

מדינת ישראל
 משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

מחון מבחן מפמ"ר במתמטיקה – עתודה מדעית טכנולוגית – כיתה ט' - טור א

ב ה צ ל ח ה !

המבחן מתוכנן ל-90 דקות.
 השימוש במחשבון מותר.

שם התלמיד: _____
 כיתה: _____

פרק א: מיומנויות אלגבריות

פתרו את המשוואה:

$$1. \frac{x+4}{x^2-1} - \frac{2x+5}{(x+1)^2} - \frac{12}{4x+4} = 0$$

תחום ההדגרה: $x \neq \pm 1$

פתרון: $x = 2, -1.5$

הערות	ניקוד	פתרון
0 נקודות תשובה שגויה או חלקית 2 נק' תשובה נכונה שלמה	2 נק'	תחום ההדגרה: $x \neq \pm 1$
פירוק המכנים – 3 נק' קביעת מכנה משותף, הכפלה בשני האגפים וצמצום מכנים 5 נק' פתיחת סוגריים: 4 נק' כינוס איברים דומים: 3 נק' מציאת השורשים: 3 נק'	18 נק'	$\frac{x+4}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x+5}{(x+1)^2} - \frac{12}{4(x+1)} = 0$ <p>נכפיל שני האגפים בביטוי $(x+1)^2(x-1)$ ונקבל</p> $(x+4)(x+1) - (2x+5)(x-1) - 3(x-1) = 0$ $x^2 + 5x + 4 - 2x^2 - 3x + 5 - 3x^2 + 3 = 0$ $-4x^2 + 2x + 12 = 0$ $x_{1,2} = 2, -1.5$ <p>פתרון: $x = 2, -1.5$</p>

פרק ב: פונקציות

ענו על שתי שאלות מהשאלות 2-5

2. נתונה פונקציה ריבועית $f(x)$. גרף פרבולה עובר דרך הנקודה $(-1, 12)$.

הערך המקסימלי שמקבלת הפונקציה הינו 16.

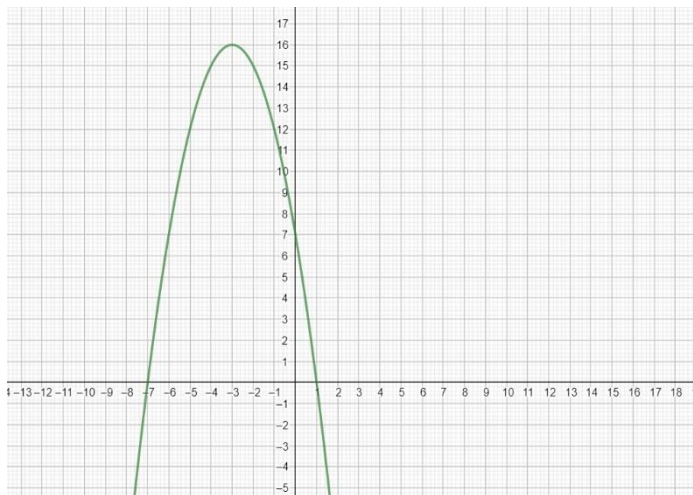
הפונקציה עולה בתחום $x < -3$

א. כתבו את הביטוי האלגברי המייצג את הפונקציה. נמקו איך מצאתם.

$$f(x) = -(x + 3)^2 + 16$$

הערות	ניקוד	פתרון
זיהוי שיעורי נקודת הקיצון 2 נק' הצבת שיעורי הנקודה ומציאת הפרמטר 2- נק'	4 נק'	<p>הפונקציה עולה בתחום $x < -3$ זה אומר $x_{\text{קודקוד}} = -3$ וערך ה- y שווה 16. $f(x) = a(x + 3)^2 + 16$ נתון: $f(-1) = 12$ $f(-1) = a(-1 + 3)^2 + 16 = -4a + 16 = 12$ $a = -1$ לכן הביטוי הוא: $f(x) = -(x + 3)^2 + 16$</p>

ב. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$.



