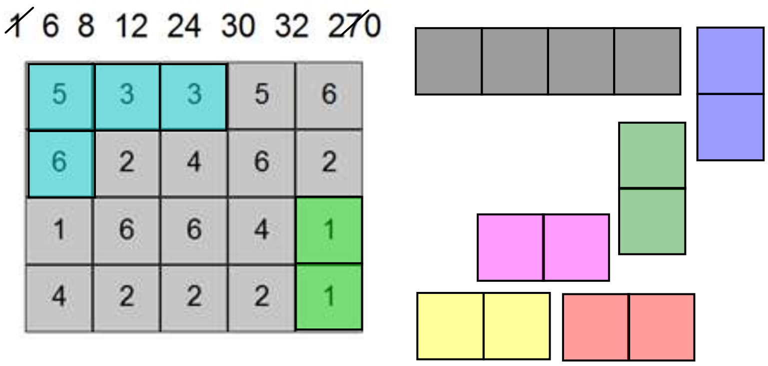
נפעל בהתאם לרמז. למכפלה 1 יש כיסוי אחד:

~~1~~ 6 8 12 24 30 32 270

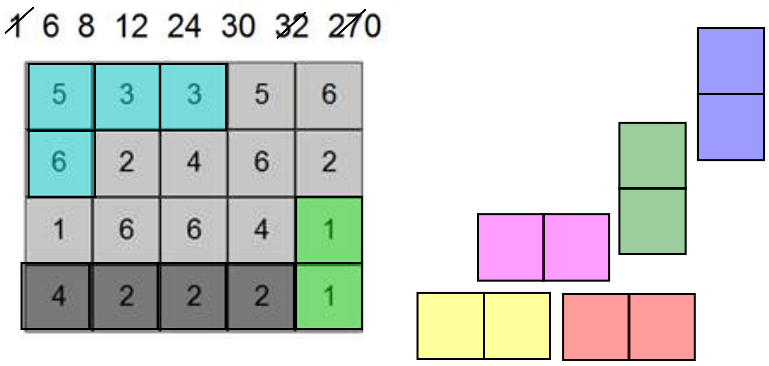
5	3	3	5	6
6	2	4	6	2
1	6	6	4	1
4	2	2	2	1



לפי הרמז נעבור כעת למכפלה 270: הפירוק של מספר זה למכפלה של מספרים ראשוניים הוא 2×3×3×3×5. הדרך היחידה לרשום מספר זה כמכפלה של 4 מספרים בתחום 1-6 היא "לאחד" את המספר 2 עם אחד ממספרי ה- 3, ולקבל: 5×3×3×6.
אין קושי לאתר מספרים אלה על הלוח:



לצורה הארוכה נותרו כעת 3 מקומות אפשריים. ברשימת המכפלות שמעל ללוח נותרו מספרים שהגדול בהם הוא 32. לא קשה לראות שהצורה הארוכה מתאימה רק לתחתית הלוח – מכפלה 32.



את ההמשך אפשר לבצע בהתבססות על שיקולים גיאומטריים בלבד: