המרכז הישראלי למצוינות בחינוך
Israel Center for Excellence through Education

משרד החינוך
התרבות והספורט

המכון למצוינות בהוראה

מצוינות 2000
בחסות קרן סקירבול

כפר הריבועים

גלי שמעוני

מתמטיקה – יסודי

מהדורת תשע"ד

כפר הריבועים

מבוא

בפרק הזה מוצגת לתלמידים חידה מאתגרת אשר מנחה אותם בהדרגה לחקור את השאלה ואת הדרך לפתור אותה. משם הפרק ניכר כי נושא החידה הוא מתחום הגאומטרייה – ריבועים. מפתיע לגלות שחלק נכבד מחקירת החידה שייך לתחום המספרי.

רציונל

הפעילות עטופה בסיפור מסגרת, המספר על שני ילדים המגיעים לכפר הריבועים. הילדים מבקשים לישון במלון אשר בכפר, שיש בו חדר בצורת ריבוע. מתברר שעל-מנת לישון בחדר הזה, יש לחלק אותו למספר ריבועים כמספר האנשים המבקשים לישון בו.

הנה בעיית הגאומטרייה העומדת בלב הפרק: נתון ריבוע, ואנו רוצים לרצף אותו בריבועים קטנים. ריבועי החלוקה אינם צריכים להיות שווי שטח, אסור שיעלו זה על זה, וביחד הם צריכים לכסות את כל הריבוע הגדול ולא לחרוג ממנו. השאלה היא באילו כמויות של ריבועים אפשר לרצף את הריבוע הנתון ובאילו כמויות המשימה היא בלתי אפשרית.

פתרון הבעיה מפתיע. אפשר לרצף את הריבוע הנתון בכל כמות של ריבועים פרט ל-3,2 או 5. בפעילות ננסה לקדם את התלמידים צעד אחר צעד עד לגילוי הפתרון. במהלך הגילוי יוכלו התלמידים להגיע לתובנות מעניינות ומועילות הנוגעות לעולם המספרים.

מהלך השיעור

- הקרינו את דף הקרנה מספר 1 ובו התחלה של סיפור המסגרת ושאלת ראשונה שמוליכה לדיון קצר שיסייע לתלמידים להימנע משגיאות כו זו המופיעה בדף הקרנה.
- הקרינו את דף הקרנה מספר 2 ובו המשך הסיפור ושאלה קצרה נוספת. קיימו דיון גם כאן.

- הקרינו את דף הקרנה 3 ובו המשך הסיפור. מיד אחר כך חלקו את דף משימה 1 בו יתבקשו התלמידים לחלק ריבוע נתון ל- 7 ול- 17 ריבועים המרצפים אותו. הדיון כאן יספק לתלמידים כלים להתמודדות עם דף המשימה המרכזי שיקבלו בהמשך.
- הקרינו את דף הקרנה מספר 4 המציג את המשך הסיפור, וחלקו לתלמידים את דף משימה 2, בו יתבקשו התלמידים לחלק ריבוע נתון ל- 48,49 ו-50 ריבועים המרצפים אותו. הדיון כאן אמור להיות מרתק, עם מגוון רחב של פתרונות אותם יציגו התלמידים.
- הקרינו את דף הקרנה 5 – "חמישים פלוס", בו יגלו התלמידים שאפשר לחלק ריבוע לכל מספר של ריבועים המרצפים אותו, החל מ- 48 ריבועים – הרעיון כאן יהיה "האינדוקציה".
- הקרינו את דף הקרנה מספר 6 – "סוף הסיפור", בו יתגלה הפתרון המלא של המשימה – אפשר לחלק ריבוע לכל מספר של ריבועים המרצפים אותו החל ב- 6, וגם ב- 4 ריבועים.
- בסוף הפעילות מצורפים שני נספחים. הנספח הראשון הוא עבור המורה, והוא מציג הוכחה מדוע לא ניתן לרצף ריבוע בעזרת 3 או 5 ריבועים. הנספח השני מציג הסתכלות שונה על הבעיה שהופיעה בפעילות, ובהחלט אפשר להציג את הרעיון שבו לתלמידים.

אנו ממליצים לייחד לפרק הזה 2 שיעורים בני 90 דקות.

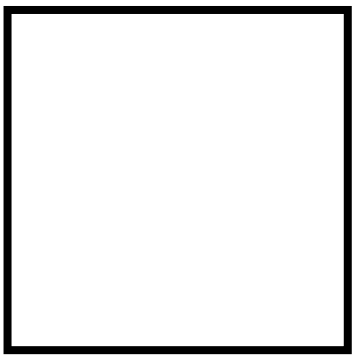
התחילו את הפעילות בהקרנת **דף הקרנה 1** בו מופיעה התחלת סיפור המסגרת. קראו סיפור זה עם התלמידים. בדף הקרנה מופיעה שאלה מקדימה ראשונה. השאלה הזאת מסייעת להבהיר נקודה חשובה באשר לפתרון החידה המרכזית.

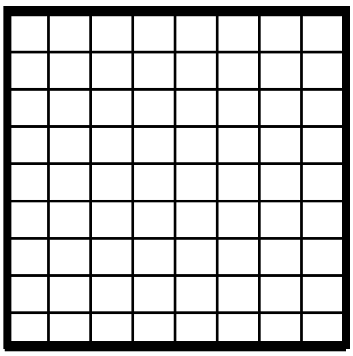
דף הקרנה 1

כפר הריבועים

אלון ואורן, שני מטיילים, הגיעו אל כפר הריבועים. המחזה שנגלה לעיניהם היה מדהים. בכל מקום נראו ריבועים. בתים ריבועיים, גינות ריבועיות ושלטים ריבועיים. לפתע הבחינו באדם רוכב על חמור, הגורר משטח ריבועי. כאשר שאלו אותו מדוע הוא גורר אחריו את המשטח הזה, הסביר שעבודתו היא הסעת אנשים ממקום למקום בכפר., המטיילים ביקשו מרוכב החמור לקחת אותם לבית מלון. בדרך הרוכב גילה לאלון ולאורן שעיסוק מרכזי בכפר הוא ריצוף של ריבוע בריבועים קטנים. הוא נתן להם עיפרון ונייר שעליו היה מצויר ריבוע, וביקש מהם שיחלקו את הריבוע לריבועים. אורן אמר שהצליח לחלק את הריבוע ל-72 ריבועים. הנה הציור שצייר:

הריבוע לפני החלוקה



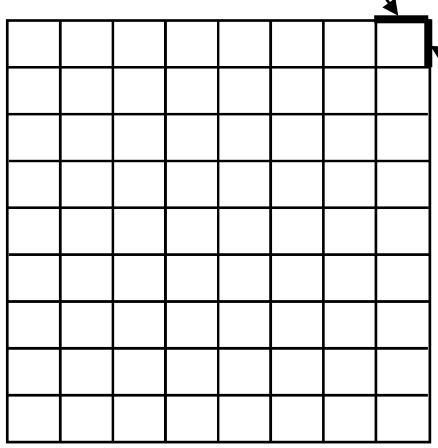


האם אורן אכן חילק את הריבוע ל- 72 ריבועים המרצפים אותו?

ניהול השיעור

לאחר הקראת השאלה אפשרו לתלמידים זמן מה לחשוב ולגבש את דעתם, ולאחר מכן הקשיבו להסבריהם.