'שרטוט נכון: 3 נק'

מדינת ישראל
 משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

ג. מהו התחום בו הפונקציה $f(x)$ חיובית. $-7 < x < 1$

הערות	ניקוד	פתרון
מצא נקודות חיתוך עם ציר $x - 2$ נק' מצא את תחום החיוביות הנכון – 2 נק' (לתת ניקוד רק לתשובה מלאה ונכונה)	4 נק'	$-7 < x < 1$

ד. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x + 4)$.

- מהן נקודות החיתוך עם ציר x של הפונקציה $g(x)$. נמקו
 $(-11, 0), (-3, 0)$

הערות	ניקוד	פתרון
תשובה ללא הסבר : 1 נק' נקודה אחת נכונה 1 נק' כתיבת שיעורי x בלי שיעורי $y - 1$ נק'	3 נק'	הזזה אופקי 4 יחידות שמאלה לפונקציה $f(x)$ $(-11, 0), (-3, 0)$

- מהו תחום העליה של הפונקציה $g(x)$ $x < -7$

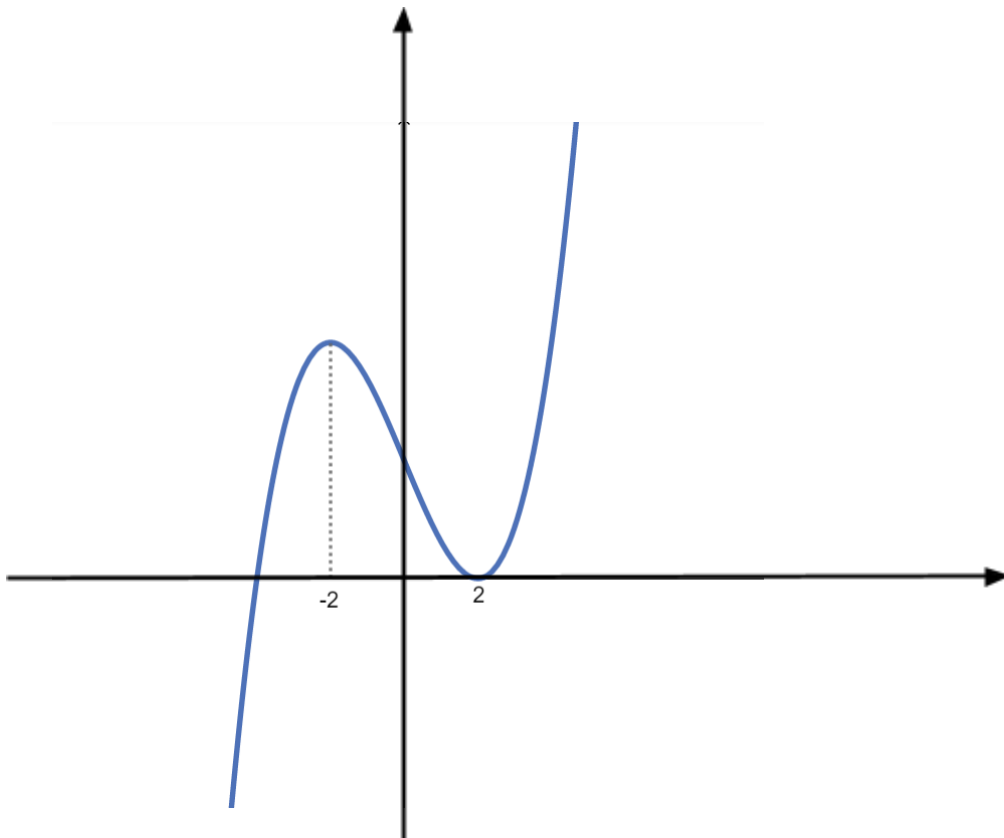
הערות	ניקוד	פתרון
תשובה ללא הסבר : 1 נק' מציאת הקודקוד 1 נק' קביעת תחום 2 נק'	3 נק'	הזזה אופקי 4 יחידות שמאלה לקודקוד של $f(x)$ $x < -7$

ה. שרטטו גרף הפונקציה $k(x) = |g(x)|$.

