



המרכז הישראלי למצוינות בחינוך
Israel Center for Excellence
through Education

מצוינות 2000
בחסות קרן סקירבול

המכון למצוינות בהוראה

מבחן כדורי הבדולח

גלי שמעוני

חומרי הלימוד הינם לשימוש במסגרת ההוראה בתכנית "מצוינות 2000" בלבד. אין להפיצם ללא רשות, מראש ובכתב, מהמרכז הישראלי למצוינות בחינוך.

מבוא

הפעילות המוגשת כאן מבוססת על חידה ידועה. הנה החידה המקורית:

"נתון מגדל בן 100 קומות ונתונים שני כדורי בדולח. ידוע שהחל מגובה מסוים, אם משליכים כדור בדולח כזה אל הקרקע, הוא מתנפץ. ייתכן שכדור כזה מתנפץ כבר אם נשליך אותו מהקומה הראשונה, אך ייתכן גם שהקומה הנמוכה ביותר החל ממנה הוא מתנפץ היא הקומה ה-37. כמו כן, ייתכן שגובה ההתנפצות יותר גבוה מגובה המרפסת בקומה ה-100, ולכן הכדורים לא יתנפצו מאף קומה.

המשימה היא להיעזר בשני כדורי הבדולח על-מנת למצוא, במינימום זריקות, את הקומה הנמוכה ביותר במגדל, אשר החל ממנה מתנפצים הכדורים (או לגלות שאין כזו). במהלך זריקות הכדורים מותר ששניהם יתנפצו.

מהו המספר המינימאלי של זריקות, המבטיח עמידה במשימה, עבור כל גובה התנפצות אפשרי?"

חידה זו אינה פשוטה. היא מופיעה כהרחבה למורה בסוף היחידה. בפעילות הנוכחית יפתרו התלמידים בעיות דומות עם מגדלים בעלי מספר קומות קטן יותר. נתחיל במגדל בן 6 קומות, נעבור למגדל גבוה יותר ואז למגדל גבוה עוד יותר. צורת הפתרון שתתגבש תהיה הקורסיבית – פתרון השאלה עבור מגדל בעל מספר קומות מסוים יעשה שימוש בפתרון שהתקבל עבור מגדל בעל מספר קומות נמוך יותר.

הפעילות דורשת סריקה שיטתית של כל האפשרויות לגבהים אפשריים של התנפצות. התלמידים יהיו שותפים פעילים לבניית פתרון משלהם, להצגתו בפני הכיתה ולהעמדתו למבחן בפני תלמידים אחרים. בנוסף, התלמידים יתבקשו לבחון פתרונות של תלמידים אחרים.

התחילו את השיעור בהקרנתם של השקפים שבהם סיפור המסגרת. קראו את הסיפור יחד עם התלמידים (אפשר לחלק את משימת ההקראה בין תלמידים שונים), ופתרו את שתי השאלות המופיעות בשקפים, תוך דיון כיתתי. לאחר מכן, חלקו את התלמידים לקבוצות בנות 3-4 תלמידים כל אחת וקראו את השקף בו סיפור המגדל הקטן בן 6 הקומות. התלמידים יתמודדו עם השאלה שבשקף ללא עזרת המורה. נציגי הקבוצות יבצעו סימולציות לבדיקת שיטותיהם, יסבירו שיטות אלה ולבסוף יתקיים דיון שבמהלכו תתגלה שיטה הפועלת בכל המקרים האפשריים. הדיון כאן חשוב ביותר, כיוון שהרעיונות שיופיעו בו

ישמשו את התלמידים גם במשימות המצפות להם בהמשך הפרק, בהן מופיעים מגדלים גדולים יותר.

לאחר פתרון המגדל הקטן בן 6 הקומות, עוברים לשקף ובו המגדל הבינוני בן 10 הקומות. כמו במגדל הקטן, התלמידים יתמודדו עם המשימה ללא סיוע מהמורה, כשבשלב הבא הם יציגו את פתרונותיהם ויתקיים דיון כיתתי בו תתגלה שיטה העובדת בכל המקרים האפשריים.

בחלק האחרון של השיעור עוברים לשקף ובו המגדל בן 15 קומות. אנו מקווים שהדיון לגבי פתרון המגדל הבינוני יסייע לתלמידים בהתמודדות עם המגדל הגדול, שעקרון העבודה בו דומה.