המרובעים המרצפים את הריבוע הגדול אינם ריבועים אלא מלבנים. התבוננו בשתי הצלעות המודגשות שהן הצלעות של מרובע הריצוף שבפינה הימנית העליונה בתוך הריבוע הנתון.



הצלע העליונה של הריבוע המקורי חולקה ל- 8 חלקים שווים, בעוד הצלע הצדדית (השווה לה) חולקה ל-9 חלקים שווים. על כן המרובעים המרצפים הם **מלבנים** ולא ריבועים. התלמידים צריכים להבין שאם אורן היה מחלק כל צלע לאותה כמות של קטעים שווים, הרי שהיה מתקבל ריצוף של הריבוע הגדול לריבועים קטנים שווי גודל.

המשך

המשיכו בהקראת סיפור המסגרת **בדף הקרנה 2**. בסיום הדף הקרנה מופיעה שאלה מקדימה נוספת לתלמידים, וגם על הפתרון שלה יש לדון בכיתה.

דף הקרנה 2

מלון הריבועים

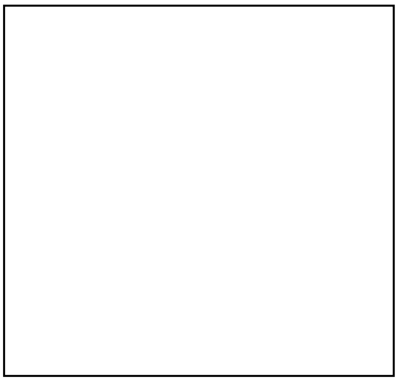
רוכב החמור הסביר לאורן את טעותו, ולאחר הסיע אותו ואת אלון אל בית המלון היחיד שהיה בכפר. כשנכנסו פנימה, פגשו המטיילים פקיד קבלה עם משקפיים ריבועיים. הם שאלו אותו האם יוכלו לקבל חדר.

פקיד הקבלה חייך לעצמו חיוך מוזר והסביר שבמלון יש רק חדר אחד גדול מאוד, שצורתו היא כמובן ריבוע.

"תוכלו לישון כאן רק אם תדעו לחלק את החדר הריבועי הזה לשני ריבועים. כל אחד מכם יוכל לישון באחד משני הריבועים האלה. הריבועים **אינם חייבים להיות באותו הגודל. כמו כן אסור שהם יכסו זה את זה (גם באופן חלקי), וביחד הם צריכים לכסות בדיוק את כל הריבוע הגדול**".

אלון אמר שהוא יודע לרצף ריבוע ב- 9 ריבועים וגם ב- 16 למשל, אך לדעתו אין דרך לרצף ריבוע בשני ריבועים.

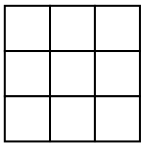
האם צדק אלון?

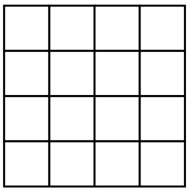


ניהול השיעור

הקשיבו להסברי התלמידים. אם תרצו, תוכלו לתת להם לסמן את התשובות על הריבוע בתחתית הדף הקרנה.

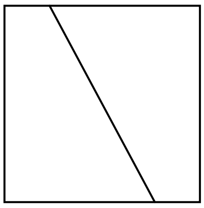
אלון אכן צדק. ראשית, אין קושי לחלק ריבוע ל- 9 ריבועים, ל- 16 ריבועים ולכל מספר ריבועי של ריבועים. הדרך לעשות זאת היא להוסיף מספר שווה של קטעים אנכיים ואופקיים כמו באיורים האלה:



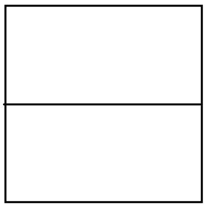


לא קשה לבדוק שאי-אפשר לחלק ריבוע לשני ריבועים. על מנת לחלק ריבוע לשני מרובעים יש להוסיף קו אחד מן הצלע העליונה לתחתונה או מן הצלע הימנית לשמאלית. בכל מקרה אין מקבלים ריבועים:

לא כך



וגם לא כך



המשך

המשיכו בהקראת סיפור המסגרת ב**דף הקרנה 3**, המוליך אל שתי משימות לתלמידים. המשימות האלה מופיעות גם **בדף משימה 1**, המצורף מיד לאחר הדף הקרנה. מומלץ שהתלמידים יעבדו בזוגות אם הם מעוניינים בכך.

דף הקרנה 3

המשך הסיפור

פקיד הקבלה אמר לאלון שהוא צודק, אך הוסיף: "תתפלאו, אבל אתמול ישנו כאן 7 מטיילים ושלשום - 17".

"זה לא הגיוני", אמרו אלון ואורן יחד.

"זה דווקא הגיוני", אמר הפקיד. "אל תשכחו **שאין זה הכרחי שכל הריבועים יהיו באותו הגודל**. קחו לכם נייר, שרטטו עליו ריבועים ונסו לחלק ריבוע אחד ל- 7 ריבועים וריבוע אחר ל- 17 ריבועים. אני מאמין שתצליחו".

דף משימה ו

7 ריבועים ו- 17 ריבועים

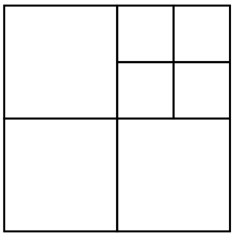
היעזרו בריבועים המשורטטים בעמוד הזה על מנת לרצף ריבוע אחד ב- 7 ריבועים וריבוע אחר ב- 17 ריבועים. אם מצאתם פתרון, נסו למצוא פתרונות נוספים.

ניהול השיעור

לפני שנדון בניהול החלק הזה של השיעור, הנה פתרונות אפשריים:

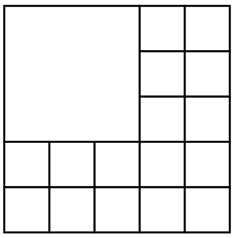
7 ריבועים

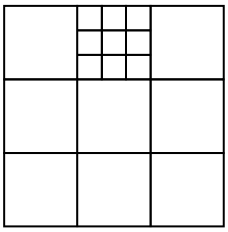
כאן יש פתרון אחד. כל פתרון אחר מתקבל מן הפתרון הזה באמצעות סיבוב.



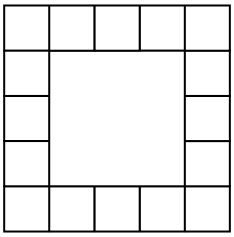
17 ריבועים

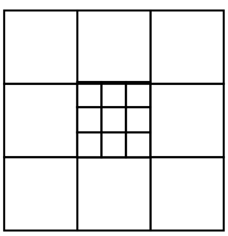
הנה שני פתרונות לדוגמה העשויים לעלות בכיתותיכם:

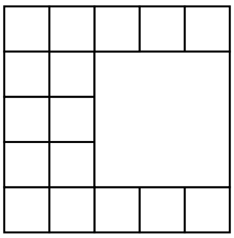


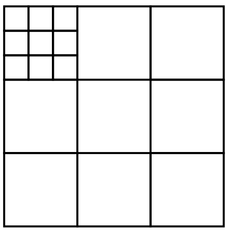


כמובן שאפשר ליצור מן הפתרונות האלה פתרונות אחרים, המבוססים על אותם העקרונות:





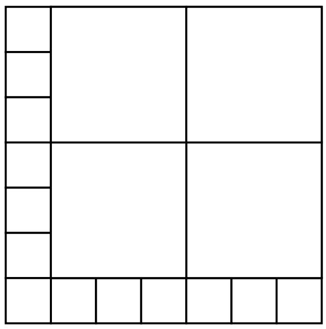




המשותף לפתרונות מצד ימין הוא שכנראה בכולם חולק תחילה הריבוע ל- 25 ריבועים חופפים, ואחר-כך 9 מאותם ריבועים חופפים אוחדו לריבוע אחד.

