

וקטורים ברמה של 4 יח"ל

על פי תכנית הלימודים

החדשה

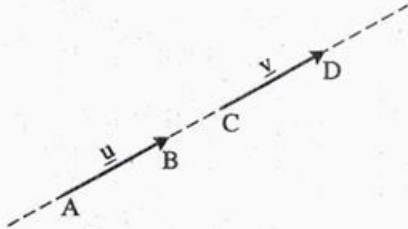
החוברת מבוססת על הספר ווקטורים מאת שמשון עמיצור
ואורי רימון בהוצאת משרד החינוך והמרכז להוראת המדעים
של האוניברסיטה העברית.

אוגוסט, 2020

1 המרחב הוקטורי הגיאומטרי

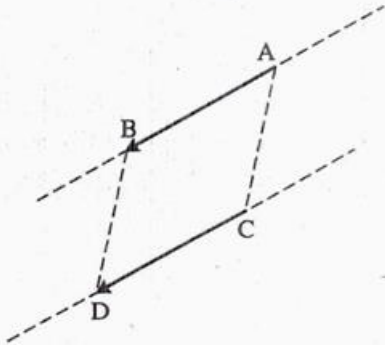
זהים, אלא גם אם אפשר להגיע מאחד לשני על-ידי הזזה, כלומר על-ידי תנועה השומרת על אורך הוקטור ועל כיוונו. תנועה זו יכולה להיות על ישר המכיל את הוקטור $\underline{u}$ (ציור עליון), או תנועה המשאירה את $\underline{u}$ מקביל לעצמו (ציור תחתון). ביתר פירוט:

מקרה ראשון: הזזה על אותו ישר.



שני הוקטורים הם על ישר אחד, ואפשר להזיז את האחד עד שיכסה את השני; במלים אחרות, נשמרים אז האורך והכיוון.

מקרה שני: הזזה לישר מקביל.



הוקטורים אינם על ישר אחד. הוקטור $\vec{AB}$ מוזז ל $\vec{CD}$, והקצוות A, B, D, C (בסדר זה!) יוצרים מקבילית, כלומר $AC \parallel BD$ וגם $AB \parallel CD$.

בשני המקרים אומרים על שני הוקטורים

$$\underline{u} = \vec{AB}, \underline{v} = \vec{CD}$$

$$\underline{u} = \underline{v}$$

כי הם שווים וכותבים

הערות

1. שים לב, כי אם $\vec{AB} = \vec{CD}$, יתכן $\vec{AB} \neq \vec{DC}$ (מדוע?).

2. וקטורים השונים מוקטור אפס, נקראים קוליניאריים אם הם בעלי כיוונים זהים או כיוונים מנוגדים. כלומר, הם נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים.

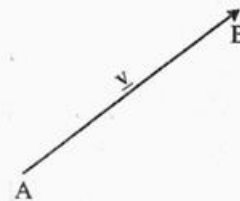
1.1 הוקטור הגיאומטרי

מבחינה היסטורית מושג הוקטור הונהג לראשונה בתחום הפיסיקה. שם מקובל לראות בכוחות או במהירויות וקטורים ולסמנם על-ידי חיצים. במקרה של וקטור כוח, אורך החץ מעיד על גודל הכוח, ואילו כיוון החץ מעיד על כיוון הפעלת הכוח. אך וקטורים מופיעים גם בתחומים רבים אחרים, כגון בגיאומטריה, בכלכלה ועוד.

בספר זה נטפל בעיקר בוקטורים כפי שהם מופיעים בגיאומטריה, אולם נביא גם מספר יישומים אחרים וחכללות.

הגדרה: וקטור גיאומטרי (או בקיצור וקטור) הוא קטע מכוון. הנקודה אשר ממנה מתחיל הקטע תיקרא **המוצא**, והקצה השני ייקרא **הסוף** של הוקטור. את הוקטור הגיאומטרי שמוצאו בנקודה A וסופו בנקודה B נהוג לשרטט כחץ שחודו בנקודת הסוף, ולסמנו $\vec{AB}$ (להבדיל מהסימון המקובל AB של הקטע). וקטורים גיאומטרים נציין גם על-ידי אותיות רומיות בתוספת קו מתחתן:

$$\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \dots$$

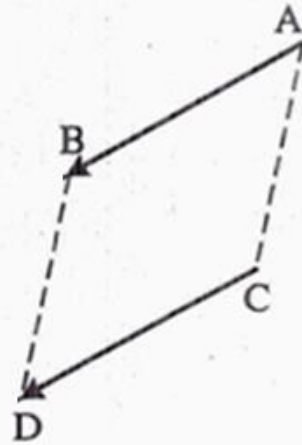


בפרק זה נטפל בוקטורים הגיאומטרים במרחב התלת-ממדי, ולא נצטמצם למישור. חוקטורים יכולים להיות בכל כיוון במרחב. וקטור גיאומטרי יכול להיות חץ הרשום במחברת, או חץ המחבר נקודה ברצפת החדר לנקודה על התקרה או על הקיר. וקטור יכול להיות גם חץ המחבר את מרכז כדור הארץ לקוטב הצפוני או לכל נקודה בחלל.

השלב הראשון בחשבון הוקטורים הגיאומטרים הוא להתייחס לשני וקטורים $\underline{u}, \underline{v}$ כאל שווים לא רק כאשר הם ממש

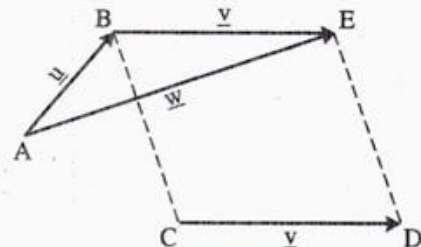
3. ווקטורים נקראים שווים אם הם בעלי כיוון זהה ובעלי אורך שווה.

לדוגמה, אם נתונה מקבילית $ABDC$, אז הווקטורים $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ הם ווקטורים שווים. תנו דוגמה לווקטורים שווים נוספים בציור.



1.2 חיבור וקטורים

לכל שני וקטורים $\vec{u} = \vec{AB}$ ו $\vec{v} = \vec{CD}$ נניח וקטור שלישי כלחץ: נעתיק את הוקטור $\vec{CD}$ לנקודה B, כלומר לסוף הוקטור $\vec{u}$, ונקבל וקטור $\vec{BE} = \vec{CD}$.



לשני הוקטורים $\vec{u}$ ו $\vec{v}$ נניח את הוקטור $\vec{w} = \vec{AE}$ שמוצאו במוצא $\vec{u}$ וסופו בסוף של $\vec{v}$.

הגדרה: הוקטור $\vec{w} = \vec{AE}$ נקרא **סכום** הוקטורים $\vec{u}$ ו $\vec{v}$ ומסמנים $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

בפרט, לכל שלוש נקודות במרחב A,B,C מתקיים

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

כי מוצא $\vec{BC}$ הוא סוף $\vec{AB}$, ואין צורך להעתיק.

מעתה חסימן "+" (פלוס) ישמש אותנו לשתי מטרות שונות: לחיבור מספרים ולחיבור וקטורים.

שים לב כי בציור לעיל סכום הוקטורים $\vec{AB}$ ו $\vec{BE}$ שווה לוקטור $\vec{AE}$ לעומת זאת סכום אורכי הקטעים AB ו BE (סכום מספרים) אינו שווה לאורך הקטע AE. נתבונן בדוגמה של חיבור וקטורים.

יהיו הוקטורים $\vec{AB}$ ו $\vec{BA}$, כלומר וקטור וחוקטור המתקבל ממנו על-ידי החלפה של נקודות המוצא והסוף זו בזו. שניהם מונחים על אותו ישר, ולפי ההגדרה דלעיל של החיבור

$$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}$$

בתוצאה, נקודת המוצא מתלכדת עם נקודת הסוף. כדי לשמור על הגדרת החיבור כפי שהיא ניתנה, הכרחי לראות גם ב $\vec{AA}$ וקטור.

אומרים כי $\vec{AA}$ הוא **וקטור האפס** ומסמנים $\vec{AA} = \vec{0}$ זהו וקטור שאורכו אפס, ולכן "אין לו כיוון". כיוון שאנו מתייחסים לשני וקטורים $\vec{u}$, $\vec{v}$ כאל שווים אם אפשר לחגוע מאחד לשני על-ידי חזות, לכן נראה את $\vec{AA}$ כשווה ל $\vec{BB}$ לכל נקודה B. נכתוב $\vec{AA} = \vec{BB} = \vec{0}$

יהיו עתה $\vec{u} = \vec{MN}$ ו $\vec{0} = \vec{PP}$

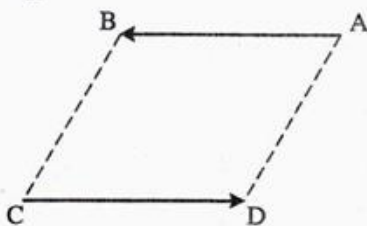
$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{MN} + \vec{PP} = \vec{MN} + \vec{NN} = \vec{MN} = \vec{u} \quad \text{אזי}$$

באותו אופן מראים כי $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

$$\vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u}$$

תרגיל: תהי ABCD מקבילית כבציור.

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{0} \quad \text{וודא, כי}$$



עתה רואים, כי גם לארבע נקודות במרחב A, B, C, D

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD} \quad \text{מתקיים:}$$

והתוצאה אינה תלויה בסדר בו אנו מבצעים את פעולת החיבור באגף שמאל.

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \dots + \vec{LM} + \vec{MN} = \vec{AN} \quad \text{באופן כללי}$$

3. מ. קיום איבר האפס:

הוקטור $\vec{AA} = \vec{0}$ הוא וקטור האפס, וראינו כי לכל

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v} \quad \text{מתקיים}$$

$\vec{0}$ נקרא גם האיבר הניטרלי ביחס לחיבור.

4. מ. קיום איבר נגדי:

כנגד כל וקטור $\vec{u} = \vec{AB}$ קיים הוקטור $\vec{BA}$ שמקיים

$$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$$

$$\vec{BA} + \vec{AB} = \vec{BB} = \vec{0} \quad \text{וכמו כן}$$

קוראים ל $\vec{BA}$ האיבר הנגדי (או הוקטור הנגדי) ל $\vec{AB}$

$$\vec{BA} = -\vec{u} \quad \text{או} \quad \vec{BA} = -\vec{AB} \quad \text{ומסמנים}$$

כידוע, וקטור אפשר לחתותיק לכל נקודה, ולכן גם את הוקטור $\vec{BA} = -\vec{u}$ נוכל לחתותיק לכל מקום.