מדינת ישראל
משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה



3. נתון לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = (x + 4)(x - 2)^2$



א. מצאו נקודות חיתוך הפונקציה עם הצירים. $(-4, 0), (2, 0), (0, 16)$

הערות	ניקוד	פתרון
<p>כתיבת שיעורי x בלי שיעורי y – נק'2</p> <p>2 נקודות נכונות – 2 נק'</p>	4 נק'	$(x + 4)(x - 2)^2 = 0$ $x = -4, 2$ $f(0) = 4 \cdot 4 = 16$

מדינת ישראל
 משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

3 נקודות נכונות – 4 נק'		
-------------------------	--	--

ב. הפונקציה מקבלת את הערך המקסימלי כאשר $x = -2$.
 מצאו את שיעור נקודת המקסימום. $(-2, 32)$

הערות	ניקוד	פתרון
הציב נכון ורק טעות אחת בחישוב – 1 נק'	2 נק'	$f(-2) = 32$

ג. מהו התחום בו הפונקציה $f(x)$ חיובית וגם יורדת? $-2 < x < 2$

הערות	ניקוד	פתרון
אין תשובה חלקית	3 נק'	$-2 < x < 2$

ד. נתונה הפונקציה $k(x) = f(x) + c$.

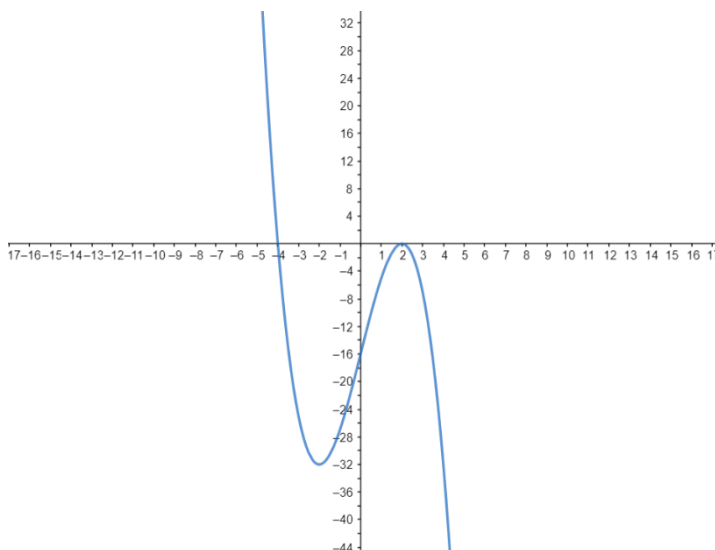
עבור איזה ערכי c לפונקציה 3 נקודות חיתוך עם ציר x ? $-32 < c < 0$

הערות	ניקוד	פתרון
אין תשובה חלקית	4 נק'	$-32 < c < 0$

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = -f(x)$.

ה.1. שרטטו גרף הפונקציה $g(x)$.

'שרטוט נכון: 4 נק'



מדינת ישראל
 משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

ה. מהם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבעו את סוגם.

הערות	ניקוד	פתרון
לכל שיעורי נקודה 1 נק', סוג 0.5 נק'	3 נק'	$\max(2, 0), \min(-2, -32)$

4. נתונה הפונקציה הריבועית $f(x) = -(x - 6)^2 + 9$

א. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים. $(3, 0), (9, 0), (0, -27)$

הערות	ניקוד	פתרון
2 נק': חיתוך עם ציר x 1 נק': חיתוך עם ציר y	3 נק'	$-(x - 6)^2 + 9 = 0$ $(x - 6)^2 = 9$ $x - 6 = 3, x - 6 = -3$ $x = 3, 9$ $f(0) = -27$