המשותף לפתרונות מצד שמאלהוא שכנראה בכולם חולק תחילה הריבוע ל- 9 ריבועים חופפים. באחד מן הריבועים הקטנים נעשתה חלוקה משנית, והוא חולק ל- 9 ריבועים נוספים, קטנים יותר.

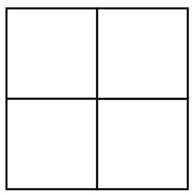
נציין כי יש פתרונות נוספים לחלוקת ריבוע ל- 17 ריבועים, שסביר שלא יעלו בכיתתכם, (ואין צורך שתציגו אותם בשלב זה). הנה למשל:



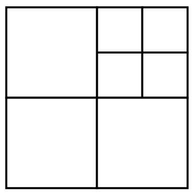
כיצד לנהל את השיעור?

בזמן שהתלמידים עובדים על המשימה, הסתובבו ביניהם והקשיבו לרעיונותיהם. עודדו תלמידים שמצאו פתרון אחד, לחפש עוד פתרונות. ייתכן שיהיו תלמידים שיגלו פתרונות שונים מן הפתרונות שנציג כעת, עניין שיעשיר את הדיון שלכם. לאחר שיסיימו התלמידים את עבודתם, הזמינו אל הלוח תלמיד שיציג את הפתרון שמצא עבור חלוקה ל- 7 ריבועים. בקשו מן התלמיד הזה להסביר כיצד הגיע אל הפתרון. סביר שהתלמיד יציג את הפתרון כך:

"בהתחלה חילקתי את הריבוע לארבעה ריבועים שווים"

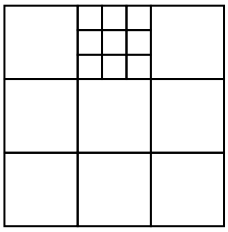


" ואז חילקתי את אחד מארבעת הריבועים ל- 4 ריבועים קטנים ממנו":



בשלב הזה מומלץ שתחזרו על הרעיון של התלמיד. תוכלו לומר כך: "בעצם גילית שיטה. התחלת בחלוקה לריבועים שווי גודל, ואחר כך חילקת את אחד הריבועים לריבועים קטנים יותר שווי גודל". כמו כן מומלץ שתשאלו את התלמיד את השאלה הזאת: "אם התחלת ב- 4 ריבועים וחילקת אחד מהם לארבעה ריבועים, מדוע לא קיבלת 8 ריבועים?" התשובה לשאלה הזאת תשרת אותנו בהמשך. אמנם התחלנו ב- 4 ריבועים, אך השתמשנו באחד מהם כדי לחלק אותו ל- 4 נוספים כך שמספר הריבועים שהתקבל הוא למעשה 7 = 4-1+4.

תוכלו לשאול את התלמידים האם מישהו מצא פתרון נוסף עבור 7 ריבועים. (לא יהיו להם פתרונות כאלה). בשלב הזה הזמינו אל הלוח תלמיד שיציג פתרון עבור 17 ריבועים. ייתכן שבזמן שתסתובבו בכיתה, תראו תלמיד שמצא את הפתרון הזה:

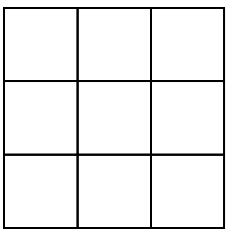


מומלץ שתזמינו אותו אל הלוח ראשון. הסיבה לכך היא שהפתרון הזה דומה בדרך ההסתכלות שלו לפתרון של 7 הריבועים.

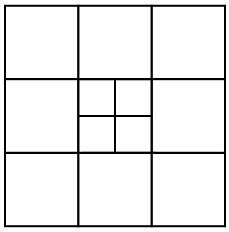
שאלו את התלמיד במה דומה הפתרון הזה לפתרון 7 הריבועים.

כקודם, התחלנו בחלוקת הריבוע לריבועים שווי גודל (במקרה זה 3×3), ולאחר מכן חילקנו את אחד מן הריבועים האלה לריבועים שווי גודל (במקרה זה 3×3). פעולה זו הוסיפה למספר הריבועים 8. החישוב כאן הוא 17 = 9-1+9

בשלב הזה מומלץ לצייר על הלוח את הריבוע בגודל 3×3:

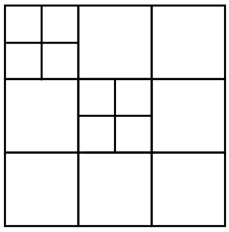


ואחר כך לשאול את התלמידים האם היה אפשר להמשיך בחלוקה של ריבועים קטנים ל- 4 ריבועים קטנים יותר במבנה 2×2 (כפי שחילקנו בפתרון של 7 ריבועים).

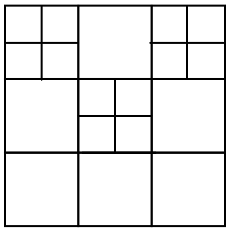


הנה השלב הראשון:

הפעולה הזאת העלתה את מספר הריבועים מ- 9 ל- 12. כעת נחלק עוד ריבוע קטן לריבועים במבנה 2×2:

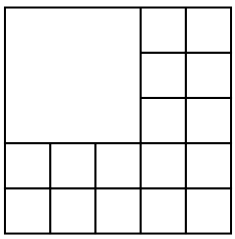


מספר הריבועים גדל מ- 12 ל- 15. החלוקה הבאה תגדיל את מספר הריבועים ל- 18, וכך לא נגיע ל- 17:

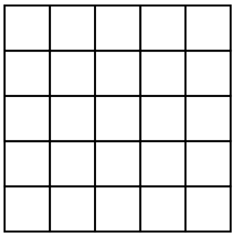


אמנם לא הגענו ל- 17 ריבועים, אך התלמידים בוודאי למדו כאן דרך חשיבה מעניינת. בהמשך נוכל לראות כיצד אפשר לפתח את דרך החשיבה הזאת בצורה שיטתית.

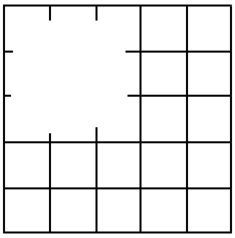
בשלב הזה תוכלו להזמין אל הלוח תלמיד שיציג פתרון נוסף לחלוקת ריבוע ל- 17 ריבועים. ניסיוננו מראה שהפתרון הזה שכיח:



בקשו מן התלמיד שפתר כך להסביר כיצד הגיע אל הפתרון. סביר שהתלמיד יסביר בערך כך:"בהתחלה חילקתי את הריבוע הגדול ל- 5×5 ריבועים שווים"

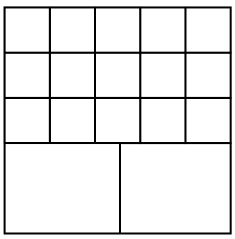


"ואחר כך איחדתי 9 ריבועים לריבוע אחד" או "ואחר כך מחקתי 9 ריבועים".