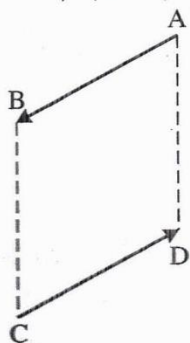
לחלן שתי דוגמאות:

א. נעתיק את $-\vec{u}$ לנקודה A (ראה ציור). במקרה

זה $-\vec{u}$ הוא באורך של $\vec{AB}$ על אותו ישר, אך בכיוון הנגדי.



ב. בציור $\vec{CD} = -\vec{AB}$ במקרה זה $-\vec{u}$ מתקבל כצלע נגדית במקבילית, אך בכיוון הפוך.



למרות העובדה שחיבור מספרים וחיבור וקטורים הם שתי פעולות חשבון שונות, כללי החיבור במספרים דומים לכללי החיבור בוקטורים. נפרט כללים אלו:

1. מ. סגירות ביחס לפעולת החיבור:

לכל שני וקטורים $\vec{u}$ ו $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$ אף הוא וקטור.

2. מ. חוק הקיבוץ (החוק האסוציאטיבי) של החיבור: לכל

שלושה וקטורים $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ במרחב מתקיים

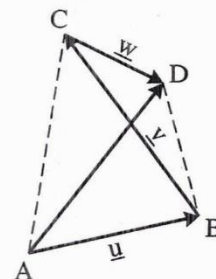
$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

ואומנם נבחר $\vec{u} = \vec{AB}$ ונעתיק את הוקטור $\vec{v}$

כך ש $\vec{v} = \vec{BC}$ ואת הוקטור $\vec{w}$ באופן שיתקיים

$$\vec{w} = \vec{CD}$$

במלים אחרות, נחבר את הוקטורים כך שמוצאו של כל וקטור יהיה בסופו של הוקטור הקודם לו.



$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC} \quad \text{לפי ההגדרה}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$$

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{BD} \quad \text{מאותה סיבה}$$

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD}) = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$$

נסב את תשומת לב הקורא כי שלושת הוקטורים אינם חייבים להיות במישור אחד, וחלקם או כולם יכולים להיות וקטורי אפס.

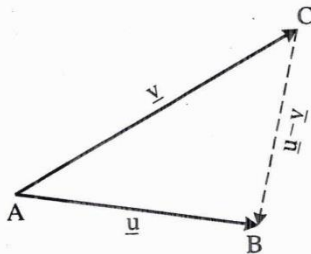
ראינו, כי אם נתונות במרחב שלוש נקודות A, B, C

$$\vec{u} = \vec{AB} \quad \vec{v} = \vec{BC} \quad \text{כך ש}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \quad \text{או}$$

דלהלן נשתמש בחוק הקומטטיבי ונקבל:

$$\begin{aligned}\vec{u} - \vec{v} &= \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{AB} + (-\vec{AC}) = \\ &= \vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}\end{aligned}$$



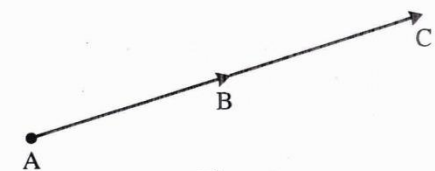
במלים אחרות, ההפרש $\vec{u} - \vec{v}$ הוא וקטור שמוצאו בסוף הוקטור השני וסופו בסוף הוקטור הראשון. שלושת הוקטורים $\vec{u}$, $\vec{v}$ ו- $\vec{u} - \vec{v}$ יוצרים משולש.

1.3 כפל וקטור בסקלר

נחוג לסמן $2\vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$, $3\vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$ וכו'. לוקטורים חללו יש פירוש גיאומטרי. אם $\vec{u} = \vec{AB}$ ו- $2\vec{u} = \vec{AC}$, הרי $2\vec{u}$ הוא וקטור על אותו ישר ובכיוון של $\vec{AB}$, אבל אורכו כפליים האורך של $\vec{AB}$.

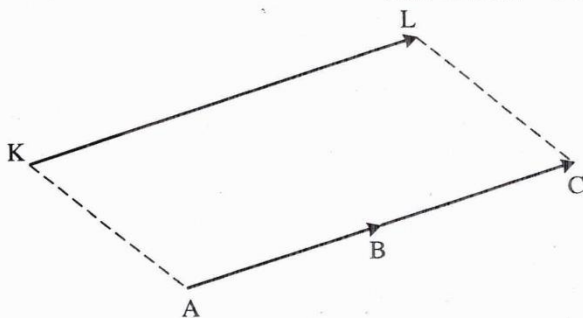
$$\frac{AC}{AB} = 2$$

כלומר, יחס הקטעים הוא:



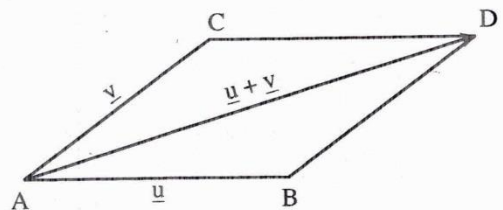
מובן, כי אפשר להעתיק את $\vec{AC}$ לכל ישר מקביל.

בציור $\vec{KL} = 2\vec{AB}$.



מ5. חוק החילוף (החוק הקומוטטיבי) של החיבור:

לכל שני וקטורים $\vec{u}$ ו- $\vec{v}$ מתקיים: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$. ואומנם יהיו $\vec{u} = \vec{AB}$ ו- $\vec{v} = \vec{AC}$ שני וקטורים שונים מאפס שלהם אותו מוצא ושאינם על ישר אחד. הסכום $\vec{u} + \vec{v}$ הוא הוקטור $\vec{AD}$ המתקבל על-ידי העתקת $\vec{AC}$ לנקודה B. רואים מייד, כי ABDC היא מקבילית. הוקטור $\vec{CD}$ מתקבל על-ידי העתקת $\vec{AB}$ לנקודה C.



לכן, לפי הגדרת הסכום יהיה גם

$$\vec{v} + \vec{u} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$$

במלים אחרות, הראינו כי לכל שני וקטורים כאלה $\vec{u}$, $\vec{v}$, מתקיים החוק הקומוטטיבי $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$. העובדה שסכום שני וקטורים היוצאים מנקודה אחת ושאינם על ישר אחד הוא אלכסון במקבילית הנוצרת על-ידי שני הוקטורים, ידועה בשם כלל המקבילית.

הערות

- הדרישה של מוצא משותף לשני הוקטורים בהוכחת חוק החילוף אינה הכרחית, כי כל שני וקטורים אפשר להעתיק למוצא משותף.
- אפשר להוכיח את חוק החילוף גם כאשר שני הוקטורים על ישר אחד (או על ישרים מקבילים). וזה משלים את הוכחת הכללים מ1-5.

חיסור וקטורים

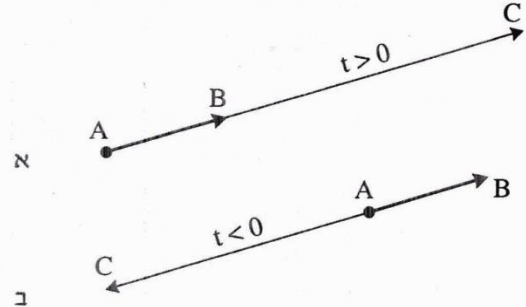
כמו במספרים, כן גם לכל שני וקטורים גיאומטריים $\vec{u}$ ו- $\vec{v}$ מוגדרת פעולת החיסור על-ידי $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. זוהי הפעולה ההפוכה לחיבור.

כפי שייחסנו משמעות גיאומטרית לסכום, נראה עתה משמעות גיאומטרית גם להפרש של שני וקטורים שלהם מוצא משותף.

יהיו $\vec{u} = \vec{AB}$ ו- $\vec{v} = \vec{AC}$ שני וקטורים כאלה. בשוויון

בדרך דומה אם $\vec{AD} = 3\vec{AB}$ יהיה $\vec{AD}$ על הישר AB , בכיוון של $\vec{AB}$, ואורכו יהיה 3 פעמים האורך של $\vec{AB}$. זה מביא להגדרת הכללית של כפל וקטור גיאומטרי במספר.

הגדרה: לכל מספר ממשי t ולכל וקטור $\vec{AB}$ השונה מאפס, הוקטור $\vec{AC} = t \cdot \vec{AB}$ מוגדר כך:



א. אם $t > 0$ יהיה הוקטור $\vec{AC} = t \cdot \vec{AB}$ על הישר AB בכיוון הוקטור $\vec{AB}$, ואורכו t פעמים אורך $\vec{AB}$, כלומר $\frac{AC}{AB} = t$.

ב. אם $t < 0$ יהיה הוקטור $\vec{AC} = t \cdot \vec{AB}$ על הישר AB בכיוון הפוך לוקטור $\vec{AB}$ ואורכו $|t|$ פעמים האורך של $\vec{AB}$, כלומר $\frac{AC}{AB} = |t|$.

ג. אם $t = 0$ מגדירים $t \cdot \vec{AB} = \vec{0}$. כמו כן נגדיר $t \cdot \vec{0} = \vec{0}$ לכל t ממשי.

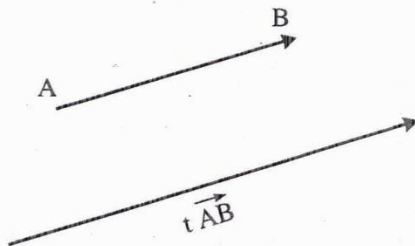
שים לב

1. בהגדרת האחרונה מדובר בכפל של שני יצורים שונים – וקטור ומספר כאשר תוצאת הפעולה הזאת היא וקטור. כדי להבדיל בין כפל במספרים וכפל וקטור במספר, קוראים למספרים הכופלים גם סקלרים, ומדברים על כפל וקטור בסקלר.
 2. כמו בפעולת החיבור, כך גם כאן משתשמים בסימן "..." (כפול) לשתי מטרות שונות. פעם לכפל מספרים ופעם לכפל וקטור בסקלר.
- בדומה לנהוג בכפל מספרים, משמיטים לעתים קרובות את הנקודה בביטוי $t \cdot \vec{u}$ וכותבים $t\vec{u}$. נסכים לכתוב תמיד את הסקלר הכופל משמאל הוקטור הנכפל.