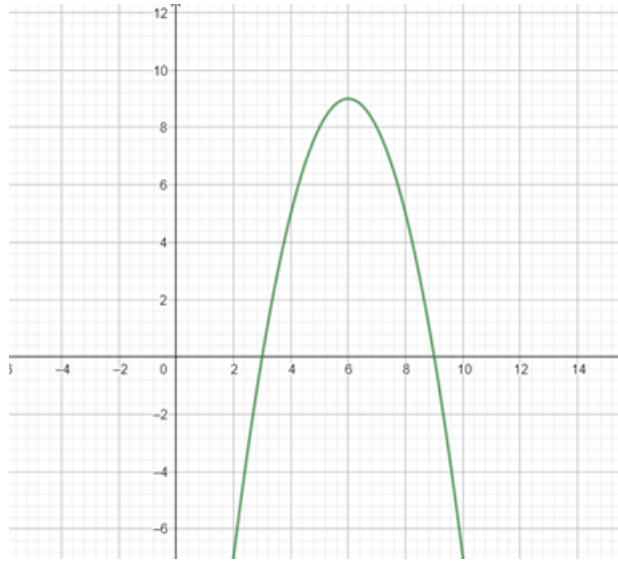
ב. רשמו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה הנתונה, וקבעו את סוגה. $\max(6, 9)$

הערות	ניקוד	פתרון
תשובה ללא נימוק 2 נק	2 נק'	$\max(6, 9)$

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה

שרטוט 3 נק'

מדינת ישראל
 משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה



ד. נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$

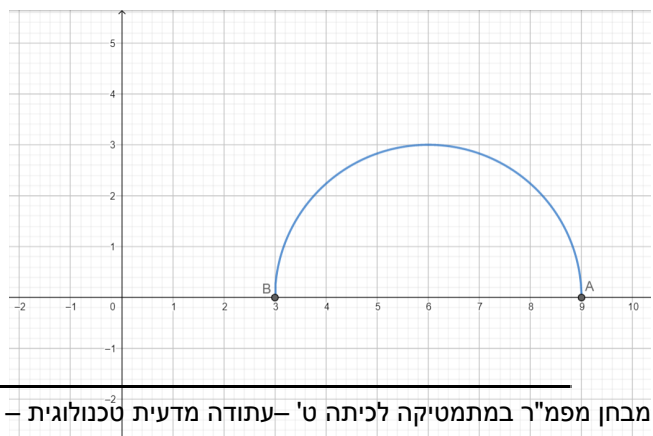
1. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$. $3 \leq x \leq 9$

הערות	ניקוד	פתרון
תשובה ללא נימוק 1 נק'	2 נק'	מהשרטוט: $f(x) \geq 0$ כאשר $3 \leq x \leq 9$

2. מצאו נקודות הקיצון לפונקציה $g(x)$

הערות	ניקוד	פתרון
כתב תשובה ללא הקצוות 2 נק'	3 נק'	$\max(6, 3), \min(3, 0), \min(9, 0)$

3. שרטטו גרף הפונקציה $g(x)$. **2 נקודות**



מדינת ישראל
 משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

4. מהו מספר הפתרונות של המשוואה: $g(x) = 2$. **נמקו 2 פתרונות**

הערות	ניקוד	פתרון
תשובה ללא הסבר 1 נק'	2 נק'	הערך המקסימלי שמקבלת הפונקציה הינו 3 ולכן למשוואה 2 פתרונות

ה. נתונה הפונקציה $k(x) = g(x - 3)$

1. מה הם נקודות הקיצון של הפונקציה $k(x)$? מהו סוגן, נמקו?

הערות	ניקוד	פתרון
לכל נק' – 1 נקודות, הסבר 1 נק'	2 נק'	הזזה של 3 יחידות ימינה ולכן נקודות הקיצון הן: $\max(9, 3), \min(6, 0), \min(12, 0)$

2. לאילו ערכי x הפונקציה $k(x)$ עולה.