כעת בקשו מן מהתלמידים להשוות בין דרך הפתרון הנוכחית לדרכים הקודמות שראינו. **המשותף** לשתי הדרכים הוא שבשתיהן מתחילים עם חלוקת הריבוע הגדול לריבועים שווי גודל. **ההבדל** הוא שבדרך הראשונה מחלקים את המרובע המקורי לפחות ריבועים ממה שצריך וממשיכים ב"חלוקות משנה" המגדילות את מספר הריבועים, ואילו בדרך השנייה מחלקים את הריבוע המקורי ליותר ריבועים ממה שצריך, ואחר כך מאחדים מספר ריבועים לריבוע גדול יותר, וכך מקטינים את מספר הריבועים.

הערה: במהלך הפתרונות והצגתם ייתכן שיציעו התלמידים הצעות אשר נראות לכאורה כפותרות את הבעיה, אך למעשה חלק מן החלוקות אינן מובילות לריבועים. הנה למשל כך, חלוקה ל- 17:



במקרה כזה חשוב לערוך דיון בכיתה שבו התלמידים יגיעו בעצמם למסקנה כי חלק מן המרובעים שהתקבלו בעקבות החלוקה אינם ריבועים. הזכירו בדיון הכיתה את דף הקרנה 1 ואת החלוקה שהוצגה בו, הנראית כחלוקה לריבועים, אך למעשה הורכבה ממלבנים.

המשך

בשלב הזה עברו ל**דף הקרנה 4**, המוליך את התלמידים למשימה מעניינת הנמצאת גם ב**דף משימה 2.** את הדף הזה יש לחלק לתלמידים מיד לאחר קריאת הדף הקרנה.

המשך הסיפור (2)

אורן ואלון אמנם הצליחו לחלק ריבוע אחד ל- 7 ריבועים וריבוע אחר ל- 17 ריבועים, אך החלוקות האלה לא סייעו להם לקבל את החדר.

לפתע נכנסה אל המלון קבוצה גדולה בת 48 מטיילים. פקיד הקבלה הסביר שעל-מנת לישון במלון, הם צריכים לחלק את החדר ל- 48 ריבועים, שאינם בהכרח שווי גודל. הפקיד הוסיף שאם לא יצליחו במשימה, יוכלו להוסיף את שני המטיילים, אלון ואורן, ולנסות לחלק את הריבוע ל- 50 ריבועים. אורן הוסיף שאם גם זה לא יסתדר, הוא מתנדב לישון באוויר הפתוח כיוון שהוא יודע איך לחלק ריבוע ל- 49 ריבועים.

המטיילים נחלקו לשתי קבוצות. המשימה של הקבוצה הראשונה הייתה לחלק ריבוע ל- 50 ריבועים, ואילו המשימה של הקבוצה השנייה הייתה לחלק ריבוע ל- 48 ריבועים. "מעניין איזו קבוצה תצליח במשימתה", אמר אלון.

דף משימה ג

48 ריבועים, 49 ריבועים ו- 50 ריבועים

היעזרו בריבועים המופיעים בדף הזה על מנת לחלק ריבוע אחד ל- 48 ריבועים, ריבוע שתיים ל- 49 ריבועים וריבוע שלוש ל- 50 ריבועים.

ניהול השיעור

בזמן עבודת התלמידים הסתובבו והקשיבו לרעיונותיהם. ניסיוננו מראה שתגלו כאן מגוון פתרונות רב. לתלמידים המרגישים שהגיעו למבוי סתום, תוכלו להזכיר את שתי הדרכים שהתקבלו מניתוח דף התלמיד הראשון:

דרך א

לחלק את הריבוע הגדול לריבועים שווי גודל שמספרם קטן מזה הנדרש בשאלה, ואחר כך להגדיל את מספר הריבועים באמצעות חלוקה של אחד מן הריבועים שהתקבל בחלוקה הראשונה לריבועים שווי גודל. מובן שאפשר להמשיך ולחלק שוב ושוב ריבועים נוספים.

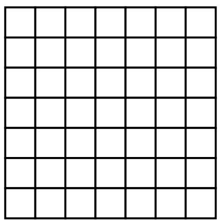
דרך ב

לחלק את הריבוע הגדול לריבועים שווי גודל, שמספרם גדול מזה הנדרש בשאלה, ואחר כך להקטין את מספר הריבועים באמצעות איחוד של קבוצת ריבועים לריבוע אחד גדול יותר. כמובן שאפשר לאחד שוב ושוב ריבועים נוספים.

עודדו את התלמידים לגשת אל הלוח ולהציג את פתרונותיהם. נציג כעת כמה דרכי פתרון.

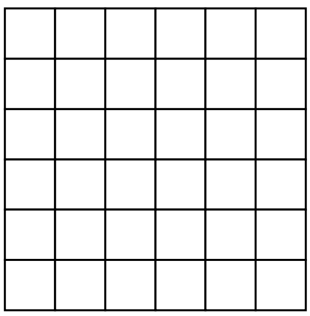
חלוקת הריבוע ל- 49 ריבועים

אין החלוקה כאן בעייתית. מחלקים את הריבוע ל- 49 ריבועים במבנה של 7 על 7:

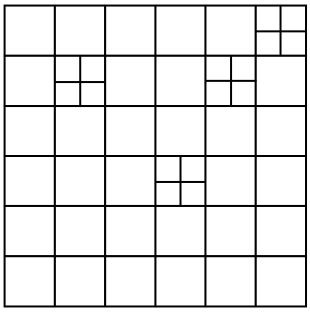


חלוקת הריבוע ל- 48 ריבועים

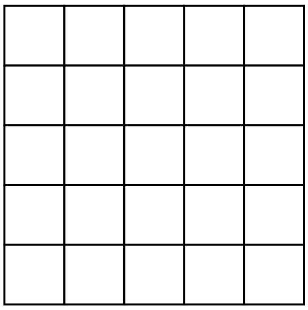
תלמיד יכול לנקוט בדרך א' לעיל ולהתחיל בחלוקת הריבוע ל- 36 ריבועים:



המטרה כעת היא להגדיל את מספר הריבועים מ- 36 ל- 48, כלומר ב- 12. כפי שראינו, כל חלוקה של ריבוע ל- 4 ריבועים (חלוקה של 2 × 2) מגדילה את מספר הריבועים ב- 3, ולכן יש לבצע את הפעולה הזאת 4 פעמים. הנה כך למשל:

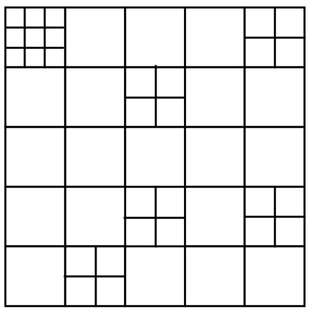


תלמיד אחר יכול גם כן לנקוט בדרך א', אך להתחיל ממצב של 25 ריבועים (5 × 5):



המטרה כעת היא להגדיל את מספר הריבועים ב- 23, מ- 25 ועד ל- 48. לכאורה הבעיה היא ש- 23 אינו מתחלק ב- 3, אך כאן נוכל להיזכר שחלוקת ריבוע ל- 9 ריבועים (3 × 3) מגדילה את מספר הריבועים ב- 8.