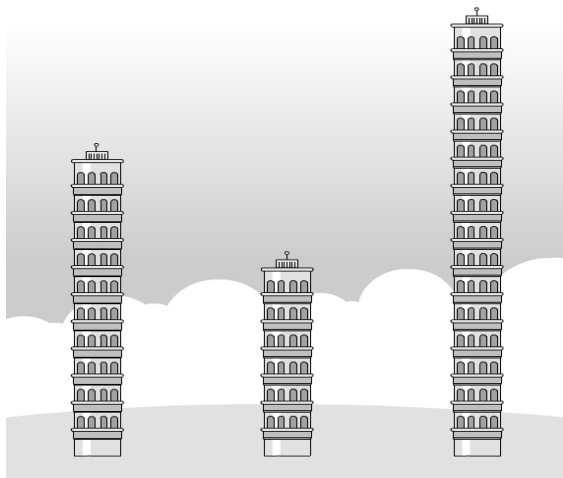
בסוף השיעור, מצורפת החידה המקורית ובה מגדל בן 100 קומות. חידה זו מורכבת יותר מקודמותיה והיא מהווה העשרה למורה. מי שירצה בכך יוכל בכל זאת לתת חידה זו לתלמידים מתקדמים מאוד כדי שיעבדו עליה בביתם.

הזמן המתאים לפעילות הוא לפחות שיעור אחד בן 90 דקות.



מבחן כדורי הבודולח

למלך אלכסנדר היו שלושה ארמונות (מגדלים) מרהיבים ביופיים.
"הארמון הקטן" – בעל 6 קומות, "הארמון הבינוני" – בעל 10
קומות, ו"הארמון הגדול" – בעל 15 הקומות.



יום אחד תלו שליחי המלך מודעה גדולה שהזמינה את תושבי הממלכה, שיחפצו בכך, להתייצב במתחם הארמונות ולנסות לעמוד ב"מבחן כדורי הבודולח".

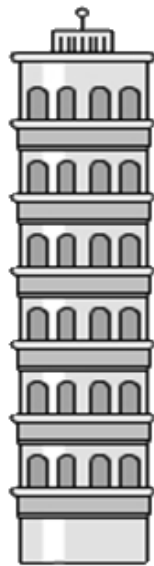
"זהו מבחן שבו תצטרכו להפעיל את המוח", נכתב במודעה. "אם תהיו מספיק חכמים תצאו ברווח גדול, אך אם תיכשלו, תאלצו לשלם מחיר יקר!"

תושבי הממלכה לא היו ידועים בחכמתם הרבה וגם לא באומץ לבם, ועל כן הגיעו רק מעטים מהם אל מתחם הארמונות ביום המיועד. המלך, שעמד במרכז הרחבה, שלף מכיסו כדור בדולח כחול וזרק אותו כלפי מעלה. הכדור נחת על רצפת האבן מבלי שיינזק. השליט הסביר לבאי הרחבה שכדור הבודולח אותו השליך הוא אמנם חזק מאוד, אך לא בלתי שביר. אם מפילים אותו, החל מגובה מסוים הוא מתנפץ לרסיסים.



אם, למשל, גובה ההתנפצות שלו הוא 15 מטר, ומפילים אותו מגובה של 14 מטר, הוא לא יתנפץ ולא ייגרם לו כל נזק. לעומת זאת, אם עוזבים אותו מגובה של 20 מטר למשל, הוא יתנפץ מיד כשיגיע אל הקרקע.

המלך ביקש משומעיו להפנות את מבטיהם אל "הארמון הקטן" בן 6 הקומות.



"אם אזרוק את כדור הבדולח הזה מהקומה הראשונה ייתכן שהוא יתנפץ, אך ייתכן שעוד לא הגענו לגובה ההתנפצות שלו, ולכן הוא לא יינזק. אם הכדור מתנפץ מנפילה מהקומה הראשונה, הרי שהוא בוודאי יתנפץ מנפילה מכל קומה אחרת.

שימו לב, לא גיליתי לכם מהו גובה ההתנפצות של הכדור, ולכן אינכם יודעים אם הוא יתנפץ החל מהקומה הראשונה, השנייה, השלישית, הרביעית, החמישית, השישית, או אולי לא יתנפץ כלל, כיוון שיתכן שגובה ההתנפצות שלו הוא מעבר לגובה הארמון כולו.



משימתכם היא לגלות את מספרה של הקומה שהחל ממנה מתנפץ הכדור. אם אין קומה כזו עליכם פשוט לומר לי זאת. שימו לב! בכל קומה מצויה מרפסת ממנה תוכלו להשליך את הכדור לבדיקה. אם תצליחו במשימתכם, תזכו ב- 300 מטבעות זהב. לעומת זאת, אם תשובתכם תהיה שגויה, תוכנסו לכלא המלכותי לכל ימי חייכם".

איילת, שהגיעה למבחן כדורי הבדולח עם חברתה רחל, התפרצה לדבריו של המלך וצעקה: "אני רוצה להשתתף. אזרוק את הכדור מהקומה הראשונה ואם לא יתנפץ אזרוק אותו מהקומה השנייה ואם לא יתנפץ אזרוק אותו מהקומה השלישית וכך הלאה. בדרך זו אגלה את הקומה שהחל ממנה הכדור מתנפץ, אם בכלל".