לא צריך הסבר	1 נק'	$6 < x < 9$
--------------	-------	-------------

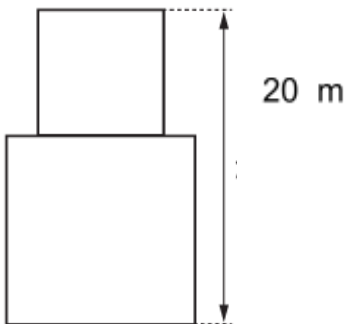
5. נתונה מפת בניין המורכב משני מבנים זה על גבי זה.

המבנים משרטוט כשני ריבועים המונחים זה על זה

(גובה הבניין 20 מטר) (ראה ציור)

א. סמן ב x את גובה המבנה התחתון, והבע באמצעות x את גובה

המבנה העליון.



הערות	ניקוד	פתרון
אין תשובה חלקית	4 נק'	20-x

ב. כתבו בפונקציה המתארת את שטח חזית הבניין.

הערות	ניקוד	פתרון
כתב את הביטוי 5 נק' כינוס איברים דומים 2 נק'	7 נק'	$f(x) = x^2 + (20 - x)^2$ $f(x) = 2x^2 + 400 - 40x$

מדינת ישראל
 משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

טעות אחת בחישוב 1 נק' (במקרה שכתב ביטוי ללא כינוס איברים דומים ובסעיף ג פתח סוגריים – ניקוד מלא)		
---	--	--

ג. מצא מה צריך להיות x , כדי ששטח חזית הבניין תהיה מינימלית. **נמקו**

הערות	ניקוד	פתרון
מצא את הקודקוד 4 נק' הסביר למה מינימלי – 3 נקודות	7 נק'	$f(x) = x^2 + (20 - x)^2$ $f(x) = x^2 + 400 - 40x + x^2$ $f(x) = 2x^2 + 400 - 40x$ $x_{\text{קודקוד}} = \frac{-b}{2a} = \frac{40}{4} = 10$ מקדם ה- x^2 הוא חיובי ולכן לפונקציה ערך מינימלי

ד. חשבו את השטח המינימלי. **200**

הערות	ניקוד	פתרון
טעות חישובית אחת – 1 נק'	2 נק'	$f(10) = 100 + 100 = 200$

פרק 3 : אורינות מתמטית

6. אבנר ויואב מתחרים בנסיעה על אופניים על מסלול מעגלי שאורכו 3 קילומטרים.

מכיוון שהם לא רצו לנסוע זה בצד זה (כי הנוסע במסלול החיצוני נוסע דרך ארוכה יותר), הם החליטו לצאת מאותה נקודה (מסומנת בשרטוט ב-A), לנסוע בכיוונים מנוגדים, ולראות מי יגיע חזרה ראשון לנקודת המוצא.



בסופו של דבר הם נסעו בקצב שווה ואחיד כל הדרך,

ובתום הסיבוב הגיעו ביחד לנקודת המוצא, אחרי 12 דקות.

א. האם אבנר ויואב נפגשו במהלך הנסיעה (מלבד בנקודת המוצא)?

