

מבחן מפמ"ר מתמטיקה – עתודה מדעית טכנולוגית – כיתה ח' – טור א

ב ה צ ל ח ה !

המבחן מתוכנן ל-120 דקות.
השימוש במחשבון מותר.

שם התלמיד: _____

כיתה: _____

פרק 1 : פונקציה ליניארית, פיבונצ'י ולוגיקה

ענו על שתי שאלות מתוך 4 שאלות

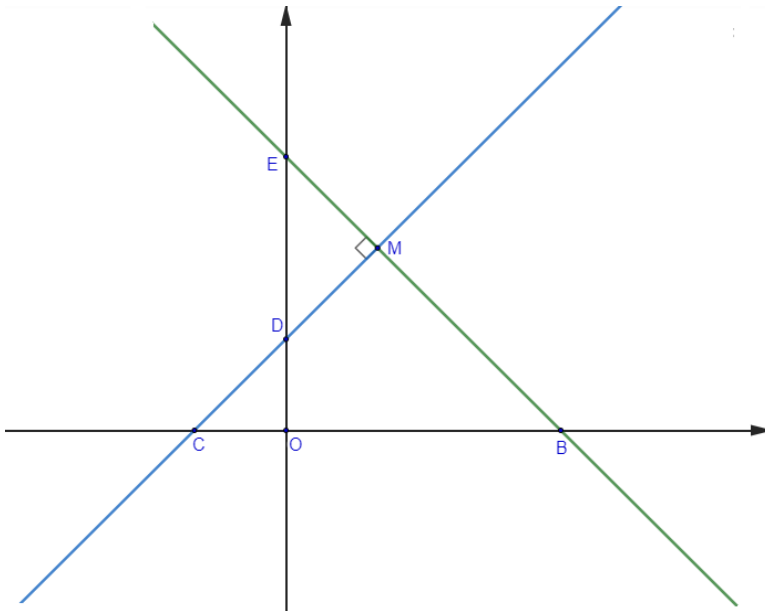
1. לפניהם משורטטים הגרפים של

הפונקציות הליניאריות:

$$f(x) = -x + 6 \text{ ו- } g(x) = x + 2$$

נתון כי שני הישרים מאונכים ונחתכים

בנקודה M .



א. חשבו את שטח המשולש MCB .

הציגו את דרך החישוב. (7 נק')

ניקוד + הערות		פתרון
נק' 1	נקודות החיתוך עם ציר x	$C(-2, 0), B(6, 0)$ נקודת החיתוך:
נק' 3	נקודת חיתוך בין שני ישרים	$-x + 6 = x + 2$ $x = 2$ $y = 2 + 2 = 4$
נק' 2	חישוב אורך הקטע והגובה	ואז נקודת החיתוך $M(2, 4)$ $BC = 8$
נק' 1	חישוב השטח	שטח המשולש: $S_{\Delta MBC} = 16$ יחידת שטח $\frac{BC \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$

ב.חשבו את שטח המרובע $MDOB$. הציגו את דרך החישוב. (6 נק')

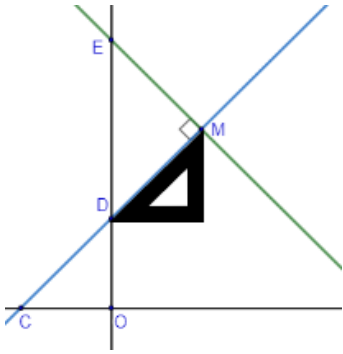
ניקוד + הערות		פתרון
6 נק'	פתרון מלא	$S_{\Delta COD} = \frac{CO \cdot DO}{2} = 2$ <p>יחידות שטח = 2</p> $S_{\Delta MBC} - S_{\Delta COD} = 16 - 2 = 14$ <p>יחידות שטח = 14</p>
5 נק'	טעות חישובית אחת והמשך נכון	
3 נק'	דרך נכונה ושתי טעויות חישוביות	

ג. מצאו בשרטוט משולשים דומים. רשמו מי זוגות המשולשים הדומים ונמקו מדוע הם

דומים. (7 נק')

ניקוד + הערות		פתרון
משולשים ישרי זווית ושוי שוקיים.		$\Delta OEB \sim \Delta OCD \sim \Delta MED \sim \Delta MCB$
7 נק'.	כתיבת המשולשים הדומים עם נימוק מלא לזוויות השוות.	
7 נק'.	כתיבת 2 זוגות של משולשים דומים עם נימוק נכון.	
4 נק'.	כתיבת זוג אחד של משולשים דומים עם נימוק מלא.	
3 נק'.	כתיבת המשולשים הדומים בלי נימוק.	