"יפה מאוד", אמר המלך, "אילו הייתי מצייד אותך בכדור בדולח אחד אכן זו הייתה דרך הפתרון היחידה האפשרית".

1. הסבירו את דבריו של המלך. מדוע הדרך אותה הציעה איילת היא דרך הפתרון היחידה, במקרה בו המלך היה מצייד אותה בכדור בדולח אחד?



המלך המשיך בדבריו: "הבעיה היא שלא הקשבת לי עד הסוף. ישנם עוד שני תנאים:

א. אתם תקבלו ממני לא כדור בדולח אחד, כי אם שניים.

ב. תוכלו לבצע 3 זריקות של הכדורים לכל היותר.

כאמור, תפקידכם יהיה לגלות את הקומה שהחל ממנה מתנפץ הכדור, אם בכלל. תוך כדי הבדיקות שלכם תוכלו מצדי לנפץ את שני הכדורים. שימו לב! מי שלא ידע את התשובה לשאלה החל מאיזו קומה מתנפץ כדור הבדולח, בכלא מקומו".

לפתע הפנה המלך את מבטו לעבר איילת ואמר "ואת, עלמתי, תהיי המתמודדת הראשונה, בגלל שהעזת להתפרץ לדבריי בטרם סיימתי את אשר היה לי לומר".

המלך נתן בידה של איילת שני כדורי בדולח כחולים והוביל אותה לעבר הארמון הקטן. "יש לך בדיוק חצי שעה לחשוב. בעוד 30 דקות תצטרכי לזרוק את שני הכדורים ולגלות את קומת ההתנפצות. כדאי שלא תטעי!"

2. האם כדאי לאיילת לפעול על-פי השיטה שהציעה כאשר התפרצה לדבריו של המלך? אם תפעל לפי שיטה זו, מהו המספר הגדול ביותר של זריקות בו היא עלולה לסיים את המשימה?

פתרונות המשימות שבשקף

השאלות שבשקף מהוות הכנה למשימות שיופיעו בהמשך הפעילות.

תשובה לשאלה מספר 1:

נניח שבניסיון הראשון נזרוק את הכדור לא מהקומה הראשונה, אלא למשל מהקומה השנייה. אם הכדור יתנפץ, לא נוכל לדעת אם כדור זה מתנפץ החל מהקומה הראשונה או החל מהקומה השנייה.

מסקנה: כאשר יש כדור בדולח אחד, הזריקה הראשונה חייבת להיות מהקומה הראשונה. על-פי אותו רעיון ניתן להבין מדוע אסור לדלג על אף קומה בסדר הזריקות.

תשובה לשאלה מספר 2:

לא מומלץ לאיילת לפעול לפי השיטה הראשונה אותה הציעה. אמנם, אם גובה ההתנפצות הוא החל מהקומה הראשונה, היא תגלה זאת בזריקה הראשונה, אך במקרה הגרוע, אם גובה ההתנפצות הוא החל מהקומה השישית, או מעבר לגובה המגדל, היא תגלה זאת רק לאחר הזריקה השישית, וזה הרבה יותר מ-3 הזריקות המותרות.

הסבירו לתלמידים שכלל חשוב בהמשך הפעילות הוא לקחת בחשבון את האפשרות הגרועה ביותר – בשיטה של איילת האפשרות הגרועה מוליכה ל-6 זריקות.

בשלב זה, חלקו את התלמידים לקבוצות בנות 3-4 תלמידים כל אחת, ואז הקריאו את השקף הבא העוסק במגדל הקטן. אפשרו לתלמידים להתמודד עם משימת השקף ללא עזרתכם. הסבירו להם שעליהם לחפש שיטה אותה יציג בהמשך הנציג שלהם מול כל הכיתה.

הזכירו ש"שיטה" פירושה לא רק מאיזו קומה זורקים את הכדור הראשון בפעם הראשונה, אלא מהלך ברור מה עושים לאחר מכן: לאיזו קומה פונים אם הכדור מתנפץ, ולאיזו קומה פונים עם הכדור אינו מתנפץ.

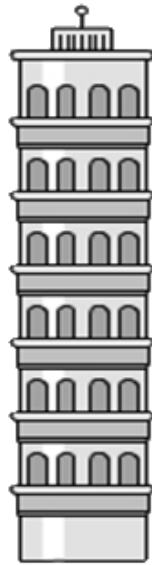


הארמון הקטן

איילת לקחה את שני כדורי הבדולח וניגשה אל המגדל בן 6 הקומות. היא חשבה שוב על הכללים:

א. בידיה שני כדורי בדולח, ומותר לה לשבור את שניהם.

ב. מותר לה לבצע 3 זריקות של הכדורים לכל היותר.