אם כן, אחרי כמה דקות של נסיעה זה קרה? **כן בדקה ה 6**

מדינת ישראל
 משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

הערות	ניקוד	פתרון
כל נימוק נכון מתאים	2 נק'	בדקה ה 6

ב. מהי מהירות הנסיעה של אבנר ויואב במטרים לדקה? **250 מטר לדקה**

הערות	ניקוד	פתרון
כל נימוק נכון מתאים	2 נק'	מטר לדקה $250 = \frac{3000}{12}$

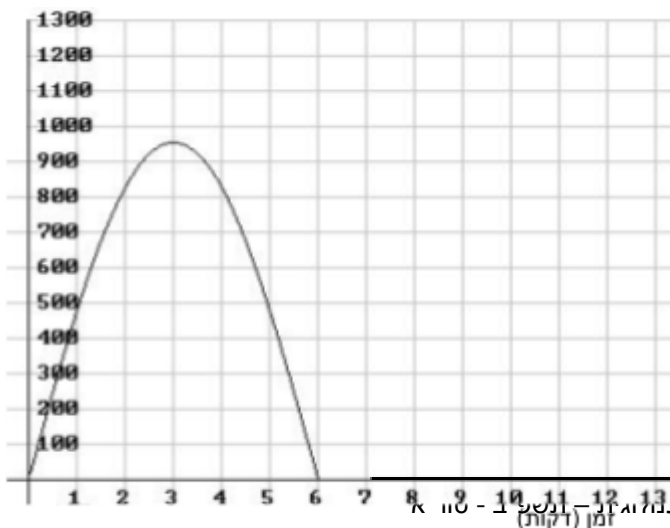
ג. מתי היה המרחק האווירי בין אבנר ויואב הגדול ביותר? איזה מרחק נסע כל אחד מהם עד אז?

הערות	ניקוד	פתרון
נק' אחת לכל תשובה	4 נק'	בדקה ה 3 או ה 9 750 מטר או 2250 מטר

ד. לפניכם חלק מגרף המתאר את המרחק האווירי ביניהם בהתאם לזמן הנסיעה באופניים.

המשיכו את הגרף, עד זמן הפגישה בנקודה A, שעל המעגל, בהתאם לנתונים.

מרחק
אווירי
(מטרים)



השלים נכון את הגרף: 3 נק'

מבחן מפמ"ר במתמטיקה לכיתה ט' – עתודה מדעית טכנולוגית – ונסף 1 - ט"ו א' (ניקוד)

מדינת ישראל
 משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

ה. רשמו נכון, לא נכון, או לא ניתן לדעת. נמקו את תשובותיכם.

- I. המרחק האווירי בין אבנר ויואב גדל כל הזמן. נכון / לא נכון
- II. קוטר המסלול המעגלי הוא בערך 950 מ'. נכון / לא נכון
- III. במשך נסיעתם, המרחק האווירי בין אבנר ויואב היה 500 מ' פעמיים נכון / לא נכון
- . בלבד.

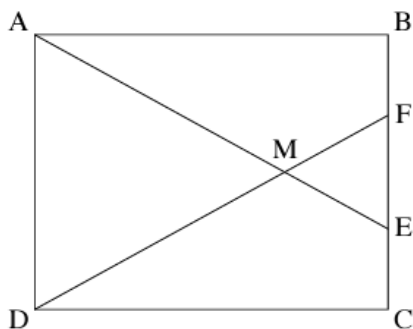
הערות	ניקוד	פתרון
כל נימוק נכון מתאים	6 נק'	2 נקודות לכל סעיף,

ו. לאבנר וליואב מכשיר קשר, והם משוחחים בעזרתו במהלך הנסיעה. הקשר ניתק כאשר המרחק האווירי ביניהם עולה על 500 מ'.
 במשך כמה דקות בערך יכלו אבנר ויואב לשוחח ביניהם במהלך התחרות? נמקו

הערות	ניקוד	פתרון
כל נימוק נכון מתאים	3 נק'	4 דקות

פרק 4: גיאומטריה

ענו על שאלה אחת מבין השאלות 7-8



7. המרובע ABCD הוא מלבן.

הנקודות E ו-F נמצאות על הצלע BC, כמתואר בציור.

הקטעים AE ו-DF נחתכים בנקודה M.

א. הוכח: $\triangle AMD \sim \triangle EMF$.

נתון $AM = DM$.

ב. הוכח כי: $BF = EC$.

נתון $AD = 10$ מ"ס, $FB = 3$ מ"ס.

ונתון גם כי שטח המשולש MFE שווה ל-S.