בעזרת כפולות של וקטור קבוע $\vec{AB}$ שונה מ $\vec{0}$ בסקלרים שונים אפשר להציג את כל נקודותיו של הישר AB .

משפט: כנגד כל נקודה C על הישר AB קיים מספר ממשי אחד ויחיד t שבשבילו $\vec{AC} = t\vec{AB}$.

הוכחה: בהגדרת הכפל של וקטור $\vec{AB}$ בסקלר t ראינו כיצד מתקבלת הנקודה C כאשר t נתון. אך גם החיפך נכון, כלומר: אם C נקודה נתונה, היחס $\frac{AC}{AB}$ הוא מספר ממשי p חיובי. נבחר $t = p$ אם $\vec{AC}$ ו $\vec{AB}$ שוו-כיוון, ו $t = -p$ אם $\vec{AC}$ ו $\vec{AB}$ כיוונים מנוגדים. בכל מקרה נקבל $\vec{AC} = t\vec{AB}$.



לבסוף נעיר כי $t\vec{AB}$ יכול להיות גם על ישר מקביל ל AB .

בסעיף הקודם ציינו את כללי החיבור בוקטורים, לחלן נסיף עליהם כללים הקשורים לכפל וקטור בסקלר.

מ6. סגירות ביחס לכפל בסקלר:

לכל מספר ממשי t ולכל וקטור $\vec{u}$, $t \cdot \vec{u}$ אף הוא וקטור.

מ7. לכל וקטור $\vec{u}$ מתקיים $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

מ8. חוק הקיבוץ (החוק האסוציאטיבי) של כפל בסקלרים:

לכל וקטור $\vec{u}$ ולכל שני מספרים t ו s מתקיים:
 $t \cdot (s \cdot \vec{u}) = (t \cdot s) \cdot \vec{u}$

שים לב: באגף הימני, הנקודה המסמלת כפל מופיעה

בשתי משמעויות שונות: בתוך $t \cdot s$ זהו **כפל בין מספרים** ממשיים, ב $(\) \cdot \vec{u}$ הנקודה **מסמלת את** הכפל של וקטור בסקלר.

מ9. חוק הפילוג (החוק הדיסטריבוטיבי) בסקלרים:

לכל וקטור $\vec{u}$ ולכל שני מספרים ממשיים s ו t מתקיים:
 $(t + s) \cdot \vec{u} = t\vec{u} + s\vec{u}$

10. חוק הפילוג (החוק הדיסטריבוטיבי) בוקטורים:

לכל שני וקטורים $\underline{u}$ ו $\underline{v}$ ולכל מספר t מתקיים:

$$t(\underline{u} + \underline{v}) = t\underline{u} + t\underline{v}$$

הוכחת הכללים מ-6 מ-9 נובעת מייד מהגדרת כפל וקטור בסקלר. כאן נוכיח רק את כלל 10 וניתן לו גם פירוש גיאומטרי.

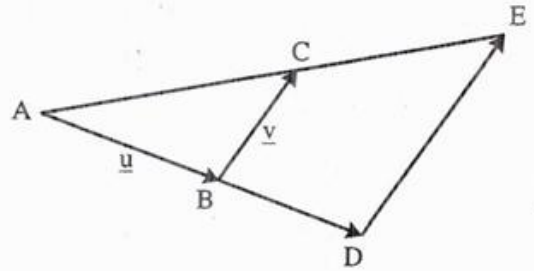
חוק הפילוג בוקטורים $t(\underline{u} + \underline{v}) = t\underline{u} + t\underline{v}$

$$\underline{v} = \vec{BC}, \underline{u} = \vec{AB}$$

הוכחה: יהיו

$$\underline{u} + \underline{v} = \vec{AC}$$

לכן



יהי $\vec{AD} = t\vec{AB}$ (בציור $t > 0$). נעביר $DE \parallel BC$ כאשר E הנקודה שבה המקביל דרך D ל BC חותך את הישר AC . מתקיים $\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE}$. כיוון שחישורים DE ו BC מקבילים, המשולשים ABC ו ADE דומים, ולכן

$$t = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

$$\vec{DE} = t\vec{BC} \quad \text{וגם} \quad \vec{AE} = t\vec{AC}$$

כלומר

על-ידי הצבה מקבלים:

$$t\vec{AC} = t\vec{AB} + t\vec{BC} = t\underline{u} + t\underline{v}$$

$$\vec{AC} = \underline{u} + \underline{v}$$

אולם

$$t(\underline{u} + \underline{v}) = t\underline{u} + t\underline{v}$$

לכן:

הערה:

מההגדרה של כפל ווקטור בסקלר נובע כי שני

וקטורים $\underline{u}$ ו $\underline{v}$ (שונים מווקטור אפס)

הם קוליניאריים אם ורק אם קיים t עבורו $\underline{v} = t\underline{u}$

נציין מספר תכונות נוספות שאפשר להוכיח

$$1. \quad -(-\underline{u}) = \underline{u}$$

$$2. \quad -t \cdot \underline{u} = -(t\underline{u})$$

$$3. \quad (t-s)\underline{u} = t\underline{u} - s\underline{u}$$

$$4. \quad t(\underline{u} - \underline{v}) = t\underline{u} - t\underline{v}$$

כללי העברה מאגף לאגף:

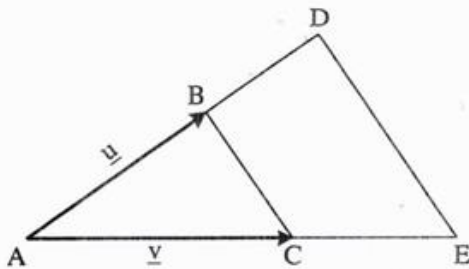
$$5. \quad \text{אם } \underline{u} + \underline{v} = \underline{w} \text{ או } \underline{u} = \underline{w} - \underline{v} \text{ (וגם } \underline{v} = -\underline{u} + \underline{w} \text{)}$$

$$6. \quad \text{אם } \underline{v} = t \cdot \underline{u} \text{ ו } t \neq 0 \text{ או } \underline{u} = \frac{1}{t}\underline{v}$$

נוכיח לדוגמה את חוק 4

$$t(\underline{u} - \underline{v}) = t\underline{u} - t\underline{v}$$

הוכחה i (גיאומטרית):



$$\underline{v} = \vec{AC} \quad \underline{u} = \vec{AB}$$

יהיו

$$\underline{u} - \underline{v} = \vec{CB}$$

לכן

יהי $\vec{AD} = t\underline{u}$ (בציור $t > 0$). מכיוון שמשולשים ABC ו ADE דומים (נמק), מתקיים:

$$\frac{ED}{CB} = t \quad \text{ו} \quad ED \parallel BC$$

$$\vec{ED} = t\vec{CB} = t(\underline{u} - \underline{v})$$

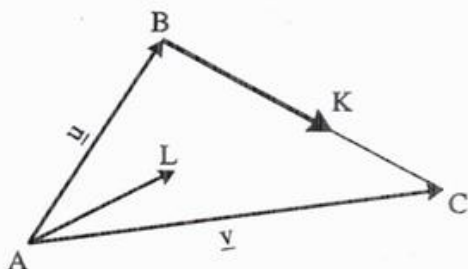
ולכן:

$$\vec{ED} = \vec{AD} - \vec{AE} = t\underline{u} - t\underline{v}$$

מאידך

$$t(\underline{u} - \underline{v}) = t\underline{u} - t\underline{v}$$

ומכאן:



התורה: כדי לבטא את חוקטור $\vec{AK}$ כנדרש נבחר מסלול שמתחיל במוצא A של חוקטור ומסתיים בסוף B של חוקטור. מסלול אפשרי הוא מ A ל B ומ B ל K. נקבל:

$$\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{BK} = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC} =$$

$$= \vec{u} + \frac{2}{3}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{2}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{u}$$

$$\vec{LK} = \vec{LA} + \vec{AB} + \vec{BK} =$$

בצורה דומה:

$$= -\left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}\right) + \vec{u} + \frac{2}{3}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{5}{12}\vec{v}$$

מכאן נוכל לחסוק כי חוקטורים $\vec{AC}$ ו $\vec{LK}$ נמצאים על ישרים מקבילים.

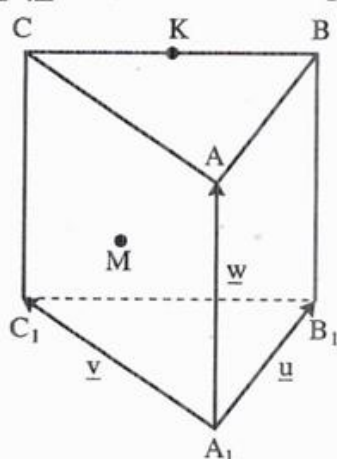
3. במנסרה משולשת נתון:

$$\vec{u} = \vec{A_1B_1}, \quad \vec{w} = \vec{A_1A}, \quad \vec{v} = \vec{A_1C_1}$$

יהי K אמצע חמקצוע BC, ותחי M הנקודה שבשבילה

$$\vec{A_1M} = \frac{1}{2}\vec{A_1C_1} + \frac{1}{2}\vec{A_1A}$$

חבט את $\vec{B_1K}$ ואת $\vec{BM}$ בעזרת $\vec{u}$, $\vec{v}$ ו $\vec{w}$.



$$t(\vec{u} - \vec{v}) = t(\vec{u} + (-\vec{v})) = t\vec{u} + t(-\vec{v})$$

לחשלים את החוכחה נותר לחוכיח כי

$$0 = t(\vec{v} + (-\vec{v})) = t\vec{v} + t(-\vec{v})$$

מתקיים:

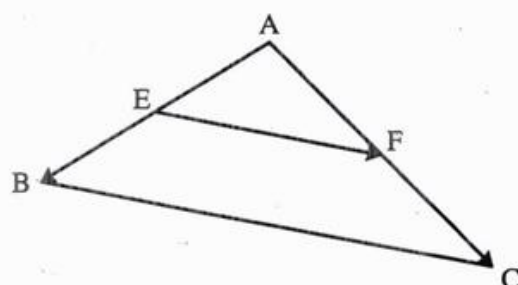
$$t(-\vec{v}) = -(t \cdot \vec{v}) \quad \text{כלומר: } t\vec{v} \text{ ל גדי ל } t(-\vec{v})$$

דוגמאות

1. במשולש ABC מסמנים $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AC} = \vec{v}$ ויהי EF קטע אמצעים. חבט את $\vec{EF}$ בעזרת $\vec{u}$ ו $\vec{v}$.