לפתע נשמע קולה של רחל: "איילת, חכי רגע. אל תמהרי. יש לך חצי שעה. אני והחברים נכין לך "מגדלי אימון" דמיוניים, ואז תוכלי לבחון שיטות שונות, עד שתמצאי שיטה טובה שתבטיח לך את הפרס".

הציעו דרך המבטיחה לאיילת לעמוד במשימה בלא יותר מ- 3 זריקות. השיטה צריכה לקחת בחשבון כל גובה התנפצות אפשרי.

הארמון הקטן - פתרון

אפשרו לתלמידים לעבוד על המשימה כ- 20 דקות. לבסוף הזמינו אליכם נציג של אחת הקבוצות. הסבירו לו שהוא עומד לצאת מהכיתה, וכשיהיה בחוץ יבחרו עבורו שלושה מקרים של גבהי התנפצות עליהם הוא יבצע סימולציה. הנה דוגמא.

נניח שתלמידי הכיתה בחרו את המקרים הבאים:

- גובה התנפצות החל מקומה 3
- גובה התנפצות החל מקומה 5
- גובה התנפצות החל מקומה 2

התלמיד שיצא מהכיתה חוזר אליה והוא אמור לבצע סימולציה על מקרים אלה. מתחילים במקרה הראשון. נניח שהתלמיד אומר שזריקתו הראשונה היא מקומה 5. במקרה זה מודיעים לו שהכדור התנפץ והוא נותר עם כדור אחד ו- 2 זריקות. נניח כעת שהתלמיד מודיע שאת הזריקה השנייה שלו הוא מבצע מקומה 1. מודיעים לו שהכדור לא התנפץ. התלמיד ממשיך ומודיע שאת הזריקה השלישית שלו הוא מבצע מקומה 3. כעת מודיעים לו שהכדור התנפץ. בשלב זה על התלמיד להחליט מהו גובה ההתנפצות. הוא אינו יודע אם הגובה הזה הוא החל מקומה 3, או 4 או 5. לא נותר לו אלא לנחש. התלמידים שצפו בסימולציה ודאי שמו לב שהשיטה של התלמיד מכילה מרכיב של מזל.

לאחר שהתלמיד סיים לבדוק את שיטתו על שלושת המגדלים שבחרו התלמידים, מזמין המורה אל הלוח נציג של קבוצה אחרת וחוזר על אותן הפעולות – הנציג יוצא מהכיתה, נבחרים עבורו שלושה מקרים של גבהי התנפצות ושיטתו נבדקת לגביהם.

לאחר שהסתיימה הבדיקה של נציגי כל הקבוצות, כל נציג מגיע אל הלוח ומסביר את השיטה של קבוצתו. לאחר הצגתה של כל שיטה מתקיים דיון לגביה, בו נבדק אם היא עובדת בכל המקרים¹.

פתרון האתגר: (השיטה היחידה העובדת בכל המקרים)

איילת מחפשת פתרון שבו יספיקו לה 3 זריקות לכל היותר. נסביר כעת מדוע הקומה הגבוהה ביותר בה היא יכולה להתחיל היא קומה מספר 3.

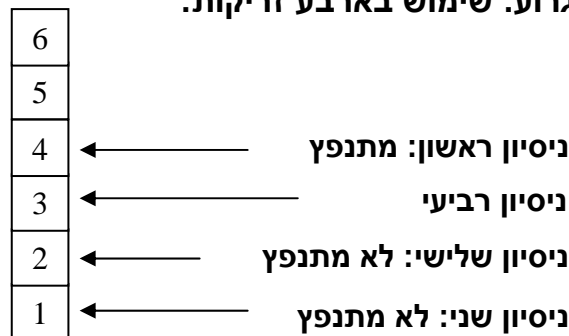
¹ שימו לב שייטכן שקבוצה שבחרה בשיטה מסוימת הצליחה לגלות את שלוש התשובות הנכונות בסימולציה, למרות שהשתמשה בשיטה שאינה עובדת בכל המקרים. בדיון הכיתתי יש לדון בעניין זה.

אם איילת תזרוק את הכדור מהקומה הרביעית, למשל, והוא יתנפץ, היא תישאר עם כדור בדולח אחד ביד ועם ארבע אפשרויות:

- כדור הבדולח מתנפץ החל מהקומה הראשונה.
- כדור הבדולח מתנפץ החל מהקומה השנייה.
- כדור הבדולח מתנפץ החל מהקומה השלישית.
- כדור הבדולח מתנפץ החל מהקומה הרביעית.