ד. חשבו את אורך הקטע MD . הציגו את דרך החישוב. (5 נק')

ניקוד + הערות		פתרון						
<table border="1"> <tr> <td>5 נק'</td> <td>פתרון מלא</td> </tr> <tr> <td>4 נק'</td> <td>טעות חישובית אחת</td> </tr> <tr> <td>2 נק'</td> <td>2 טעויות חישוביות</td> </tr> </table>		5 נק'	פתרון מלא	4 נק'	טעות חישובית אחת	2 נק'	2 טעויות חישוביות	<p>אפשרות 1:</p> $(DM)^2 + (EM)^2 = 4^2$ $DM = EM$ $2(DM)^2 = 16$ $DM = \sqrt{8}$  $(2)^2 + (4 - 2)^2 = MD^2$ $MD = \sqrt{8}$
5 נק'	פתרון מלא							
4 נק'	טעות חישובית אחת							
2 נק'	2 טעויות חישוביות							

2. הישר AB הינו הגרף המייצג את הפונקציה $f(x)$.

הנקודה A נמצאת על ציר ה- y .

הנקודה B נמצאת על ציר ה- x .

ידוע כי אורך הקטע AO גדול פי 2 מאורך הקטע BO .

(O ראשית הצירים).

א. חישובו את שיפוע הישר העובר דרך A ו- B .

נמקו את תשובתכם. (3 נק')

ניקוד + הערות		פתרון				
<table border="1"> <tr> <td>3 נק'</td> <td>כל הסבר מתאים נכון</td> </tr> <tr> <td>1 נק'</td> <td>טעות אחת בחישוב</td> </tr> </table>		3 נק'	כל הסבר מתאים נכון	1 נק'	טעות אחת בחישוב	$m = \frac{ AO }{- OB } = -2$
3 נק'	כל הסבר מתאים נכון					
1 נק'	טעות אחת בחישוב					

ב. נתון כי שטח המשולש ΔAOB הוא 36 יחידות שטח.

(1) מצאו את שיעורי הנקודות A, B . (5 נק')

ניקוד + הערות		פתרון
5 נק' לפי הפירוט הבא:		<p>שיפוע : $S_{\Delta AOB} = \frac{ AO \cdot OB }{2} = 36$</p> <p>נציב $OB = x$ לפי הנתון $OA = 2x$</p> $2x \cdot x = 72$ $x = 6$ <p>זה אומר שאורך $OB = 6$ ולכן שיעורי הנקודה B הם $(6, 0)$ ובהתאם שיעורי הנקודה A הם $(0, 12)$</p>
3 נק'	מציאת אורך הקטע OB	
1 נק'	מציאת שיעורי כל נקודה	

(2) ידוע כי הנקודה M נמצאת על אחת מצלעות המשולש AOB , והיא יוצרת משולש AOM ששטחו שווה למחצית שטח המשולש ABO . סמנו בשרטוט נקודה M המקיימת את התנאים המתוארים וכתבו את שיעוריה. נמקו. (4 נק')

ניקוד + הערות		פתרון
4 נק' לפי הפירוט הבא:		<p>נקודה M יכולה להיות באמצע כל אחד משלושת הצלעות.</p> <p>$M(3, 6), M(0, 6), M(3, 0)$</p> <p>כל תיכון במשולש מחלק אותו לשני משולשים שווה שטח.</p>
2 נק'	מציאת שיעורי הנקודה	
2 נק'	הסבר מתאים	

(3) ידוע כי נקודה C נמצאת על החלק השלילי של ציר ה- y כך שמתקבל משולש ABC שהוא שווה שוקיים, בו הנקודה B היא קודקוד זווית הראש של המשולש. מצאו את שיעורי הנקודה C . (4 נק')

ניקוד + הערות		פתרון
4 נק' לפי הפירוט הבא:		<p>מכיוון שהמשולש שווה שוקיים והקודקוד הוא B אזי BO הוא גובה ותיכון לבסיס. לכן $AO=CO$</p> <p>מכאן $C(0, -12)$</p>
2 נק'	מציאת שיעורי הנקודה	
2 נק'	הסבר מתאים	