התורה: כיוון ש EF קטע אמצעים

$$\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{u}, \quad \vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{v}$$



מכאן מקבילים:

$$\vec{EF} = \vec{AF} - \vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u})$$

$$\vec{v} - \vec{u} = \vec{BC}$$

אולם,

$$\vec{EF} = \frac{1}{2}\vec{BC}$$

ולכן

כלומר, קטע האמצעים EF מקביל ל BC ושווה למחצית אורכו.

2. במשולש ABC מסמנים $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$ ונקודות K, L בציור מקיימות

$$\vec{BK} = \frac{2}{3}\vec{BC}, \quad \vec{AL} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$$

בטא את $\vec{AK}$ ו $\vec{LK}$ בעזרת $\vec{u}$, $\vec{v}$.

נציב:

$$\underline{r} = \underline{x} + \underline{u} + \frac{1}{2}(-\underline{x} + \underline{y})$$

קיבלנו משוואה בוקטורים. הנעלם הוא חוקטור $\underline{x}$.
דרך הפתרון דומה לפתרון של משוואה במספרים. (ראה
לעיל, תכונות נוספות של חמרחב חוקטורי "כללי העברה
מאגף לאגף")

$$\underline{r} = \underline{x} + \underline{u} - \frac{1}{2}\underline{x} + \frac{1}{2}\underline{y}$$

$$\frac{1}{2}\underline{x} = \underline{r} - \underline{u} - \frac{1}{2}\underline{y}$$

$$\underline{x} = 2\underline{r} - 2\underline{u} - \underline{y}$$

וחפתרון:

התרה:

$$\vec{B_1K} = \vec{B_1B} + \vec{BK} = \vec{B_1B} + \frac{1}{2}\vec{BC} =$$

$$= \vec{B_1B} + \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AC})$$

$$\vec{BA} = \vec{B_1A_1} = -\underline{u}, \vec{AC} = \vec{A_1C_1} = \underline{y} \quad \text{אולם}$$

$$\vec{B_1B} = \vec{A_1A} = \underline{w}$$

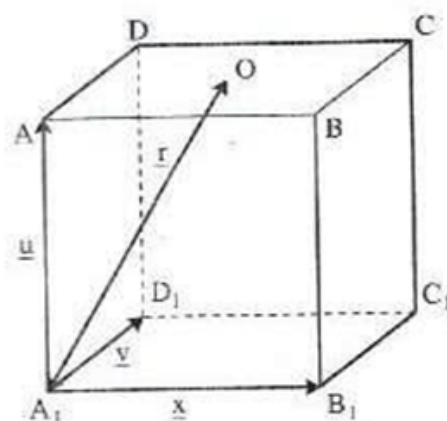
$$\vec{B_1K} = \underline{w} + \frac{1}{2}(-\underline{u} + \underline{y}) = \underline{w} - \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{y} \quad \text{לכן}$$

$$\vec{BM} = \vec{BB_1} + \vec{B_1A_1} + \vec{A_1M} =$$

$$= -\underline{w} - \underline{u} + \frac{1}{2}(\underline{y} + \underline{w}) = \frac{1}{2}\underline{y} - \underline{u} - \frac{1}{2}\underline{w}$$

4. בתיבת O היא מפגש אלכסוני הבסיס העליון $ABCD$.

$$\underline{r} = \vec{A_1O} \quad \underline{y} = \vec{A_1D_1} \quad \underline{u} = \vec{A_1A} \quad \text{נתון:}$$



הבע את $\vec{A_1B_1}$ בעזרת $\underline{u}, \underline{y}, \underline{x}$.

התרה: נסמן $\underline{x} = \vec{A_1B_1}$ ונבנה משוואה שהנעלם בה
הוא חוקטור $\underline{x}$.

מתקיים:

$$\vec{A_1O} = \vec{A_1B_1} + \vec{B_1B} + \vec{BO} =$$

$$= \vec{A_1B_1} + \vec{B_1B} + \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC})$$

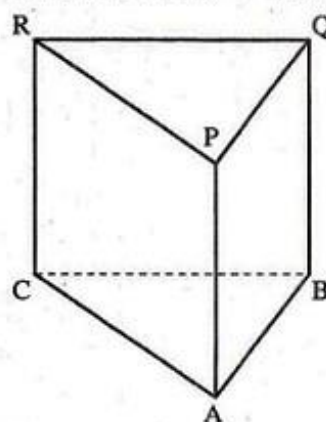
$$\vec{B_1B} = \vec{A_1A} = \underline{u} \quad \text{אולם}$$

$$\vec{BA} = \vec{B_1A_1} = -\underline{x}$$

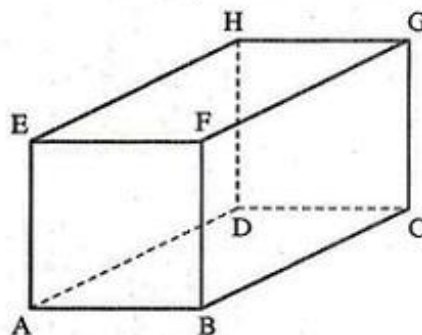
$$\vec{BC} = \vec{A_1D_1} = \underline{y}$$

לסעיף 1.1

1. במנסרה משולשת יש 3 זוגות של וקטורים שווים ושלישיית וקטורים שווים. רשום אותם.

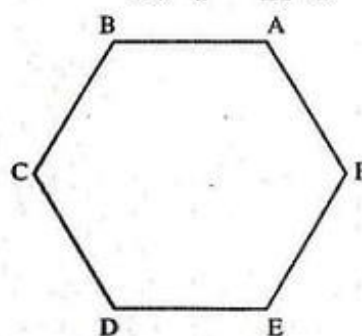


2. חמקצעות של תיבה מתחלקים לשלוש קבוצות של וקטורים שווים. כתוב אותן.



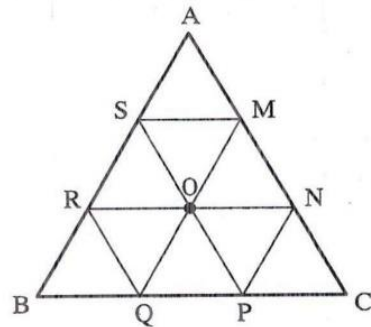
3. במשושה חמשוכלל שבציור מצא וקטורים השווים לוקטורים

א. $\vec{AB}$ ב. $\vec{EF}$ ג. $\vec{DF}$



4. ABC הוא משולש שווה צלעות. מחלקים כל צלע במשולש לשלושה קטעים שווים כמוראה בציר. הקטעים MQ, SP, RN נחתכים בנקודה O. מצא וקטורים חשויים לוקטורים

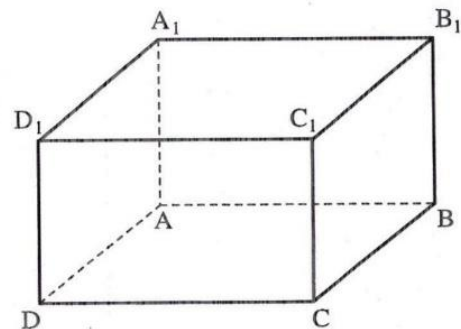
א. $\vec{OP}$ ב. $\vec{SM}$ ג. $\vec{PN}$



לסעיף 1.2

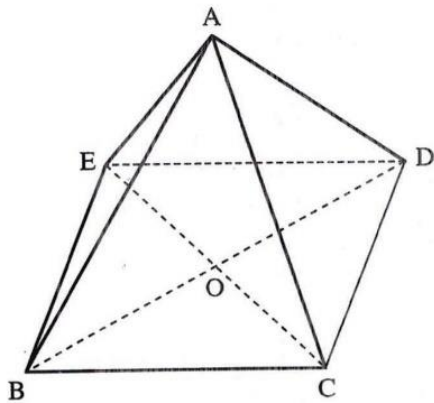
5. לפי תיבה $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. מצא וקטורים חשויים לסכומים:

א. $\vec{A_1 B_1} + \vec{B_1 C_1}$ ב. $\vec{A_1 B_1} + \vec{AD}$
 ג. הראה כי $\vec{D_1 A} = \vec{C_1 B}$



6. בפירמידה ABCDE חבסיס BCDE הוא מקבילית. O מפגש אלכסוני המקבילית. מצא וקטורים חשויים לסכומים:

א. $\vec{AC} + \vec{BE}$ ב. $\vec{EO} + \vec{CA}$ ג. $(\vec{BO} + \vec{DC}) + \vec{CA}$
 ד. $(\vec{CO} + \vec{BO}) + \vec{EA}$ ה. $\vec{DA} + \vec{BO}$



7. בציר של שאלה 4 מצא וקטורים חשויים לסכומים

א. $\vec{QP} + \vec{CN}$ ב. $\vec{QP} + \vec{NR}$
 ג. $\vec{AS} + \vec{CP}$ ד. $\vec{MN} + \vec{SR} + \vec{QR}$

8. בתיבה של תרגיל 5 מסמנים:

$\vec{DC} = \underline{u}$, $\vec{DA} = \underline{v}$, $\vec{DD_1} = \underline{w}$

בטא בעזרת $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את הוקטורים:

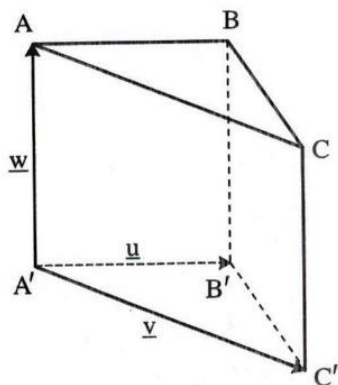
א. $\vec{AB_1}$ ב. $\vec{DB_1}$ ג. $\vec{CA_1}$

9. במנסרה המשולשת שבציר

$\underline{u} = \vec{A'B'}$, $\underline{v} = \vec{A'C'}$, $\underline{w} = \vec{A'A}$

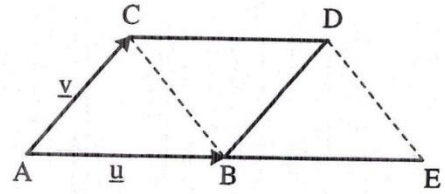
חבז בעזרת $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את הוקטורים:

א. $\vec{A'B}$ ב. $\vec{CA'}$ ג. $\vec{B'C}$



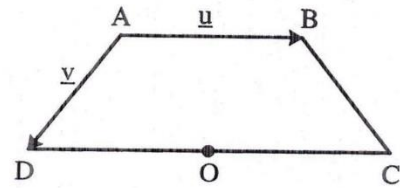
10. במקבילית ABDC העבר DE מקביל לאלכסון CB. חשב את חוקטורים $\vec{BE}$ ו $\vec{CE}$ בעזרת

$$\vec{y} = \vec{AC}, \vec{u} = \vec{AB}$$



11. ABCD טרפז שווה שוקיים שבו: $\vec{DC} = 2\vec{AB}$

$$\vec{u} = \vec{AB}, \vec{v} = \vec{AD} \quad O \text{ אמצע } CD, \text{ נסמן}$$



חבץ בעזרת $\vec{u}$ ו $\vec{v}$ את חוקטורים הבאים:

$$\vec{BO}, \vec{CO}, \vec{AC}, \vec{AO}, \vec{BC}, \vec{BD}$$

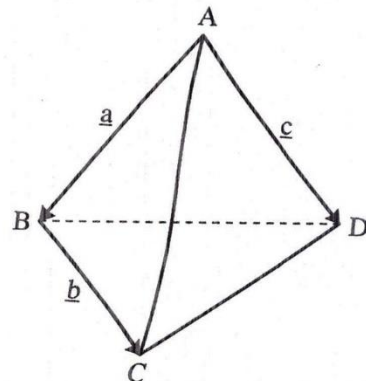
12. בטראדר ABCD, מסמנים

$$\vec{a} = \vec{AB}, \vec{b} = \vec{BC}, \vec{c} = \vec{AD}$$

א. חצג את שאר מקצועות הטראדר בעזרת

$$\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$$

- ב. הוכח, כי $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC}$ וחצג את חוקטור הזה בעזרת $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.



13. בציור של שאלה 6 נתון: $\vec{CA} = \vec{c}, \vec{BE} = \vec{b}, \vec{AE} = \vec{a}$

א. חצג את שאר מקצועות הטראדר בעזרת

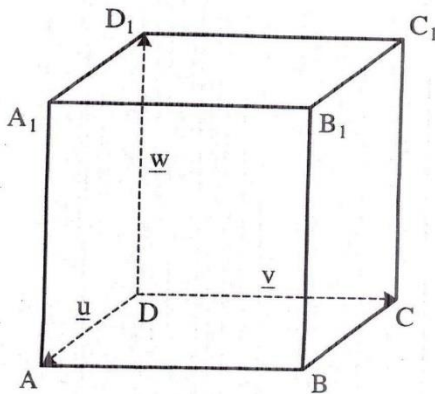
$$\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$$

$$\vec{AE} + \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} \quad \text{ב. הוכח, כי}$$

וחצג את חוקטור הזה בעזרת $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

14. בתיבה שבציור נתון:

$$\vec{DD_1} = \vec{w}, \vec{DC} = \vec{v}, \vec{DA} = \vec{u}$$



ציין וקטורים בתיבה השווים לוקטורים:

$$\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} \quad \text{ד.} \quad \vec{u} - \vec{w} \quad \text{א.}$$

$$-\vec{v} - \vec{u} + \vec{w} \quad \text{ה.} \quad \vec{v} + \vec{w} - \vec{u} \quad \text{ב.}$$

$$-\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} \quad \text{ו.} \quad \vec{w} - (\vec{u} + \vec{v}) \quad \text{ג.}$$

15. א. במקבילית ABCD, מפגש אלכסוני המקבילית O

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0} \quad \text{הוכח}$$

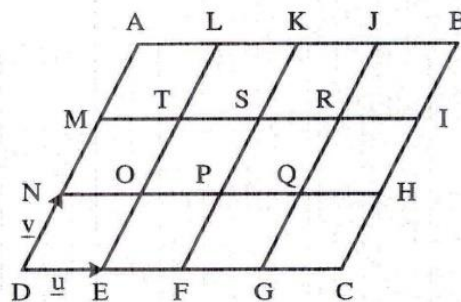
$$\vec{AC} + \vec{BD} = 2\vec{AD} \quad \text{ב*. הוכח:}$$

16. * בציור של שאלה 3 נתון

חבץ את וקטורי צלעות המשושה בעזרת $\vec{u}, \vec{v}$

לסעיף 1.3

17. בשרטוט מופיעה מקבילית ABCD. הצלעות AB ו CD חולקו לארבעה חלקים שווים.



הצלעות BC ו AD חולקו לשלושה חלקים שווים. מחברים את נקודות החלוקה כבשרטוט.

נסמן: $\vec{u} = \vec{DE}$ $\vec{v} = \vec{DN}$

מצא בשרטוט וקטורים השווים ל:

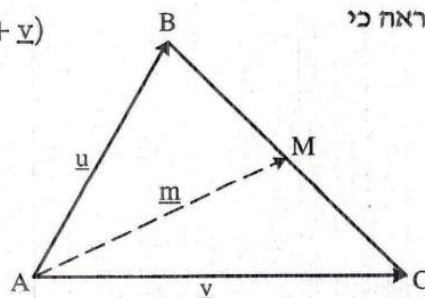
- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| א. $\vec{u} + \vec{v}$ | ו. $2\vec{u} - 2\vec{v}$ |
| ב. $\vec{v} - \vec{u}$ | ז. $\vec{u} - 3\vec{v}$ |
| ג. $\vec{u} - \vec{v}$ | ח. $2\vec{u} - 3\vec{v}$ |
| ד. $2\vec{u} + \vec{v}$ | ט. $-\vec{u} + 2\vec{v}$ |
| ה. $\vec{u} + 2\vec{v}$ | |

18. בציור של שאלה 4 נסמן $\vec{u} = \vec{BQ}$ $\vec{v} = \vec{BR}$ מצא בשרטוט וקטורים השווים ל:

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| א. $2\vec{u} + \vec{v}$ | ה. $2\vec{u} - 2\vec{v}$ |
| ב. $\vec{u} + 2\vec{v}$ | ו. $2\vec{u} - 3\vec{v}$ |
| ג. $2\vec{u} - \vec{v}$ | ז. $3\vec{v} - 3\vec{u}$ |
| ד. $\vec{v} - 3\vec{u}$ | ח. $-\vec{u} + 2\vec{v}$ |

19. במשולש ABC, AM הוא תיכון ל BC.

יהיו $\vec{AM} = \vec{m}$, $\vec{AC} = \vec{v}$, $\vec{AB} = \vec{u}$
הראה כי $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$

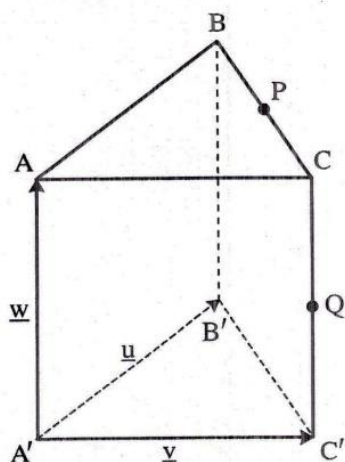


20. במנסרה המשולשת שבציור

$$\vec{u} = \vec{A'B'}, \vec{v} = \vec{A'C'}, \vec{w} = \vec{A'A}$$

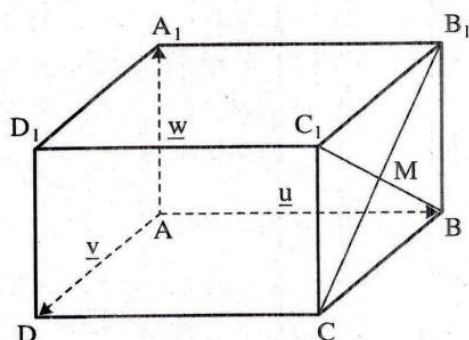
יהיו P אמצע הקטע BC ו Q אמצע הקטע CC'. חבצ בעזרת $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ את הוקטורים:

$$\vec{A'Q}, \vec{A'P}, \vec{AQ}, \vec{QP}$$



21. ABCDA₁B₁C₁D₁ תיבה.

נסמן: $\vec{w} = \vec{AA_1}$, $\vec{v} = \vec{AD}$, $\vec{u} = \vec{AB}$



M נקודת חיתוך אלכסוני BCC₁B₁.

חבצ בעזרת $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ את הוקטורים הבאים:

$$\vec{AC_1}, \vec{BD_1}, \vec{CA_1}, \vec{DB_1}, \vec{DM}$$

22. ABCD מקבילית. O נקודה כל שחיא במרחב.

נסמן: $\vec{w} = \vec{OC}$, $\vec{v} = \vec{OB}$, $\vec{u} = \vec{OA}$

הנקודות M ו N מקיימות

$$\vec{AM} = \frac{2}{3} \vec{AB}, \quad \vec{NC} = \frac{1}{4} \vec{BC}$$

בטא על-ידי $\vec{u}$, $\vec{v}$ את הוקטורים:

$$\vec{MN}, \text{ א. } \vec{CM}, \text{ ב. } \vec{AN}, \text{ ג. } \vec{MN}$$

25. בסימון התרגיל הקודם, היא נקודה המקיימת

$$\vec{AQ} = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AC}$$

בטא בעזרת $\vec{u}$, $\vec{v}$ את הוקטורים:

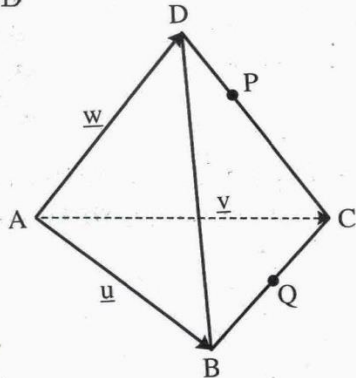
$$\vec{QM}, \text{ א. } \vec{QC}, \text{ ב. } \vec{QB}, \text{ ג. } \vec{QM}$$