כפי שראינו בתחילת השיעור, כאשר נשארים עם כדור בדולח אחד, הדרך היחידה להמשיך היא לזרוק אותו קומה אחר קומה כל עוד אינו מתנפץ. אם קומת ההתנפצות שלו היא 3 או 4, תיאלץ איילת להשתמש ב- 3 זריקות נוספות בקומות 1, 2 ו- 3. הבעיה היא שבמצב כזה איילת משתמשת ב- 4 זריקות וזה מעבר למותר:

המקרה הגרוע: שימוש בארבע זריקות:



הערה:

נניח שבידינו 2 כדורי בדולח ואנו בודקים ארמון בעל 30 קומות. אם נזרוק את הזריקה הראשונה מקומה מספר 15 והוא יתנפץ, נזדקק **במקרה הגרוע** ל- 15 זריקות.

אם נזרוק את הזריקה הראשונה מקומה מספר 23 והוא יתנפץ, נזדקק **במקרה הגרוע** ל- 23 זריקות.

באופן כללי:

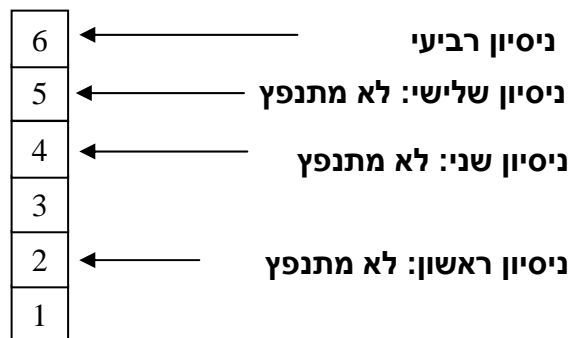
אם נזרוק את הכדור הראשון מקומה n והוא יתנפץ, נזדקק במקרה הגרוע ל- n זריקות. ההסבר הוא פשוט. אם, למשל, זרקנו את הכדור הראשון מקומה 15 והוא התנפץ, אנחנו לא יודעים איזו מהקומות 1-15 היא קומת ההתנפצות הראשונה שלו. מאחר שנותרנו עם כדור בדולח אחד, ניאלץ לבדוק את הקומות 1-14 לפי הסדר, ונעצור רק כאשר הכדור יתנפץ באחת מהן. במקרה הגרוע ניאלץ לבדוק את כל 14 הקומות האלה ויחד עם הזריקה הראשונה נקבל בסך-הכול 15 זריקות (רעיון זה מתאים כמובן לכל n).

נעיר שוב שמאחר שהשיטה לזריקת הכדורים חייבת לעבוד עבור כל גובה התנפצות אפשרי, חייבים תמיד להביא בחשבון את המקרה הגרוע ביותר.

מכאן רואים שכל שיטה בה הזריקה הראשונה היא מקומה 4 או 5 או 6, עלולה לדרוש יותר מ-3 זריקות ולכן היא אינה "טובה". זריקה ראשונה מקומה 3 נראית רעיון טוב, ומיד נראה שאכן כך הדבר.

בטרם נעשה זאת, נסביר מדוע לא כדאי להתחיל בקומה 2 (ממנה נבין גם מדוע לא כדאי להתחיל בזריקה מקומה 1). מי שזרוק זריקה ראשונה מקומה זו והכדור מתנפץ, בוודאי יוכל לזרוק את הזריקה הבאה מקומה 1 ואז יגלה את גובה ההתנפצות. הבעיה היא מה קורה כאשר זריקה ראשונה מקומה 2 אינה מנפצת את הכדור. נותר לבדוק אם גובה ההתנפצות הוא מקומה 3 או 4 או 5 או 6 או כלל לא. קל לבדוק ששתי זריקות אינן יכולות לכסות את כל המצבים האלה (בדקו זאת).

הנה דוגמא לניסיון המסתיים ב-4 זריקות (הזריקה השנייה היא מקומה 4).



והנה השיטה (היחידה) המתאימה לכל גבהי ההתנפצות האפשריים:

איילת זורקת את הכדור הראשון מהקומה הגבוהה ביותר האפשרית – 3.

נבחן את שני המצבים האפשריים:

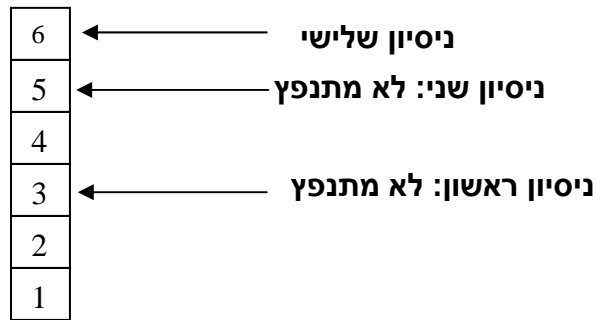
א. מה קורה אם הכדור מתנפץ בקומה 3?

ב. מה קורה אם הכדור אינו מתנפץ בקומה 3?