(4) כתבו את משוואת הישר BC . (3 נק')

ניקוד + הערות		פתרון
3 נק' לפי הפירוט הבא:		$B(6, 0), C(0, -12)$ ואז השיפוע $m = \frac{0 - (-12)}{6 - 0} = 2$ מכאן משוואת הישר BC היא : $y = 2x - 12$
2 נק'	מציאת שיפוע ע"י חישוב או הסבר מתאים.	
1 נק'	כתיבת משוואת הישר	

(5) עבור כל טענה קבעו האם היא נכונה או שאינה נכונה. (6 נק')

נימוק	לא נכונה	נכונה	טענה
לפי צ.ז.צ. ...		נכון	$\Delta ABO \cong \Delta CBO$
לפי השרטוט הפונקציה חיובית כאשר $x < 6$		נכון	עבור $x < 6$ הישר AB נמצא מעל ציר x
נכון כי השיפוע הוא -2		נכון	$f(a + 1) - f(a) = -2$

3. הם שני איברים עוקבים מתוך סדרת בעלת אותה חוקיות כמו בסדרת פיבונאצ'י.

א. כתבו שני ביטויים אלגבריים למספרים הבאים בסדרה באמצעות m ו- n
 _____, _____, m, n , _____ (8 נק')

ניקוד + הערות		פתרון
8 נק' לפי הפירוט הבא:		$m, n, m + n, m + 2n$
8 נק'	פתרון מלא	
4 נק'	טעות באחד האיברים	

ב. כתבו באמצעות m ו- n ביטוי אלגברי למספר הקודם לסדרה: _____, m, n , _____ (8 נק')

ניקוד + הערות		פתרון
8 נק' לפי הפירוט הבא:		$n - m, m, n$
8 נק'	פתרון מלא	

ג. התקבלה סדרה של חמישה איברים שהחוקיות שלהם זהה לזו של סדרת פיבונאצ'י.
 סכום שלושת האיברים הראשונים בסדרה קטן ב-4 מהאיבר החמישי.
 מהו האיבר השני בסדרה? (9 נק')

ניקוד + הערות		פתרון
9 נק' לפי הפירוט הבא:		חמשת האיברים הראשונים הם: $n - m, m, n, m + n, m + 2n$
6 נק'	בניית משוואה נכונה	$(n - m + m + n) + 4 = m + 2n$
3 נק'	פתרון נכון של המשוואה ומציאת האיבר השני	$m = 4$
3 נק'	כתיבת המשוואה:	
	$(n - m + m + n) - 4 = m +$	

4. רותם ורוני הם שני חברים. רותם אמר לרוני: "בכל פעם שאני נפגש עם בן דודי אנחנו משחקים שחמט, ובכל פעם שאנחנו משחקים שחמט בן דודי מנצח אותי. בערב החג בן דודי לא ניצח אותי בשחמט".
 רוני השיב לרותם: "אם כך לא פגשת בערב החג את בן דודך".

בתרגיל זה נרשום את הכללים שבהם השתמש רוני כדי להגיע למסקנה שרותם לא פגש את בן דודו בערב החג.

א. רשמו במילים את הפסוקים שרותם מתאר בסיפורו: (9 נק') (3 נק' לכל תיאור)

_____ = A אני (רותם) נפגש עם בן דודי _____
 _____ = B אני (רותם) ובן דודו משחקים שחמט _____
 _____ = C בן דודי מנצח אותי בשחמט _____

ב. רשמו בשפת תחשיב הפסוקים את הפסוקים שרותם מצהיר שהם נכונים. (9 נק')

פתרון	הערות
$A \rightarrow B, B \rightarrow C, \neg C$	3 נק' לכל תיאור

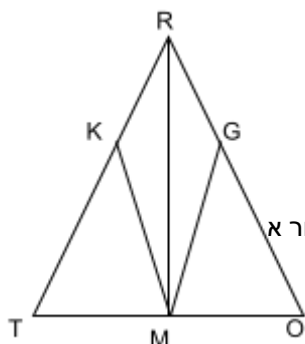
ג. רשמו את כל כללי ההיסק שרוני השתמש בהם כדי להגיע למסקנה שרותם לא פגש את בן דודו בערב החג, ומה הוא הסיק מכל כלל היסק. (7 נק')