26. בטראזור ABCD מסמנים

$$\vec{AB} = \vec{u}, \vec{AC} = \vec{v}, \vec{AD} = \vec{w}$$

יהי Q אמצע הקטע BC ותהי P הנקודה שבשכילה

$$\vec{CP} = \frac{2}{3} \vec{CD}$$



בטא בעזרת $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ את הוקטורים

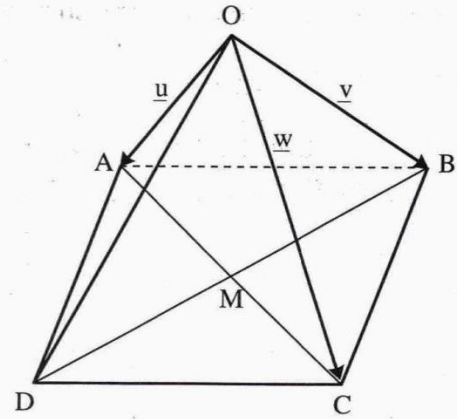
$$\vec{AQ}, \text{ א. } \vec{DQ}, \text{ ב. } \vec{AP}, \text{ ג. } \vec{QP}$$

27. א. בנתוני התרגיל הקודם R היא נקודה שבשכילה

$$\vec{AR} = \frac{1}{2} \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{v}$$

הבע את $\vec{CR}$ ו $\vec{RP}$ בעזרת $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

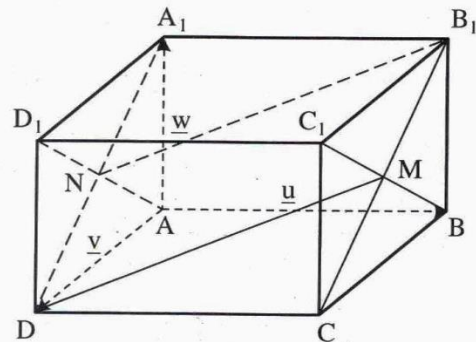
ב. אם $\vec{AR} = \frac{2}{3} \vec{u} + t \vec{v}$ מה צריך להיות ערכו של t כדי ש RP יקביל ל BD.



M נקודת מפגש האלכסונים AC ו BD. הבע בעזרת $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ את הוקטורים הבאים:

$$\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AC}, \vec{BD}, \vec{OD}, \vec{OM}$$

23. ABCDA₁B₁C₁D₁ תיבה.



M נקודת חיתוך אלכסוני CC₁B₁B

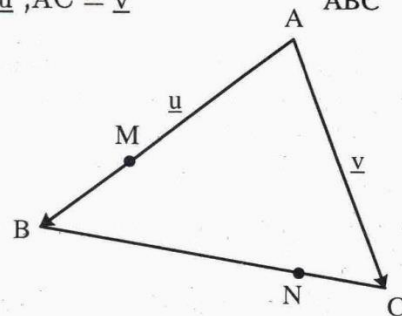
N נקודת חיתוך אלכסוני DD₁A₁A

$$\vec{u} = \vec{AB}, \vec{v} = \vec{AD}, \vec{w} = \vec{AA_1} \quad \text{נסמן:}$$

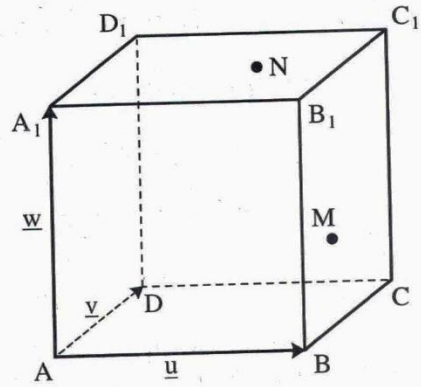
הבע את $\vec{DM}$ ואת $\vec{NB_1}$ בעזרת $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

חסק כי המרובע DMB₁N הוא מקבילית.

24. במשולש ABC $\vec{AB} = \vec{u}, \vec{AC} = \vec{v}$



28. בתיבה שבציור $\vec{w} = \vec{AA_1}$, $\vec{v} = \vec{AD}$, $\vec{u} = \vec{AB}$



הנקודות M ו N מקיימות:

$$\vec{BM} = \frac{1}{3} (\vec{BB_1} + \vec{BC})$$

$$\vec{C_1N} = \frac{1}{2} \vec{C_1B_1} + \frac{1}{3} \vec{C_1D_1}$$

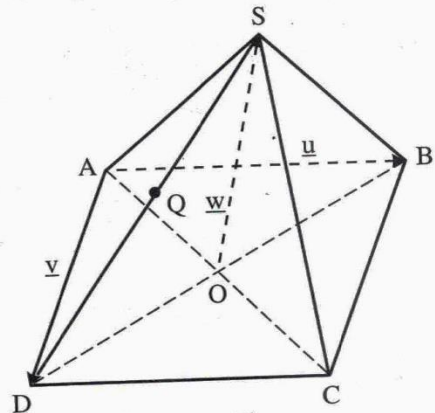
(i) בטא בעזרת $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ את הוקטורים הבאים:
א. $\vec{DM}$ ב. $\vec{BN}$ ג. $\vec{MN}$

(ii) הוכח כי אם $\vec{AS} = \frac{1}{6} \vec{DA} + \vec{NC_1} + \frac{1}{3} \vec{CC_1}$

הנקודה S תמצא על האלכסון AC_1 של התיבה.

29. ABCD מקבילית. O נקודת מפגש אלכסוני ABCD.

S נקודה כל שהיא במרחב. Q אמצע DS.



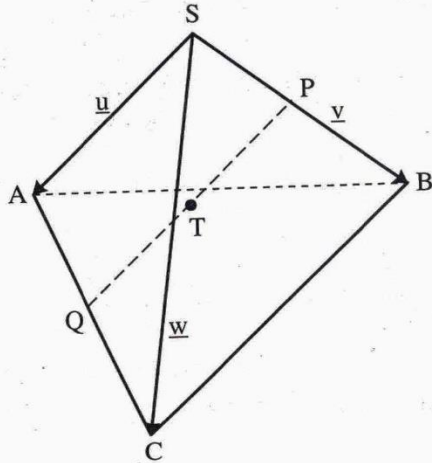
נסמן:

$$\vec{u} = \vec{AB}, \vec{v} = \vec{AD}, \vec{w} = \vec{OS}$$

חבצ בעזרת $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ את הוקטורים:

$$\vec{AS}, \vec{CS}, \vec{AQ}, \vec{BQ}$$

30. SABC טטראדר. P אמצע SB. Q אמצע AC. T אמצע PQ

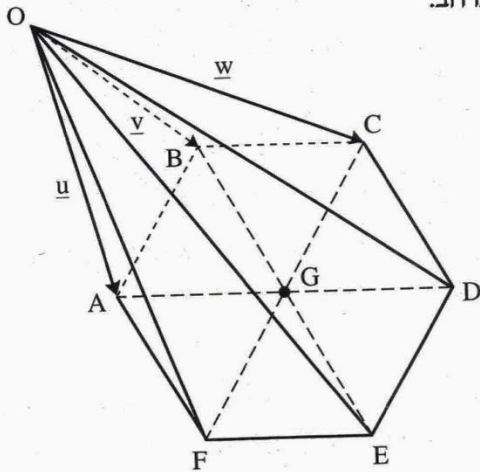


נסמן:

$$\vec{u} = \vec{SA}, \vec{v} = \vec{SB}, \vec{w} = \vec{SC}$$

חבצ בעזרת $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ את: $\vec{PQ}$, $\vec{ST}$

31. ABCDEF משושה משוכלל. O נקודה כל שהיא במרחב.



א. חסבר מדוע $\vec{AE} = \vec{BD}$ ו $\vec{AD} = 2\vec{BC}$

ב. נסמן: $\vec{u} = \vec{OA}, \vec{v} = \vec{OB}, \vec{w} = \vec{OC}$

חבצ בעזרת $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ את הוקטורים:

$$\vec{OD}, \vec{OE}, \vec{OF}$$

ג. תחי G מרכז המעגל החוסס את המשושה.

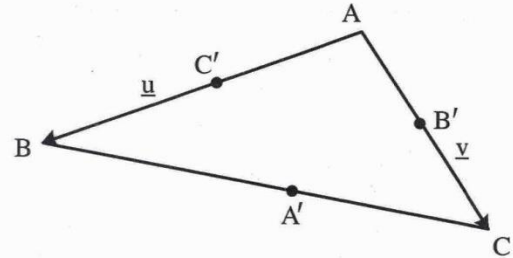
חבצ את $\vec{OG}$ בעזרת $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

32. במשולש ABC מסמנים $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$

א. הבע את וקטורי התיכונים $\vec{AA'}$, $\vec{BB'}$, $\vec{CC'}$ בעזרת $\underline{u}$, $\underline{v}$.

ב. הוכח, כי סכום וקטורי התיכונים הוא $\underline{0}$.

הדרכה: ראה תרגיל 19.



33. במשולש ABC נתון וקטור התיכון מ A $\underline{m}_A$ וכמו כן

$\underline{u} = \vec{AB}$. הבע את $\vec{AC}$ בעזרת $\underline{u}$ ו $\underline{m}_A$.

פרק 1

$$1. \quad \vec{CA} = \vec{RP}, \quad \vec{BC} = \vec{QR}, \quad \vec{AB} = \vec{PQ} \\ \vec{AP} = \vec{BQ} = \vec{CR}$$

$$2. \quad \vec{AB} = \vec{DC} = \vec{EF} = \vec{HG} \quad \text{א.} \\ \vec{AE} = \vec{BF} = \vec{DH} = \vec{CG} \quad \text{ב.} \\ \vec{AD} = \vec{BC} = \vec{EH} = \vec{FG} \quad \text{ג.}$$

$$3. \quad \vec{ED} \quad \text{א.} \\ \vec{CB} \quad \text{ב.} \\ \vec{CA} \quad \text{ג.}$$

$$4. \quad \vec{AM} = \vec{MN} = \vec{NC} = \vec{SO} = \vec{RQ} \quad \text{א.} \\ \vec{AS} = \vec{RB} = \vec{MO} = \vec{OQ} = \vec{NP} \quad \text{ב.} \\ \vec{QO} = \vec{OM} = \vec{BR} = \vec{RS} = \vec{SA} \quad \text{ג.}$$

$$5. \quad \vec{A_1B_1} + \vec{B_1C_1} = \vec{A_1C_1} = \vec{AC} \quad \text{א.} \\ \vec{A_1B_1} + \vec{AD} = \vec{A_1C_1} = \vec{AC}$$

$$6. \quad \vec{AD} \quad \text{א.} \\ \vec{OA} \quad \text{ב.} \\ \vec{OA} \quad \text{ג.} \\ \vec{BA} \quad \text{ד.} \\ \vec{OA} \quad \text{ה.}$$