שימו לב! אנחנו בעצם עוברים כעת משאלה גאומטרית לשאלה מספרית – יש לחבר את מספרי 3 ומספרי 8 לקבלת 23. הנה דרך לעשות זאת: 3+3+3+3+3+8. פירושו של דבר שעלינו לחלק ריבוע אחד ל- 3 × 3 וחמישה ריבועים ל- 2 × 2. הנה כך למשל:

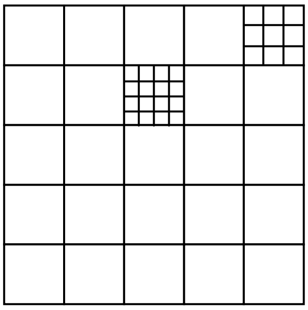


חשוב להבין שאותם תלמידים המגיעים לפתרון דומה לפתרון שלעיל, אינם עושים

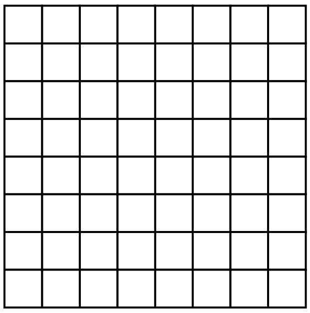
זאת בדרך כלל באמצעות חשיבה מספרית מסודרת כמו זו שהצגנו. הם משתמשים הרבה בניסוי וטעייה – מגדילים את מספר הריבועים שלב אחרי שלב בתקווה להגיע בדיוק ל- 48, ולעתים מגלים לפתע שעברו את 48.

הערה

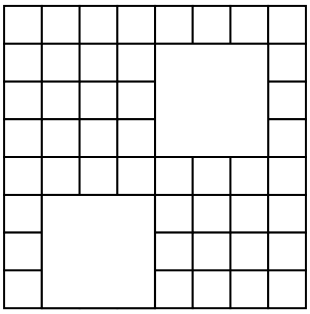
ראינו שחלוקת ריבוע ל- 4 ריבועים מגדילה את מספר הריבועים ב- 3, וחלוקת ריבוע ל- 9 ריבועים מגדילה את מספר הריבועים ב- 8. כעת, אם נחלק ריבוע ל- 16 ריבועים (מבנה 4 × 4), הרי שהגדלנו את מספר הריבועים ב- 15 (הריבוע המחולק ירד מן הספירה ובמקומו נוספו 16 אחרים). באמצעות הדרך הזאת יכולנו להגדיל את מספר הריבועים מ- 25 ל- 48 ביתר קלות. עלינו להוסיף 23 ריבועים, ואפשר לעשות זאת בעזרת תוספת של 15 ועוד תוספת של 8. פירושו של דבר שיש לחלק ריבוע אחד ל- 4 × 4 וריבוע אחד ל- 3 × 3.



תלמיד יכול לנקוט גם בדרך ב' ולהתחיל בחלוקה ליותר מ- 48 ריבועים, לדוגמה 64 ריבועים:



עלינו להוריד 16ריבועים. הבעיה היא שאי אפשר לעשות זאת רק על ידי איחוד של רביעיות ריבועים, כי פעולה זו תוריד בכל שלב את מספר הריבועים ב- 3. לעומת זאת אפשר לאחד פעמיים 9 ריבועים, (כל איחוד כזה מוריד את מספר הריבועים ב-)8, ובכך לצמצם בדיוק 16 ריבועים.



חשוב להבין שהתלמידים עשויים למצוא דרכים אחרות ופחות מסודרות. הם יכולים להתחיל מחלוקה כלשהי, ואחר כך להתקדם באמצעות חלוקות ואיחודים. אתם עשויים לגלות פתרונות מאוד מעניינים.

חלוקת הריבוע ל- 50 ריבועים

הרעיון כאן דומה לרעיון שראינו עבור 48 ריבועים. לא נציג כאן שרטוטים של הפתרונות, אלא רק חישובים מספריים האמורים להוביל לשרטוטים האלה. כמובן שיש עוד דרכים כדי לפתור את האתגר הזה.

אפשרות א

36+8+3+3, כלומר מתחילים בחלוקת הריבוע הנתון ל- 6×6, ואחר כך כדי להגיע ל- 50 ריבועים מחלקים את אחד מן הריבועים ל- 3×3 ושני ריבועים ל- 2×2.

אפשרות ב

64-8-3-3, כלומר מתחילים בחלוקת הריבוע הנתון ל- 8×8, ואחר כך כדי להגיע ל- 50 ריבועים מאחדים קבוצת ריבועים במבנה של 3×3 ושתי קבוצות ריבועים במבנה של 2×2.

חלק 2

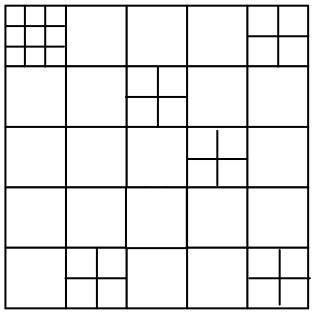
בחלק הזה נמשיך בסיפור המסגרת של הפרק, העוסק בכפר הריבועים ובמלון שאפשר להתאכסן בו רק במספר המתאים לחלוקת חדר ריבועי לריבועים. הציגו לתלמידים את **דף הקרנה 5.** בדף הקרנה הזה יש תזכורת לדרך שבה סיימנו את החלק הקודם – חלוקה של ריבוע ל- 48, 49 ו-50 ריבועים. לאחר התזכורת מופיעה שאלת המשך, והיא תוביל לדיון המרכזי של הפרק. בקשו מן התלמידים לחשוב זמן מה על השאלה הזאת.

דף הקרנה

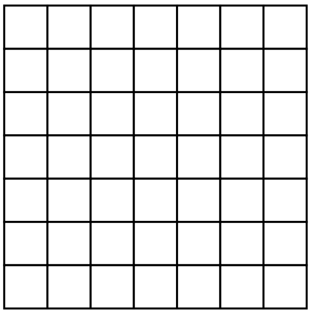
חמישים פלוס

אורן, אלון ו- 48 המטיילים הציגו לפקיד בית המלון שרטוטים של ריבועים המחולקים ל- 49,48 ו- 50 ריבועים:

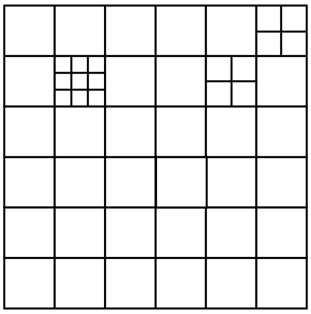
48 ריבועים



49 ריבועים



50 ריבועים



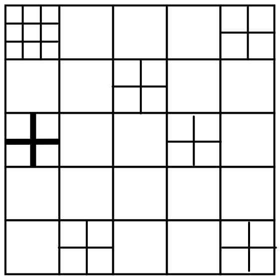
אבי, אחד מ- 48 המטיילים, קפץ לפתע ואמר: "כשאני מסתכל כעת על הציורים האלה, אני מיד רואה דרך לחלוקת ריבוע ל- 51 ריבועים".

האם גם אתם רואים את הפתרון המהיר הזה?