פתרון	הערות
<p>מהפסוקים $\neg C, B \rightarrow C$ ומכלל ההיסק השלילי הסיק רוני כי הפסוק $\neg B$ נכון: אני ובן דודי לא שיחקנו שחמט כשנפגשנו.</p> <p>מהפסוקים $\neg B, A \rightarrow B$ ומכלל ההיסק השלילי הסיק רוני כי הפסוק $\neg A$ נכון: בערב החג לא ביקרתי את בן דודי.</p>	לכל הסק 4 נק'

גיאומטריה:

פתרו שאלה אחת מתוך שתי השאלות

5. נתון משולש שווה שוקיים ROT ($RO = RT$).



מבחן מפמ"ר במתמטיקה לכיתה ח' - עתודה מדעית טכנולוגית - תשפ"ג - טור א

RM חוצה זווית TRO .
 הנקודות G ו- K נמצאות על השוקיים RO ו- RT בהתאמה

כך שמתקיים $GO = KT$.

א. הוכיחו כי $\Delta RKM \cong \Delta RGM$ (8 נק')

ניקוד + הערות		פתרון
8 נק'	פתרון מלא כולל משפט החפיפה	$RO = RT$ נתון $RT = RK + KT$ $RO = RG + GO$ $KT = GO$ נתון ולכן $RK = RG$ חיסור קטעים שווים $RM = RM$ צלע משותפת $\sphericalangle KRM = \sphericalangle GRM$ נתון כי RM חוצה זווית $\Delta RKM \cong \Delta RGM$ לפי צ,ז,צ
6 נק'	טענה אחת לא נכונה	
0 נק'	שתי טענות לא נכונות	
5 נק'	משפט החפיפה חסר/לא נכון	

ב. עבור כל טענה קבעו האם היא נכונה או שאינה נכונה. נמקו. (9 נק')

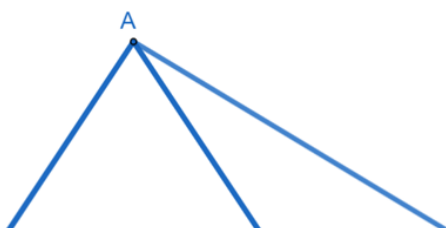
נימוק	נכונה/לא נכונה	טענה
כתוצאה מהחפיפה	נכונה	$MG = MK$
אין נתונים שמראים את זה	לא נכונה	המשולש MGO שווה שוקיים
במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש הוא גם תיכון.	נכונה	$MO = MT$

ג. הנקודה G מחלקת את הצלע RO כך שמתקיים $GO = 2RG$.

נתון כי שטח המשולש RMG שווה ל S . הביעו באמצעות S את שטח המשולש ROT . נמקו. (8 נק')

פתרון	ניקוד + הערות
$GO = 2RG$ לשני המשולשים ΔMGO ו- ΔMGR אותו אנך לצלעות (או המשכן) GO, RG לכן יחס השטחים הוא כיחס הצלעות GO, RG מכאן: $S_{\Delta MGO} = 2S$ RM תיכון לבסיס לכן מחלק את ΔRTO לשני משולשים שווה שטח.	פתרון מלא עם נימוק 8 נק' מציאת יחס השטחים 3 נק'
$S_{\Delta MGR} = S_{\Delta MKR}$ מכיוון שהם חופפים. ולכן	3 נק'
$S_{\Delta MGO} = 2S = S_{\Delta TKM}$ $S_{\Delta RTO} = 6S$	2 נק'

6. המשולש ABC שווה שוקיים ($AB = AC$).



מבחן מפמ"ר במתמטיקה לכיתה ח' – עתודה מדעית

AD חותך את המשך BC בנקודה D .

EF חותך את המשך AC בנקודה E .

נתון כי $\angle D = \angle E$.