מקרה א: ראינו כבר קודם מדוע 3 זריקות יספיקו. את הכדור השני יש לזרוק מהקומה הראשונה. אם הוא מתנפץ הרי שגובה ההתנפצות הוא החל מהקומה הראשונה. אם אינו מתנפץ, נשארה לאיילת עוד זריקה אחת, אותה היא תבצע מהקומה השנייה, וכך תגלה האם "קומת הניפוח" היא 2 או 3.

מקרה ב: נותר לטפל במקרה בו הכדור הראשון לא התנפץ בקומה ה-3. במקרה זה נותרנו עם שני כדורי בדולח שלמים ומותר לנו להשתמש בעוד 2 זריקות. שימו לב! מאחר שנותרו לנו עוד שתי זריקות אנחנו יכולים לעלות בזריקה הבאה רק עוד שתי קומות, כלומר לקומה מספר 5. אם הכדור יתנפץ נבדוק את קומה מספר 4. אם הכדור לא יתנפץ, נבדוק את קומה 6.

דוגמא להצלחה ב-3 זריקות

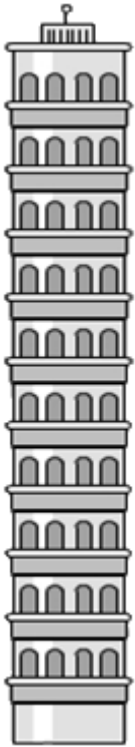


כדאי לערוך דיון עם הכיתה על-מנת לוודא שהתלמידים הבינו מדוע שיטה זו עובדת בכל המקרים והיא אינה מכילה כל מרכיב של מזל.

כעת, קראו עם התלמידים את השקף הבא, בו מופיע המשך הסיפור לגבי המגדל הבינוני בן 10 הקומות. באפשרותכם לנהל חלק זה של השיעור בדומה לאופן בו ניהלתם את החלק בו המגדל הקטן (לבקש מהקבוצות לחפש שיטה, לשלוח נציג שיבצע סימולציה על מספר גבהי התנפצות ואז לבקש מכל נציג להסביר את שיטתו), או פשוט לבקש מהקבוצות השונות להסביר את שיטותיהם, ללא ביצוע סימולציה.

הארמון הבינוני

איילת סיימה בהצלחה את משימת כדורי בדולח בארמון הקטן.



בשלב הזה הוביל אותה המלך אל הארמון הבינוני בן 10 הקומות. הוא נתן בידה שני כדורי בדולח אדומים והסביר לה שעליה לגלות החל מאיזו קומה מתנפצים כדורים אלה.

"הפעם", אמר המלך, "אני מאפשר לך 4 זריקות לכל היותר כדי לעמוד במשימה. אם תצליחי – הפרס יוגדל ל- 500 מטבעות זהב. אם תיכשלי – תמצאי את עצמך בכלא".

איילת הבינה שעליה לחפש דרך שתבטיח לה בוודאות מוחלטת שלא תזדקק ליותר מ- 4 זריקות. לאחר שחשבה מספר דקות, צץ במוחה הפתרון.

מהי הדרך המבטיחה לאיילת עמידה במשימה בלא יותר מ- 4 זריקות?

הארמון הבינוני – פתרון

איילת צריכה לעמוד במשימת המגדל הבינוני בן 10 הקומות ב-4 זריקות לכל היותר. מתוך הניתוח שעשינו עד כה ניתן להבין שהקומה הגבוהה ביותר בה איילת יכולה להתחיל היא קומה 4. אם תתחיל מקומה גבוהה יותר והכדור יתנפץ, יישאר לה כדור אחד ו-3 זריקות, וזה עלול לא להספיק.

הערה: יש תלמידים שמסיקים מהפתרון של המגדל הקטן שהקומה שממנה יש לזרוק את הכדור הראשון במגדל הבינוני היא 5 (אם ב-6 קומות זורקים מקומה 3, שהיא חצי של 6, אז ב-10 קומות יש לזרוק את הכדור מקומה 5, שהיא חצי של 10). התחלה כזו עלולה כמובן להוליך לכישלון המשימה – אם הכדור מתנפץ בקומה 5 צריך לבדוק את 4 הקומות שמתחתיה בזו אחר זו, אבל נותרו רק 3 זריקות. אפשרו לתלמידים לבחון את הצעתם ולהגיע בעצמם למסקנה זו.

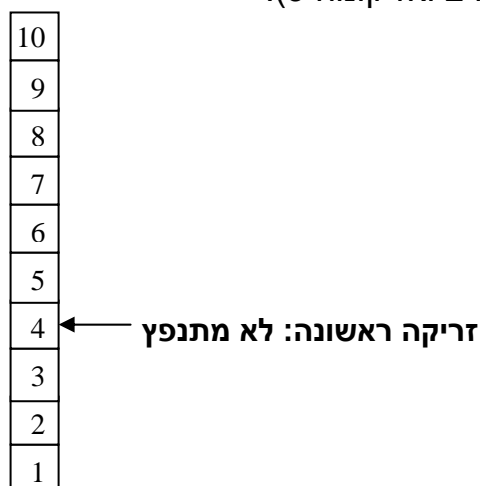
כדי לוודא שקומה 4 היא אכן הקומה הנכונה להתחיל בה את הזריקות, צריך לבדוק את שני המקרים האפשריים:

א. מה קורה אם הכדור מתנפץ בזריקה הראשונה?