$$7. \quad \vec{QO} = \vec{PN} = \vec{BR} = \vec{RS} = \vec{SA} = \vec{OM} \quad \text{א.} \\ \vec{QB} = \vec{PQ} = \vec{CP} = \vec{OR} = \vec{NO} = \vec{MS} \quad \text{ב.} \\ \vec{NQ} = \vec{OB} = \vec{MR} \quad \text{ג.} \\ \vec{SR} = \vec{AS} = \vec{RB} = \vec{MO} = \vec{OQ} = \vec{NP} \quad \text{ד.}$$

$$8. \quad \vec{u} + \vec{w} \quad \text{א.} \\ \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} \quad \text{ב.} \\ -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} \quad \text{ג.} \\ \vec{u} + \vec{w} \quad \text{א.} \\ -\vec{v} - \vec{w} \quad \text{ב.} \\ -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} \quad \text{ג.}$$

$$10. \quad \vec{CE} = 2\vec{u} - \vec{v} \quad \vec{BE} = \vec{u}$$

$$11. \quad \vec{CO} = -\vec{u}, \quad \vec{AC} = 2\vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{AO} = \vec{u} + \vec{v} \\ \vec{BC} = \vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{BD} = \vec{v} - \vec{u}, \quad \vec{BO} = \vec{v}$$

$$12. \quad \vec{BD} = \vec{c} - \vec{a}, \quad \vec{DC} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \quad \text{א.}$$

$$\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b} \\ \vec{b} + \vec{c} \quad \text{ב.}$$

$$13. \quad \vec{ED} = \vec{BC} = \vec{b} - \vec{a} - \vec{c}, \quad \vec{AD} = \vec{b} - \vec{c} \quad \text{א.}$$

$$\vec{CD} = \vec{b} \quad \vec{AB} = \vec{a} - \vec{b} \\ \vec{a} - \vec{c} \quad \text{ב.}$$

$$14. \quad \vec{D_1A}, \vec{C_1B} \quad \text{א.}$$

$$\vec{AC_1} \quad \text{ב.}$$

$$\vec{BD_1} \quad \text{ג.}$$

$$\vec{C_1A} \quad \text{ד.}$$

$$\vec{BD_1} \quad \text{ה.}$$

$$16. \quad \vec{AB} = \vec{ED} = \vec{u}$$

$$\vec{FE} = \vec{BC} = \vec{v} - \vec{u}$$

$$\vec{AF} = \vec{CD} = \vec{v} - 2\vec{u}$$

$$17. \quad \vec{EP} = \vec{FQ} = \vec{GH} = \vec{NT} = \vec{OS} = \dots \quad \text{א.} \\ = \vec{PR} = \vec{QI} = \vec{ML} = \vec{TK} = \vec{SJ} = \vec{RB}$$

$$\vec{EN} = \vec{FO} = \vec{QS} = \vec{TA} = \dots \quad \text{ב.}$$

$$\vec{NE} = \vec{MO} = \vec{TP} = \dots \quad \text{ג.}$$

$$\vec{DP} = \vec{EQ} = \vec{FH} = \vec{NS} = \vec{OR} = \dots \quad \text{ד.}$$

$$\vec{DT} = \vec{ES} = \vec{FR} = \vec{OK} = \dots \quad \text{ה.}$$

$$\vec{MF} = \vec{AP} = \vec{TG} = \vec{KH} = \dots \quad \text{ו.}$$

$$\vec{AE} = \vec{LF} = \vec{KG} = \vec{JC} \quad \text{ז.}$$

$$\vec{AF} = \vec{LG} = \vec{KC} \quad \text{ח.}$$

$$\vec{EM} = \vec{CR} = \vec{GS} = \dots \quad \text{ט.}$$

$$18. \quad \vec{BN} \quad \text{א.} \\ \vec{BM} \quad \text{ב.}$$

$$\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w} \quad .\mathcal{N} \quad .28$$

$$-\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w} \quad .\beth$$

$$-\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{6}\underline{v} + \frac{2}{3}\underline{w} \quad .\lambda$$

$$\vec{CS} = -\frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w} \quad , \quad \vec{AS} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w} \quad .29$$

$$\vec{BQ} = -\frac{3}{4}\underline{u} + \frac{3}{4}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} \quad , \quad \vec{AQ} = \frac{1}{4}\underline{u} + \frac{3}{4}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$$

$$\vec{ST} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{w} \quad , \quad \vec{PQ} = \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} \quad .30$$

$$\vec{OE} = 2\underline{u} - 3\underline{v} + 2\underline{w} \quad \vec{OD} = \underline{u} - 2\underline{v} + 2\underline{w} \quad .\mathcal{N} \quad .31$$

$$\vec{OF} = 2\underline{u} - 2\underline{v} + \underline{w} \quad .\lambda$$

$$\vec{OG} = \underline{u} - \underline{v} + \underline{w} \quad .\lambda$$

$$\vec{BB'} = \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{u} \quad , \quad \vec{AA'} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} \quad .32$$

$$\vec{CC'} = \frac{1}{2}\underline{u} - \underline{v}$$

$$2\underline{m}_A - \underline{u} \quad .33$$

$$\vec{RP} = \vec{SN} = \vec{OC} \quad .\lambda$$

$$\vec{CR} \quad .\gamma$$

$$\vec{MC} = \vec{SP} = \vec{AN} \quad .\mathcal{N}$$

$$\vec{AP} \quad .\lambda$$

$$\vec{QS} = \vec{PM} = \vec{OA} \quad .\mathcal{N} \quad \vec{CA} \quad .\lambda$$

$$\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{w} \quad .\lambda$$

$$\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} \quad .\mathcal{N} \quad .20$$

$$\frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} \quad .\gamma$$

$$\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w} \quad .\beth$$

$$\vec{BD}_1 = -\underline{u} + \underline{v} + \underline{w} \quad , \vec{AC}_1 = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w} \quad .21$$

$$\vec{DB}_1 = \underline{u} - \underline{v} + \underline{w} \quad , \vec{CA}_1 = -\underline{u} - \underline{v} + \underline{w}$$

$$\vec{DM} = \underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$$

$$\vec{AD} = -\underline{v} + \underline{w} \quad , \vec{AB} = -\underline{u} + \underline{v} \quad .22$$

$$\vec{BD} = \underline{u} - 2\underline{v} + \underline{w} \quad \vec{AC} = -\underline{u} + \underline{w}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{w} \quad , \vec{OD} = \underline{u} - \underline{v} + \underline{w}$$

$$\vec{DM} = \vec{NB}_1 = \underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} \quad .23$$

$$\frac{3}{4}\underline{v} - \frac{5}{12}\underline{u} \quad .\lambda$$

$$\frac{3}{4}\underline{v} + \frac{1}{4}\underline{u} \quad .\beth$$

$$\frac{2}{3}\underline{u} - \underline{v} \quad .\mathcal{N} \quad .24$$

$$\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{4}\underline{v} \quad .\lambda$$

$$\frac{2}{3}\underline{u} - \frac{1}{4}\underline{v} \quad .\beth$$

$$-\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{3}{4}\underline{v} \quad .\mathcal{N} \quad .25$$

$$\frac{2}{3}\underline{w} + \frac{1}{3}\underline{v} \quad .\lambda$$

$$\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} \quad .\mathcal{N} \quad .26$$

$$-\frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{6}\underline{v} + \frac{2}{3}\underline{w} \quad .\gamma$$

$$\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{w} \quad .\beth$$

$$\vec{RP} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{w} \quad , \quad \vec{CR} = \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} \quad .\mathcal{N} \quad .27$$

$$t = \frac{1}{3} \quad .\beth$$

2. המרחב הוקטורי האלגברי

2.1 המרחב הוקטורי R^3

בפרק זה נעסוק בסוג נוסף של וקטורים.

הגדרה: שלשת המספרים (a_1, a_2, a_3) נקראת **וקטור (תלת-ממדי)** והיא תסומן באות הרומית הקטנה $\underline{a}$ שמתחתה קו קטן. נכתוב אז בקיצור $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ למספרים a_1, a_2, a_3 קוראים **הקואורדינטות (הרכיבים, השיעורים)** של הוקטור $\underline{a}$. בדומה נכתוב באופן שיטתי

$$\underline{y} = (y_1, y_2, y_3), \quad \underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

וכו'.

שני הוקטורים $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ יקראו **שווים** אם הקואורדינטות שלהם שוות בהתאמה, כלומר

$$(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3)$$

כותבים אז

$$\underline{a} = \underline{b}$$

או בקיצור $\underline{a} = \underline{b}$ במלים אחרות, שני וקטורים נקראים שווים אם הם זהים.

הערה: בדומה להגדרת שלשת המספרים כוקטור, אפשר גם להגדיר זוג מספרים (a_1, a_2) כוקטור, במקרה זה מדובר בוקטור (דו-ממדי) שהקואורדינטות שלו הן a_1 ו a_2 .

בקבוצת הוקטורים התלת-ממדיים נגדיר חיבור של שני וקטורים וכפל וקטור במספר (סקלר).

$$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

יהיו

שני וקטורים 3-ממדיים, ויהי t מספר.

הסכום $\underline{a} + \underline{b}$ מוגדר על-ידי:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

המכפלה $t \cdot \underline{a}$ מוגדרת על-ידי:

$$t \cdot \underline{a} = (ta_1, ta_2, ta_3)$$

אם $\underline{a}$ ו $\underline{b}$ הם וקטורים דו-ממדיים הגדרת הסכום והכפל בסקלר דומה.

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \quad \text{דהיינו:}$$

$$t \cdot (a_1, a_2) = (ta_1, ta_2)$$

שים לב, כי בהגדרת חיבור וקטורים משתמשים בסימן "+" (פלוס) לשתי מטרות שונות: לחיבור מספרים ולחיבור וקטורים. כמו כן משתמשים בסימן "." (כפול), פעם לכפל מספרים ופעם לכפל וקטור בסקלר.

בדומה לסימון של כפל וקטור גיאומטרי בסקלר גם כאן נשמיט לעתים קרובות את הנקודה בביטוי $t \cdot \underline{a}$ ונכתוב $t\underline{a}$.