א. הסבירו מדוע $\angle DBA = \angle ECF$ (8 נק')

ניקוד + הערות	פתרון				
<table border="1"><tr><td>תשובה עם הנימוק</td><td>8 נק'</td></tr><tr><td>תשובה ללא נימוק</td><td>4 נק'</td></tr></table>	תשובה עם הנימוק	8 נק'	תשובה ללא נימוק	4 נק'	נתון: $\triangle ABC$ שווה שוקיים $\angle ACB = \angle ABC$ זוויות בסיס במשולש שווה שוקיים נובע כי: $\angle DBA = \angle ECF$ זוויות צמודות לזוויות שוות, שוות.
תשובה עם הנימוק	8 נק'				
תשובה ללא נימוק	4 נק'				

ב. הסבירו מדוע $\triangle DBA \sim \triangle ECF$ (8 נק')

ניקוד + הערות	פתרון				
<table border="1"><tr><td>תשובה עם הנימוק</td><td>8 נק'</td></tr><tr><td>תשובה ללא נימוק</td><td>4 נק'</td></tr></table>	תשובה עם הנימוק	8 נק'	תשובה ללא נימוק	4 נק'	ז. הוכחנו בסעיף א' כי $\angle DBA = \angle ECF$ ז. נתון: $\angle D = \angle E$ לפי משפט הדמיון ז.ז. $\triangle DBA \sim \triangle ECF$
תשובה עם הנימוק	8 נק'				
תשובה ללא נימוק	4 נק'				

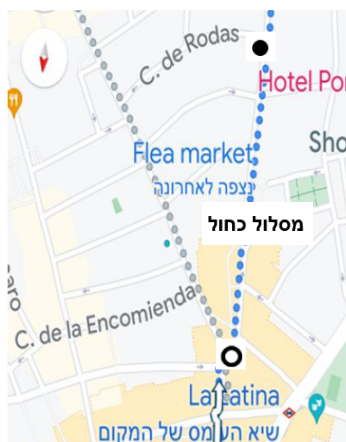
נתון: $AD = 12$ ס"מ, $AC = 8$ ס"מ.

ג. חשבו את היחס $EF:CF$. (8 נק')

ניקוד + הערות		פתרון
8 נקודות לפי הפירוט הבא:		הוכחנו בסעיף ב' כי: $\triangle DBA \sim \triangle ECF$ ונתון כי: $\triangle ABC$ שוו"ש לכן: 8 ס"מ $AB =$ $AD = 12$ ס"מ
2 נק'	מציאת שתי צלעות שוות $AC = AB$	יחס הדמיון: $\frac{EF}{DA} = \frac{CF}{BA}$
4 נק'	כתיבת יחס דמיון	$\frac{CF}{12} = \frac{EF}{8}$
2 נק'	חישוב היחס $EF:CF$	$\frac{EF}{CF} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ $EF:CF = 3:2$

אוריינות מתמטית

7. האחים יעל ונדב נסעו לטייל במדריד שבספרד. בבוקרו של אחד הימים הם התפצלו וקבעו להיפגש בשעה 12:00 בצהריים, בצומת הרחובות המסומן בנקודה שחורה. יעל חיכתה בנקודה זו, בעוד שנדב התקדם לעברה בריצה קלה ובקצב קבוע של 2 מטרים לשנייה. הצילום שמשמאל הוא מתוך אפליקציית Google Maps שבה השתמש נדב כדי להגיע ליעל. בשלב זה נדב נמצא בנקודה המסומנת בעיגול לבן, וכוונתו היא לרוץ עד יעל, על המסלול הכחול, שהוא קטע ישר באורך של 450 מטר.