ב. מה קורה אם הכדור אינו מתנפץ בזריקה הראשונה?

נבדוק המקרים אלה:

א. אם הכדור יתנפץ בזריקה מקומה 4, תוכל איילת, בעזרת 3 זריקות נוספות לכל היותר, לסיים את המשימה (קומה 1 ואז קומה 2 ואז קומה 3).



ב. אם הכדור הראשון אינו מתנפץ בקומה 4, נותרים בידיה של איילת 2 כדורי בדולח שלמים, והיא צריכה תוך 3 זריקות לבדוק את 6 הקומות 5-10. אך שימו לב! מצב זה שקול

למצב של ארמון בעל 6 קומות, אותו פתרנו בשאלה מספר 4. מן הפתרון שם נובע שיסיפיקו לנו עוד 3 זריקות לכל היותר, וזה בדיוק מה שיש לנו. נראה, בכל זאת, כיצד עושים זאת, וכך תיווכחו שההמשך שקול לדרך הפתרון של המגדל הקטן.

10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

← זריקה שנייה

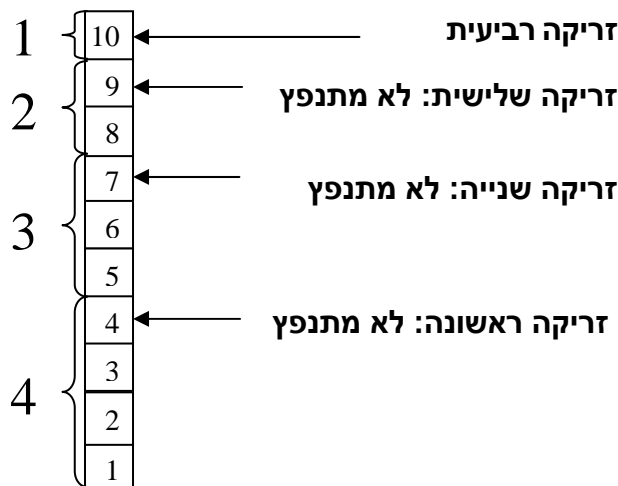
← זריקה ראשונה: לא מתנפץ

מאחר שנותרו לאיילת עוד 3 זריקות, היא יכולה לטפס עוד 3 קומות, עד לקומה מספר 7, ולזרוק משם את הכדור. אם הוא יתנפץ היא תוכל לבדוק, בשתי הזריקות שנותרו לה, את קומות 5 ו-6.

אם לא יתנפץ, נמשיך אל הזריקה השלישית על-פי אותו הרעיון בו השתמשנו בשתי הזריקות הקודמות.

נותרו בידינו שני כדורים שלמים ובאפשרותנו להשתמש בעוד שתי זריקות, ולכן אפשר לעלות עוד שתי קומות למעלה, עד לקומה מספר 9. אם הכדור יתנפץ, נבצע זריקה רביעית מקומה 8 ואם לא יתנפץ, נבצע זריקה רביעית מקומה 10.

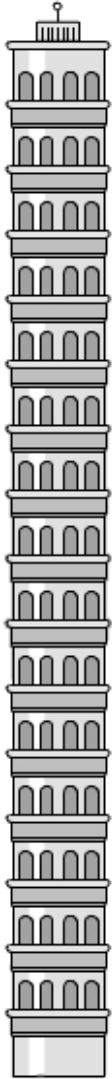
הפתרון במקרה זה מודגם להלן:



חשוב להדגיש בדיון את הרעיון שבו בכל זריקה בה הכדור אינו מתנפץ, עולים אל הקומה הגבוהה ביותר האפשרית לפי מספר הזריקות שעוד נותרו.

הגענו אל חלקו האחרון של השיעור. קראו עם התלמידים את השקף שבעמוד הבא, בו מופיע המגדל הגדול בן 15 הקומות. כאן אין עוד צורך בסימולציות. התלמידים יוכלו לעבוד כעת בקבוצות וכבודדים, ולבסוף להציג את שיטותיהם.

הארמון הגדול



לאחר שעמדה גם במשימת הארמון הבינוני, הגיעה איילת למשימה האחרונה – משימת הארמון הגדול בעל 15 הקומות. המלך צייד אותה הפעם בשני כדורי בדולח סגולים. "אני מאפשר לך לכל היותר 5 זריקות כדי למצוא את קומת ההתנפצות (אם היא קיימת) של כדורי הבדולח הסגולים. אם תצליחי גם במשימה האחרונה, תזכי בפרס שהוא 1000 מטבעות זהב. לעומת זאת, אם לא תצליחי, את כבר יודעת מה מצפה לך."