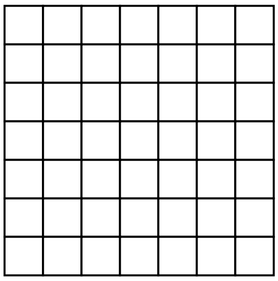
ניהול השיעור

אפשרו לתלמידים לחשוב, ולאחר מכן בקשו מהם להציג את רעיונותיהם. הפתרון של 48 ריבועים מאפשר מעבר מידי לפתרון של 51 ריבועים. כל שיש לעשות הוא לחלק את אחד מ- 48 הריבועים ל- 4 ריבועים במבנה של 2×2. כבר הבנו שהפעולה הזאת מוסיפה 3 ריבועים. הנה כך למשל:

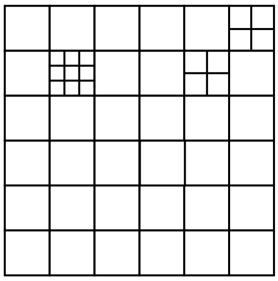
51 ריבועים



49 ריבועים

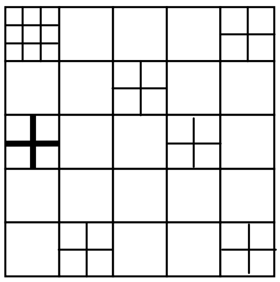


50 ריבועים

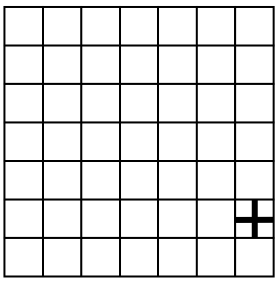


לאחר שאחד מן התלמידים יציג את הפתרון הזה, בקשו מן התלמידים להציג באופן מידי פתרון עבור 52 ריבועים. הרעיון כאן דומה, עוברים לריבוע המחולק ל- 49 ריבועים ומחלקים את אחד מן הריבועים שלו ל- 2×2:

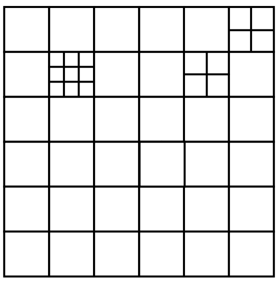
51 ריבועים



52 ריבועים

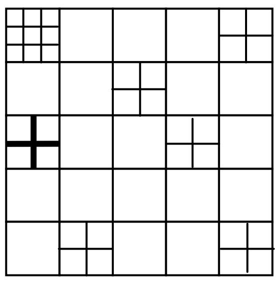


50 ריבועים

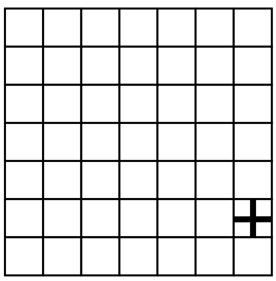


כעת בקשו מן התלמידים להציג פתרון מידי עבור 53 ריבועים. הנה אחד למשל:

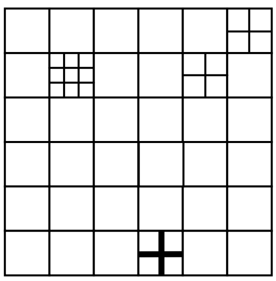
51 ריבועים



52 ריבועים

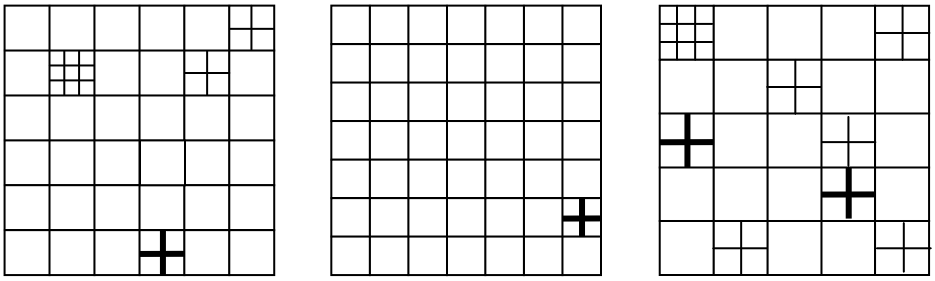


53 ריבועים



כעת בקשו מן התלמידים להציג פתרון מידי עבור 54 ריבועים. כאן חוזרים אל השרטוט השמאלי ומחלקים את אחד מן הריבועים שבו ל- 2×2:

54 ריבועים 52 ריבועים 53 ריבועים



בשלב הזה אפשר לבקש מן התלמידים להציג מסקנה מדרך העבודה שהתבצעה. המסקנה היא שבדרך הזאת הוכחנו **שאפשר לחלק ריבוע לכל מספר שלם של ריבועים שהוא גדול או שווה ל- 48**. למסקנה הזאת עומק מתמטי רב. דרך ההוכחה שהשתמשנו בה נקראת "אינדוקציה". הראינו את נכונות הטענה לחלוקה ל- 48 ריבועים, 49 ריבועים ו- 50 ריבועים, והראינו גם כיצד אפשר להשתמש בכל אחת מן החלוקות כדי לקבל חלוקה נוספת ובה מספר ריבועים הגדול ב-3. ראינו שבדרך זו אפשר להבין מדוע ניתן להגיע לחלוקה של כל מספר ריבועים החל מ- 48.

המשך

כעת הציגו לתלמידים את **דף הקרנה 6** המופיעים בו שלושה ריבועים. אחד מחולק ל- 6 ריבועים, שני ל- 7 ריבועים ושלישי ל- 8 ריבועים. הדף הקרנה הזה מסיים את הפרק ויוליך למסקנה הסופית באשר לאפשרויות החלוקה של הריבוע. לחילופין תוכלו לבקש מהתלמידים למצוא פתרון לחלוקת הריבוע המקורי ל-6, 7 ו-8 ריבועים (כזכור, כבר עסקנו בחלוקה ל-7) ורק אז להציג את הדף הקרנה

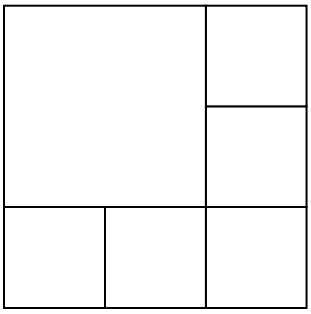
בקשו מן התלמידים לעיין מספר דקות בשאלה הזאת ולהציג את רעיונותיהם.

דף הקרנה 6

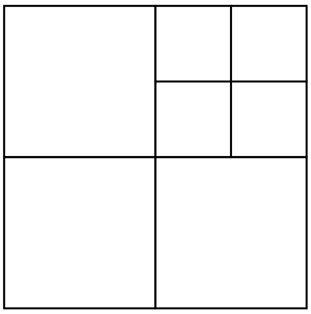
סוף הסיפור

פקיד הקבלה התלהב לאחר שהמטיילים הסבירו לו שבעזרת חלוקת הריבועים ל- 49,48 ו- 50 ריבועים אפשר להבין מדוע אפשר לחלק ריבוע לכל מספר שלם של ריבועים הגדול או השווה ל- 48. הוא הוציא מן המגירה דף ועליו השרטוטים האלה:

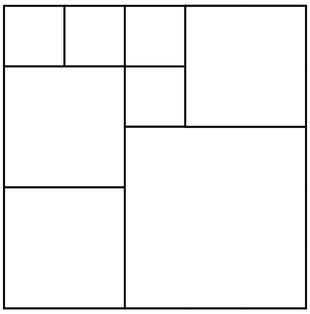
6 ריבועים



7 ריבועים



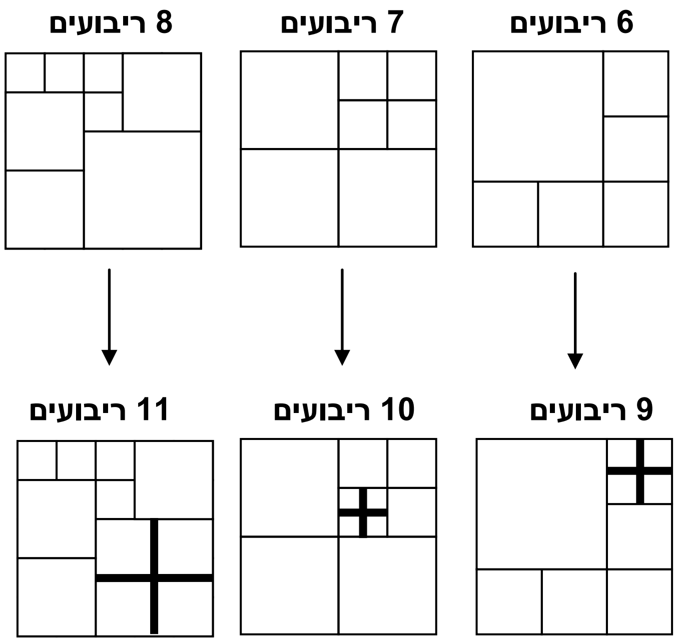
8 ריבועים



"עכשיו אתם כבר בטח מבינים שאפשר לחלק ריבוע לכל מספר שלם של ריבועים החל מ- 6", אמר הפקיד והוסיף: "ראינו שאפשר לחלק ריבוע גם ל- 4 ריבועים. איש לא הצליח לחלק ריבוע ל- 2 או ל- 3 או ל- 5 ריבועים. כל הניסיונות לעשות זאת נכשלו. מה דעתכם, האם יש דרך לחלק ריבוע ל- 3 או ל- 5 ריבועים?".

ניהול השיעור

כפי שראינו קודם, חלוקה של ריבוע ל- 48,49 ו- 50 ריבועים מבטיחה שאפשר לחלק ריבוע לכל מספר שלם של ריבועים החל מ- 48. בדומה לכך חלוקה של ריבוע ל- 7,6 ו- 8 ריבועים מבטיחה שאפשר לחלק ריבוע לכל מספר של ריבועים החל מ- 6. הנה למשל מעבר לחלוקה של הריבוע ל- 9, 10 ו- 11 ריבועים[1]:



כל הניסיונות לחלק ריבוע ל- 3 או ל- 5 ריבועים צפויים להיכשל. התלמידים ינסו דקות מספר ולא יצליחו (נספח 1 בסוף הפרק כולל הוכחה מדוע המשימות האלה חסרות פתרון. ההוכחה מיועדת למורים, שכן היא מורכבת לתלמידים בכיתות בית-הספר היסודי). סכמו את השיעור בכך שתאמרו לתלמידים שבשיעור הזה הם גילו שאפשר לחלק ריבוע לכל מספר שלם של ריבועים השונה מ- 3,2 או 5.

נספח 2 בסוף הפרק כולל הרחבה למורים, ובו נמצאת דרך הסתכלות שונה על הבעיה שליוותה אותנו בפעילות.

[1] נציין כי בדרך הזאת אפשר להכליל ולהציע אלגוריתם לפתרון הבעיה עבור כל מספר הגדול מ- 6 באמצעות בחינת השארית בחלוקה ל- 3 של המספר המבוקש. לדוגמה, אם המספר המבוקש הוא 85, השארית בחלוקה ל- 3 היא 1. נתחיל בריבוע המחולק ל- 7, המשאיר אף הוא שארית 1 בחלוקה ל- 3, ונחלק בו ריבועים כמספר הפעמים הנדרש כאשר כל חלוקה מוסיפה 3 ריבועים.

סיכום

הפרק הזה מוביל את התלמידים בכמה מסלולים במקביל. מסלול אחד הוא **המעבר מן הגאומטרייה אל האריתמטיקה** - לדוגמה, המשימה של חלוקת ריבוע ל-50 ריבועים הפכה להיות משימה של הגעה מ-36 אל 50 בעזרת הוספת מספרי 3 ומספרי 8 בלבד. עוד מסלול בפרק הוא **הכללה** – זהו המעבר מהוכחה של מספר קטן וסופי של מקרים להוכחה עבור מספר אינסופי של מקרים אפשריים, מלבד אולי מספר קטן של יוצאים מן הכלל (הוכחנו שאפשר לרצף ריבוע בכל מספר של ריבועים מלבד 2,3, ו- 5).

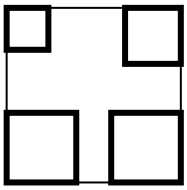
ההכללה היא אחת מאבני היסוד של העשייה המתמטית, והיא מרכיב משמעותי בבסיס מושג ההוכחה. השיטה שהוצגה במהלך הפרק עושה שימוש בניצני שיטת ההוכחה המתמטית הנקראת אינדוקציה, הנלמדת בשלבים מתקדמים של לימודי המתמטיקה. אנו מקווים שהניצנים האלה יסייעו לתלמידים כדי להבין ולהפנים מושגים מתקדמים במתמטיקה.

נספח 1: מדוע לא ניתן לרצף ריבוע בעזרת 3 או 5 ריבועים

ההוכחות שנציג כעת הן ברמה גבוהה מדי מן הרמה של רובם המוחלט של התלמידים בכיתות ה'- ו', והן מיועדות למורה.

3 ריבועים

נתבונן בארבע פינות הריבוע שאנו מעוניינים לרצף באמצעות 3 ריבועים קטנים ממנו. כל אחת מן הפינות צריכה להיות מכוסה בריבוע מְרצף. הנה דוגמה שבה כל פינה מכוסה בריבוע אחר:

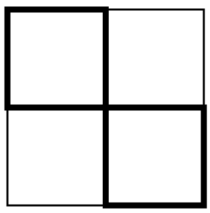


אך שימו לב! ברשותנו רק 3 ריבועים, ולכן שתיים מן הפינות חייבות להיות מכוסות באותו הריבוע. הבעיה היא שהריבוע היחיד שיכול לכסות את שתי הפינות האלה הוא הריבוע המקורי, שעלינו לרצף אותו בשלושה ריבועים קטנים יותר ממנו.

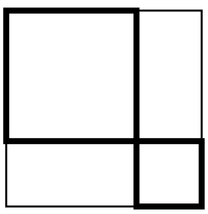
המסקנה היא שאין דרך לרצף ריבוע באמצעות 3 ריבועים.

5 ריבועים

המקרה הזה מורכב יותר מקודמו. נתחיל כמו קודם. כל פינה של הריבוע הנתון צריכה להיות מכוסה באמצעות ריבוע אחר (אחרת, כפי שראינו קודם, הריבוע היחיד שיכול לכסות יותר מפינה אחת הוא הריבוע שאנו צריכים לרצף). התבוננו שוב במצב המשורטט בחלקה הקודם של ההוכחה. לא ייתכן שבריצוף של 5 ריבועים, כל ארבעת הריבועים המכסים את הפינות יהיו זרים זה לזה (אינם נוגעים בצלע או בקדקוד) כיוון שהשטח שנותר לריבוע החמישי אינו ריבוע! נניח לרגע ששני ריבועים של פינות נגדיות נוגעים נגיעת קדקוד. ייתכנו שני מצבים – הריבועים האלה שווי גודל או שוני גודל:



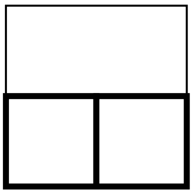
מצב א' - ריבועים שווי גודל: אחד משני הריבועים בפינות הנותרות (ימנית עליונה ושמאלית תחתונה) צריך להיות מחולק לשני ריבועים, וראינו שזה בלתי אפשרי.