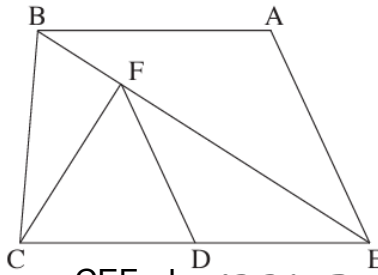
ג. חשבו בעזרת S מהו שטח המשולש ABE. נמקו

מדינת ישראל
 משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

הערות	ניקוד	פתרון
	5 נק'	<p>א. הוכחה: ז. $\sphericalangle FME = \sphericalangle DMA$. זוויות קדקודיות שוות. ז. $\sphericalangle FEM = \sphericalangle DAM$. זוויות מתחלפות בין מקבילים ($AD \parallel BC$) שוות. לפי משפט הדמיון ז.ז. $\triangle AMD \sim \triangle EMF$. מ.ש.ל.</p>
<p>מצא כי שתי הצלעות $AE = DF$ שוות - 2 נק' חפיפת משולשים: 4 נקודות (אפשר גם מציאת שוויון צלעות $BE=CF$ ע"י פיתגורס או כל חפיפה אחרת)</p> <p>שוויון קטעים - 2 נק'</p>	8 נק'	<p>ב. הוכחה: הוכחנו בסעיף א' כי $\triangle AMD \sim \triangle EMF$. ונתון כי $AM = DM$ כלומר $\triangle AMD$ הוא משולש שווה שוקיים, לכן $\triangle EMF$ הוא גם משולש שווה שוקיים. לכן נובע כי $AM + ME = DM + MF$ כלומר $AE = DF$. שני המשולשים ABE ו- DCF חופפים לפי משפט החפיפה שתי צלעות וזווית מול הצלע הגדולה: ז: $AE = DF$ ז: $\sphericalangle B = \sphericalangle C$ זוויות ישרות במלבן ז: $AB = DC$ צלעות מקבילות במלבן שוות. מהחפיפה נובע כי: $BE = CF$ (*) $BE = BF + FE$ $CF = CE + EF$ נציב ב- (*) ונקבל ש- $BF + FE = CE + EF$ $BF = CE$ מ.ש.ל.</p>
<p>מצא יחס שטחים בין $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BFM}} = \frac{4}{3}$ 2 נק' מציאת $S_{\triangle BFM} = \frac{3}{4} S_{\triangle AEF}$ 1 נק'</p>	7 נק'	ג. נחבר בין שני הקודקודים B ו M.

מדינת ישראל
 משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

$\frac{S_{\Delta MBA}}{S_{\Delta BME}} = 2.5$ <p style="text-align: right;">מציאת 2.5 נק' 2 נק'</p> $S_{\Delta MBA} = 4.375S$		<p>3:4 $EF:BF$ לכן יחס השטחים בין המשולשים: $\frac{S_{\Delta MEF}}{S_{\Delta BFM}} = \frac{4}{3}$ מכיוון שלשני המשולשים אותו גובה.</p> <p>לכן: $\frac{S_{\Delta MEF}}{S_{\Delta BFM}} = \frac{4}{3} = \frac{S}{S_{\Delta BFM}}$ ואז: $S_{\Delta BFM} = \frac{3}{4}S$</p> <p>מדמיון המשולשים בסעיף א נובע כי:</p> $\frac{AM}{ME} = \frac{10}{4} = 2.5$ <p>מכאן: $\frac{S_{\Delta MBA}}{S_{\Delta BME}} = 2.5$</p> $\frac{S_{\Delta MBA}}{S_{\Delta BME}} = \frac{S_{\Delta MBA}}{1.75S} = 2.5$ $S_{\Delta MBA} = 4.375S$ $S_{\Delta EBA} = 4.375S + 1.75S = 6.125S$
---	--	---



8. נתון טרפז $(AB \parallel EC)ABCE$. נמצאת על האלכסון

BE ש- $CF \perp BE$. D אמצע הצלע CE.

, $\angle CEB = \angle AEB$ נתון כי

$EA = 12$ מ"ט, $ED = 9$ מ"ט.

א. הוכיחו כי המשולש FDE שווה שוקיים.