מהי הדרך המבטיחה לאיילת עמידה במשימה בלא יותר מ- 5 זריקות?

הארמון הגדול - פתרון

עיקרון הפתרון של 5 זריקות בארמון בן 15 קומות דומה לזה שהראינו בארמון 10 הקומות. הזריקה הראשונה נקבעת על-פי מספר הקומות - מתחילים מקומה מספר 5; אם הכדור אינו מתנפץ – חזרנו בעצם למקרה הקודם, של מגדל בן 10 קומות וארבע זריקות אפשריות, ואז מאמצים את הפתרון שלו: עולים עוד 4 קומות (לקומה 9); אם גם אז אינו מתנפץ, עולים עוד 3 קומות (לקומה 12); אם גם כעת אין הכדור מתנפץ, עולים עוד 2 קומות (לקומה 14), ואם גם כעת אינו מתנפץ, עולים לקומה האחרונה.

האיור הבא יסייע בהבהרת הפתרון. בכל מקרה בו הכדור מתנפץ, הברירה היא ללכת מלמטה, מהקומה שמעל לקומה שממנה נזרק הכדור בפעם הקודמת, ולעלות קומה אחר קומה לפי הסדר.



הרחבה למורה – מגדל בן 100 קומות

נתון מגדל בן 100 קומות, וברשותנו שני כדורי בדולח. מהו המספר המינימאלי של זריקות שיאפשר למצוא תמיד את הקומה שממנה ואילך הכדורים מתנפצים, אם בכלל יש כזו? שאלה זו קשה בהרבה מקודמותיה, כיוון שמספר הזריקות אינו נתון בה. נסתכל לרגע במקרה הבא:

רוני טוען שהוא יצליח בוודאות למצוא את קומת ההתנפצות של הכדור תוך שימוש ב-12 זריקות לכל היותר. האם ייתכן שרוני צודק?

נסביר מדוע רוני טועה. אם באמת ניתן להסתפק ב-12 זריקות, הרי שהקומה הגבוהה ביותר האפשרית לזריקה הראשונה היא 12. אם הכדור יתנפץ בקומה זו, ניאלץ לעלות קומה אחר קומה, מהראשונה, עד אשר נגלה את קומת ההתנפצות. ראינו כבר שהמקרה הגרוע עלול לדרוש מאיתנו 12 זריקות. (לו היינו זורקים את הזריקה הראשונה מהקומה ה-13 למשל, היינו עלולים להידרש ל-13 זריקות, אבל רוני טען שיש שיטה בה אפשר להסתפק ב-12 זריקות.)

כאמור, הזריקה הראשונה היא לכל היותר מקומה 12. מתוך כך, אם הכדור לא יתנפץ, יישארו לנו 11 זריקות ו-2 כדורים, ונוכל לעלות לכל היותר עוד 11 קומות, עד הקומה ה-23; אם גם אז הכדור לא יתנפץ נוכל לעלות לכל היותר עוד 10 קומות וכך הלאה. נראה כעת את מספרי הקומות הגבוהות ביותר אליהן נוכל להגיע בדרך זו ב-12 זריקות:

12,23,33,42,50,57,63,68,72,75,77,78

12 זריקות לא יספיקו להגיע לקומה 100; הן מספיקות לכל היותר למגדל בן 78 קומות.

נבדוק כעת האם 13 זריקות מספיקות. הנה סדרת הקומות הגבוהות ביותר במקרה זה:

13,25,36,46,55,63,70,76,81,85,88,90,91

13 זריקות לא יספיקו להגיע לקומה 100; הן מספיקות לכל היותר למגדל בן 91 קומות.

התחושה היא ש-14 זריקות יספיקו, ואכן, הנה סדרת הקומות הגבוהות ביותר כאן:

14,27,39,50,60,69,77,84,90,95,99,102,104,105

למעשה, גילינו ש-14 זריקות מספיקות אפילו למגדל בן 105 קומות. מתוך כך ברור שהן יספיקו גם למגדל בן 100 קומות. אם בקומה 99 הכדור אינו מתנפץ, פשוט זורקים את הזריקה הבאה מקומה 100.

שימו לב שאם קומת ההתנפצות היא 100, הרי שיספיקו 12 זריקות, אך אין זה אומר ש- 12 זריקות מספיקות תמיד בשיטה זו. אם, למשל, הכדור יתנפץ בזריקה הראשונה – קומה 14, הרי שייתכן שנזדקק לכל 14 הזריקות.

לכן, השיטה שהוצגה מאפשרת הצלחה בכל מקרה ב- 14 זריקות לכל היותר.