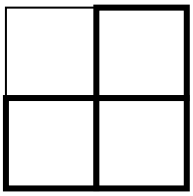
מצב ב', ריבועים שוני גודל: ברור שאין המשך שיאפשר ריצוף בעזרת 5 ריבועים – החלק הנותר לריצוף מורכב משני מלבנים ש"במקרה הטוב" נוכל לרצף כל אחד מהם בעזרת שני ריבועים.

כיוון שלא ייתכן שריבועים נגדיים יחלקו קטע של צלע משותפת (כיוון שאז בהכרח אחד מהם יהיה מלבן), נותר לבדוק את המקרה שבו שני ריבועים המכסים פינות סמוכות נוגעים זה בזה בצלע או בחלק מצלע. גם כאן יש לבדוק שני מקרים: הריבועים האלה שווי גודל או שוני גודל.

מקרה א – הריבועים שווי גודל

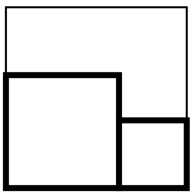


נותר לחלק את המלבן העליון לשלושה ריבועים. כל אחת מארבע הפינות של המלבן הזה חייבת להיות מכוסה באחד מן הריבועים. מאחר שנותרו עוד 3 ריבועים בלבד, שתיים מן הפינות של המלבן צריכות להיות מכוסות באותו הריבוע. לא קשה לראות שהדרך היחידה לעשות זאת היא למקם ריבוע השווה בגודלו לשניים שכבר כיסינו בהם את החלק התחתון של הריבוע הנתון:

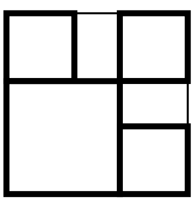


כעת נותר לרצף את הריבוע שנשאר בפינה השמאלית העליונה בשני ריבועים, אך אנו יודעים כבר שאין דרך לרצף ריבוע באמצעות שני ריבועים.

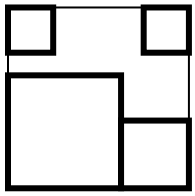
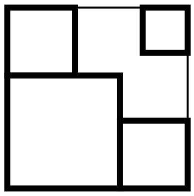
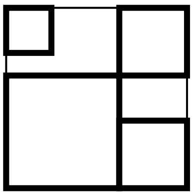
מקרה ב – הריבועים שוני גודל



נתבונן כעת בשתי הפינות העליונות של הריבוע הגדול אשר עדיין אינן מכוסות. לא קשה להבין שגודל הריבוע המכסה כל אחת מהן הוא לכל היותר בגודל הריבוע הקטן שכיסה את החלק התחתון הימני של הריבוע המקורי. כך ייראה הריצוף לאחר שנשתמש בשני הריבועים הגדולים ביותר האפשריים:



הבעיה היא שהחלק הנותר עבור הריבוע החמישי מפוצל, לכן ננסה דרך אחרת ונציב בפינה אחת או בשתי הפינות העליונות של הריבוע המקורי ריבוע או ריבועים קטנים יותר. גם אז רואים בנקל מדוע לא נצליח לרצף ב- 5 ריבועים.

בכל מקרה החלק שנותר לרצף אינו ריבוע.

נספח 2: הסתכלות שונה על הבעיה

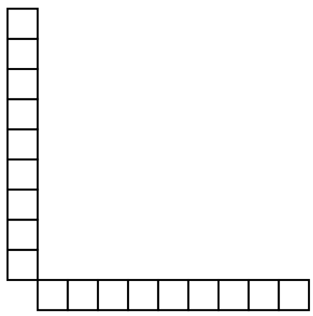
נציג כאן הוכחה בשני שלבים לטענה שאפשר לחלק ריבוע לכל מספר של ריבועים החל ב- 6, וגם ל- 4 ריבועים. להלן שני השלבים:

שלב א: נוכיח את הטענה לכל מספר זוגי של ריבועים החל ב- 4.

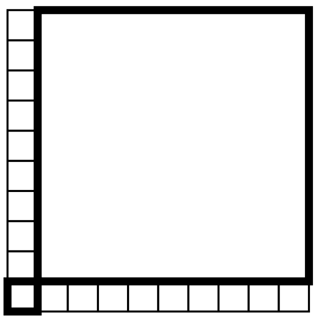
שלב ב: נסתמך על שלב א ונוכיח את הטענה לכל מספר אי-זוגי של ריבועים החל ב- 7.

שלב א

נניח שאנו רוצים לחלק ריבוע ל- 20 ריבועים. שימו לב! למעשה לא נתחיל בריבוע שנרצה לחלק אלא נבנה ריבוע מ- 20 ריבועים שירכיבו אותו. תחילה ניקח רק 18 ריבועים שווי גודל ("נשים בצד" שני ריבועים שבשלב הזה איננו יודעים את הגדלים שלהם). נחלק את הריבועים האלה לשתי קבוצות בנות 9 ריבועים כל אחת ונסדר אותם כך:



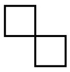
כדי לקבל את הריבוע הגדול נותר להוסיף שני ריבועים – ריבוע בפינה השמאלית התחתונה, השווה בגודלו לריבועים הקודמים, ועוד ריבוע גדול יותר ממנו בפינה הימנית העליונה:



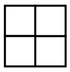
לא קשה להבין שבדרך דומה אפשר לבנות ריבוע מכל מספר זוגי של ריבועים החל מ- 4. "שמים בצד" שני ריבועים, מחלקים את יתר הריבועים (השווים בגודלם) לשתי

קבוצות שוות, ופועלים על פי הדרך שפעלנו בה לעיל.

ההוכחה תקפה גם במקרה של 4 ריבועים – "שמים בצד" שני ריבועים, ומן השניים האחרים בונים את המבנה הזה:



כעת מוסיפים את שני הריבועים החסרים:



שלב ב:

בשלב הזה נבצע פעולה דומה לפעולה שביצענו במהלך השיעור. ניקח את כל הפתרונות שמצאנו עבור המספרים הזוגיים של ריבועים, ונחלק בכל אחד מן הפתרונות את אחד מן הריבועים ל- 4 ריבועים במבנה של 2 על 2. כפי שכבר הבנו קודם, הפעולה הזאת מגדילה את מספר הריבועים ב- 3. והנה המצב שיקרה:

- ריבוע המחולק ל- 4 ריבועים יהפוך לריבוע המחולק ל- 7 ריבועים.
- ריבוע המחולק ל- 6 ריבועים יהפוך לריבוע המחולק ל- 9 ריבועים.
- ריבוע המחולק ל- 8 ריבועים יהפוך לריבוע המחולק ל- 11 ריבועים.

באופן הזה נוכל לקבל חלוקה של ריבוע לכל מספר אי-זוגי של ריבועים החל ב- 7.

ואז בסך הכל הוכחנו שאנחנו יכולים לחלק ריבוע לכל מספר של ריבועים החל ב-4, אך לא כולל 5.