ב. הוכיחו כי: $\Delta EAB \sim \Delta EDF$.

ג. נתון ששטח המשולש EAB הוא S. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CEF.

ד. המשך DF חותך את AB בנקודה G.

1. מהו סוג המרובע AGDE שנוצר? נמקו.

2. הביעו באמצעות S את שטח המשולש BFG. נמקו.

תשובה ללא נימוק 2 נק'	4 נק'	<p>א. הוכחה: משולש ΔCFE הינו משולש ישר זווית</p> $\angle CFE = 90^\circ$ <p>כי נתון $CF \perp BE$.</p>
-----------------------	-------	--

מדינת ישראל
 משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

		<p>FD תיכון ליתר CE במשולש $\triangle CFE$, ע"פ המשפט: במשולש ישר זווית, התיכון ליתר שווה למחציתו. לכן $DF = DE$ ולכן $\triangle FDE$ הוא משולש שווה שוקיים. מ.ש.ל.</p>
<p>כתיבת הזוויות ללא נימוק 2 נק'</p>	4 נק'	<p>$\angle DEF = \angle EBA = \beta$:ז זוויות מתחלפות בין מקבילים $(DE \parallel AB)$ שוות. $\angle DEF = \angle AEB = \beta$ נתון נובע ש: $\angle AEB = \angle EBA = \beta$ $\angle DEF = \angle DFE = \beta$:ז מסעיף א כי המשולש שווה שוקיים ולכן $\triangle EAB \sim \triangle EDF$ לפי משפט הדמיון ז.ז.</p>
<p>מציאת יחס הדמיון 1 נק'</p> <p>מציאת יחס שטחים - 1 נק'</p> <p>מציאת השטח 2 נק' (כתיבת תשובה ללא הסבר - 1 נק')</p>	4 נק'	<p>פתרון: נתון $S_{\triangle EAB} = S$ יחס הדמיון של שני המשולשים $\triangle EAB$ ו $\triangle EDF$ הוא $\frac{EA}{ED} = \frac{4}{3}$ ולכן ע"פ המשפט: היחס בין שטחי שני משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון : $\frac{S_{\triangle EDF}}{S_{\triangle EAB}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ ולכן: $S_{\triangle EDF} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot S$ $S_{\triangle CEF} = 2 \cdot S_{\triangle EDF} = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot S = \frac{9}{8} \cdot S$ ע"פ המשפט: התיכון במשולש מחלק את המשולש לשני משולשים שווים שטח</p>
<p>כל הוכחה נכונה מתאימה</p>	4 נק'	<p>$\angle CDF = \angle AEC = 2$ מסעיף 2 - זוויות מתאימות שוות לכן הקטעים מקבילים, וגם נתון כי AG מקביל ל DE) טרפז... אז מרובע שיש בו שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות הוא מקבילית)</p>

מדינת ישראל
 משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

	4 נק'	<p>פתרון: $\Delta BFG \sim \Delta BEA$ לפי משפט הדמיון ז.ז.:</p> <p>ז: $B \not\sim B$ משותפת.</p> <p>ז: $\angle BGF = \angle BAE$ מתאימות בין מקבילים ($DG \parallel EA$) (הוכחנו בסעיף ד.1. כי $AGDE$ מקבילית ולכן $DG \parallel EA$).</p> <p>ע"פ חישוב אורכי קטעים:</p> $BG = BA - GA = 12 - 9 = 3_{cm}$ <p>לכן יחס הדמיון הוא $\frac{BG}{BA} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.</p> <p>וע"פ המשפט: היחס בין שטחי שני משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון.</p> $\frac{S_{\Delta BFG}}{S_{\Delta BEA}} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \text{ ולכן:}$ $\frac{S_{\Delta BFG}}{S} = \frac{1}{16} \text{ ולכן:}$ <p>ומקבלים ששטח משולש ΔBFG: $S_{\Delta BFG} = \frac{S}{16}$.</p>
--	-------	--