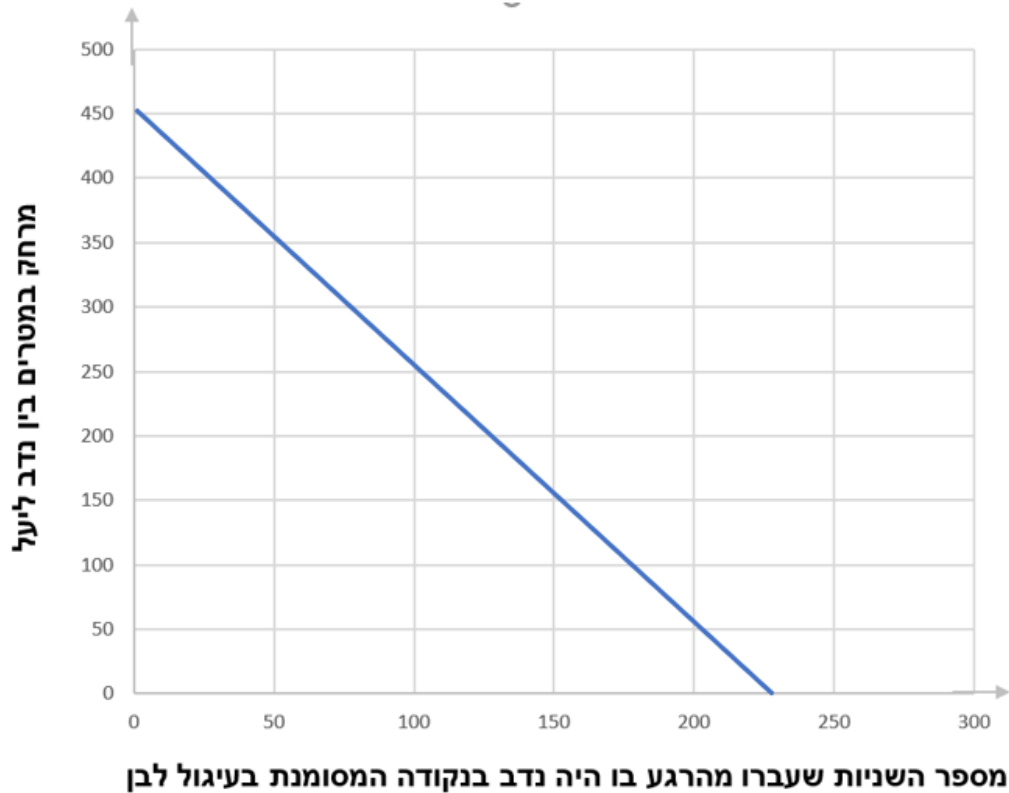


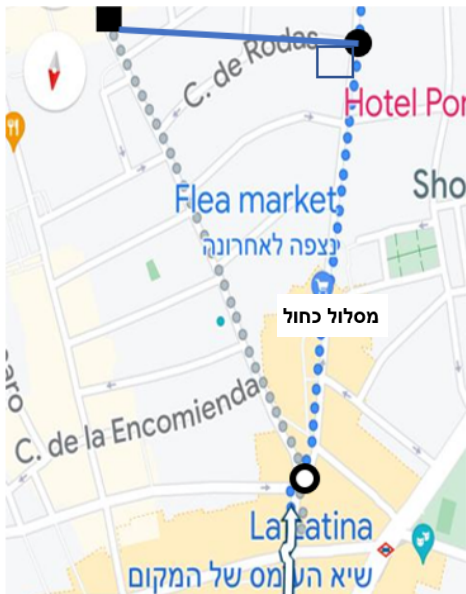
א. ענו על הסעיפים הבאים בהנחה שנדב ירוץ במסלול הכחול:

- (1) כמה מטרים ירוץ נדב אחרי 20 שניות? (3 נק')
- (2) מהו המרחק של נדב מיעל אחרי 100 שניות? (3 נק')
- (3) מהו המרחק של נדב מיעל אחרי 150 שניות? (3 נק')

פתרון	ניקוד + הערות
(1) $100 = 50 \cdot 2$ מטר	3 נק'
(2) $250 = 450 - (100 \cdot 2)$ מטר	3 נק'
(3) $150 = 450 - (150 \cdot 2)$ מטר	3 נק'

- (4) שרטטו גרף המתאר את המרחק של נדב מיעל (במטרים), כפונקציה של הזמן שעבר (בשניות) מהרגע שבו נדב התחיל לנוע מהנקודה הלבנה. (8 נק')





מסתבר שכשנבד הגיע לנקודה הלבנה הוא לא היה מרוכז, ובמקום לרוץ על המסלול הכחול הוא רץ על המסלול האפור. נדב היה כל כך בטוח שהוא על המסלול הכחול ושהוא תיכף יפגוש את אחותו, שהוא לא הביט באפליקציה עד שהגיע לנקודה המסומנת בריבוע שחור, ואשר מרוחקת מרחק של 550 מטר מהנקודה הלבנה.

ב. מהו המרחק של נדב, במטרים, מיעל ברגע שבו הוא שם לב לטעות? עגלו למספר שלם. (8 נק')

ניקוד + הערות		פתרון
8 נק'	פתרון מלא.	$x^2 + 450^2 = 550^2$ $x = \sqrt{550^2 - 450^2}$ $x=316.22 \text{ מטר}$
7 נק'	טעות חישובית אחת.	
4 נק'	תשובה סופית או כתיבת המשוואה נכונה בלבד (ללא ביצוע חישובים)	