בפרק הקודם לאחר שהגדרנו את פעולת החיבור ופעולת הכפל בסקלר בוקטורים גיאומטרים הוכחנו כי קבוצת הוקטורים הגיאומטרים מקיימת 10 כללים: (מ1-10) המתייחסים לתכונות שפעולות אלה מקיימות (סעיפים 1.3-1.2). קראנו אז לקבוצת הוקטורים הגיאומטרים – "מרחב וקטורי" (המרחב הוקטורי הגיאומטרי).

גם עתה, כדי שנוכל לקרוא לקבוצת הוקטורים התלת-ממדיים "מרחב וקטורי" (המרחב הוקטורי התלת-ממדי) עלינו להראות כי קבוצת וקטורים זו, מקיימת את הכללים מ1-10 הפעם לגבי פעולת החיבור ופעולת הכפל של וקטור בסקלר בוקטורים תלת-ממדיים.

לנוחיות הקורא נחזור ונצטט את הכללים. נסמן להלן את קבוצת הוקטורים התלת-ממדיים ב R^3 .

מ1. סגירות ביחס לפעולת החיבור:

לכל שני איברים $\underline{a}$ ו $\underline{b}$ מתוך R^3 , הסכום $\underline{a} + \underline{b}$ אף הוא איבר של R^3 .

מ2. חוק הקיבוץ (החוק האסוציאטיבי) של החיבור:

לכל $\underline{a}$, $\underline{b}$ ו $\underline{c}$ של R^3

$$(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$$

כתוצאה מהחוק הזה נהוג להשמיט את הסוגריים ולכתוב

$$\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$$

מ3. קיום איבר האפס:

האיבר $\underline{0} = (0, 0, 0)$ ב R^3 הוא בעל התכונה:

לכל איבר $\underline{a}$ של R^3 מתקיים $\underline{a} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{a} = \underline{a}$

$\underline{0}$ נקרא איבר נייטרלי ביחס לחיבור או וקטור האפס.

מ4. קיום איבר נגדי:

כנגד כל איבר $a = (a_1, a_2, a_3)$ של R^3 ישנו ב R^3 האיבר $(-a_1, -a_2, -a_3)$ שייכת $-a$ וחמקיים: $a + (-a) = -a + a = 0$

במקום $a + (-b)$ נוהגים לכתוב בקיצור $a - b$. זוהי פעולת החיסור; החיסור הוא הפעולה החפוכה לחיבור, כי $(a - b) + b = a$

אם $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$

או $a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$

מ5. חוק החילוף (החוק הקומוטטיבי) של החיבור:

לכל a ו b של R^3 מתקיים: $a + b = b + a$

מ6. סגירות ביחס לכפל בסקלר:

לכל מספר ממשי t ולכל a מתוך R^3 , האיבר ta שייך ל R^3 .

מ7. לכל a של R^3 מתקיים $1 \cdot a = a$

מ8. חוק הקיבוץ (החוק האסוציאטיבי) של כפל בסקלרים:

לכל a של R^3 ולכל שני מספרים t ו s מתקיים:

$$t \cdot (s \cdot a) = (t \cdot s) \cdot a$$

שים לב: באגף הימני, הנקודה המסמלת כפל מופיעה בשתי משמעויות שונות: בתוך $t \cdot s$ זהו הכפל בין מספרים ממשיים, ב $a \cdot$ הנקודה מסמלת את הכפל של וקטור בסקלר.

מ9. חוק הפילוג (החוק הדיסטריבוטיבי) בסקלרים:

לכל a של R^3 ולכל שני מספרים ממשיים s ו t מתקיים

$$(t + s)a = ta + sa$$

מ10. חוק הפילוג (החוק הדיסטריבוטיבי) בוקטורים:

לכל a ו b של R^3 ולכל מספר t מתקיים:

$$t(a + b) = ta + tb$$

הוכחת הכללים פשוטה והיא מתבססת על תכונות החיבור והכפל של מספרים ממשיים. נזכיר לדוגמה את כלל מ10. אגף שמאל:

על פי הגדרת חיבור וקטורים

$$= t(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) =$$

על פי הגדרת הכפל של וקטור בסקלר

$$= (t(a_1 + b_1), t(a_2 + b_2), t(a_3 + b_3)) =$$

על פי חוק הפילוג במספרים ממשיים

$$= (ta_1 + tb_1, ta_2 + tb_2, ta_3 + tb_3)$$

אגף ימין:

$$ta + tb =$$

על פי הגדרת הכפל של וקטור בסקלר

$$= (ta_1, ta_2, ta_3) + (tb_1, tb_2, tb_3) =$$

על פי הגדרת חיבור וקטורים

$$= (ta_1 + tb_1, ta_2 + tb_2, ta_3 + tb_3)$$

יוצא כי שני האגפים שווים ביניהם.

נסכם: קבוצת וקטורים התלת-ממדיים R^3 מקיימת את הכללים מ1-מ10 ולכן היא תיקרא **מרחב וקטורי** (המרחב הווקטורי R^3).

בצורה דומה אפשר להוכיח כי קבוצת וקטורים הדר-ממדיים שנשמנה ב R^2 , כאשר פעולת החיבור והכפל בסקלר מוגדרים בדומה להגדרה ב R^3 , היא מרחב וקטורי (המרחב הווקטורי R^2).

כמו במרחב הווקטורי הגיאומטרי, גם במרחב R^3 מתקיימות התכונות הנוספות הבאות:

$$1. -(-u) = u$$

$$2. 0 \cdot u = 0$$

(הסקלר 0 כפול בוקטור u שווה לוקטור 0)

$$3. t \cdot 0 = 0$$

(הוקטור 0 כפול בכל סקלר שווה לוקטור 0)

$$4. -t \cdot u = -(tu)$$

$$5. (t - s)u = tu - su$$

$$6. t(u - v) = tu - tv$$

כללי העברה מאגף לאגף:

$$7. u = w - v \text{ או } u + v = w$$

$$(v = -u + w)$$

$$8. u = \frac{1}{t} \cdot v \text{ או } t \neq 0, v = t \cdot u$$

$$9. u = 0 \text{ או } t = 0 \text{ או } t \cdot u = 0$$

כפי שצינו במרחב הווקטורי הגיאומטרי (סעיף 1.3) אפשר להוכיח את התכונות הנוספות לעיל בהסתמך על כללי המרחב הווקטורי מ1-מ10 או ישירות מתוך הגדרת סכום של וקטורים וכפל וקטור בסקלר.

נדגיש כי יש יתרון להוכחת התכונות הנוספות רק בהסתמך על הכללים מ1-מ10. במקרה זה ההוכחה תהיה תקפה גם במרחב הווקטורי הגיאומטרי, גם במרחב הווקטורי האלגברי

$$3(\underline{u} - 2\underline{v}) - 2(\underline{u} - \underline{v})$$

מצא את הוקטור

התורה: ² תחילה נפשט את התבנית

$$3(\underline{u} - 2\underline{v}) - 2(\underline{u} - \underline{v}) =$$

$$= 3\underline{u} - 6\underline{v} - 2\underline{u} + 2\underline{v} = \underline{u} - 4\underline{v}$$

מכאן הוקטור המבוקש הוא:

$$\underline{u} - 4\underline{v} = (1, 2, -1) - 4(1, 3, 0) =$$

$$= (1, 2, -1) - (4, 12, 0) = (-3, -10, -1)$$

2. שימוש להתרת משוואות

יהיו $\underline{u}$ ו $\underline{v}$ וקטורים נתונים. פתור לפי $\underline{x}$ את המשוואה:

$$2(\underline{x} - \underline{u}) = \underline{v} + 4\underline{x}$$

$$2(\underline{x} - \underline{u}) = \underline{v} + 4\underline{x} \quad \text{התורה:}$$

$$\Leftrightarrow 2\underline{x} - 2\underline{u} = \underline{v} + 4\underline{x}$$

$$\Leftrightarrow -2\underline{x} = \underline{v} + 2\underline{u}$$

$$\Leftrightarrow \underline{x} = -\frac{1}{2}(\underline{v} + 2\underline{u})$$

אם $\underline{u}, \underline{v}$ וקטורים של חזגמה הקודמת, יהיה $\underline{x}$:

$$\underline{x} = -\frac{1}{2}((1, 3, 0) + (2, 4, -2)) =$$

$$= -\frac{1}{2}(3, 7, -2) = (-3/2, -7/2, 1)$$

וגם במרחבים וקטוריים נוספים¹. זאת משום שכללים 1מ-10 זהים בכל המרחבים.

לעומת זאת אם מוכיחים בצורה ישירה, דחינו בחסתמך על הגדרת סכום וקטורים וכפל וקטור בסקלר, יש להוכיח את התכונות הנספחות בנפרד: פעם במרחב הוקטורי הגיאומטרי; פעם במרחב הוקטורי האלגברי וכך בנפרד בכל מרחב וקטורי אחר.

נוכיח לדוגמה את החוקים 7 ו 8 בחסתמך על עשרת הכללים 1מ עד 10מ נציין בכל שלב בחוכחה על איזה כלל מסתמכים.

הוכחת תכונה 7: נסיף לשני אגפי השוויון $\underline{u} + \underline{v} = \underline{w}$ את הנגדי $-\underline{v}$ של $\underline{v}$:

$$(\underline{u} + \underline{v}) + (-\underline{v}) = \underline{w} + (-\underline{v}) \Leftrightarrow$$

$$\underline{u} + (\underline{v} + (-\underline{v})) = \underline{w} - \underline{v} \Leftrightarrow \quad \text{על פי 2מ וחסתמי הכתיבה:}$$

$$\underline{u} + \underline{0} = \underline{w} - \underline{v} \Leftrightarrow \quad \text{על פי 4מ:}$$

$$\underline{u} = \underline{w} - \underline{v} \quad \text{על פי 3מ:}$$

הוכחת תכונה 8: נכפל את שני אגפי השוויון $\frac{1}{t}\underline{v} = t\underline{u}$ ב $\frac{1}{t}$:

$$\frac{1}{t}\underline{v} = \frac{1}{t}(t\underline{u}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{t}\underline{v} = \left(\frac{1}{t} \cdot t\right) \cdot \underline{u} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{t}\underline{v} = 1 \cdot \underline{u} \quad \text{לפי תכונות המספרים הממשיים:}$$

$$\frac{1}{t}\underline{v} = \underline{u} \quad \text{לפי 7מ:}$$

רואים כאן את הדמיון בין כללי הפעולות של חיבור תבניות וחיבור וקטורים, וכן בין כפל של מספר בתבנית וכפל של סקלר בוקטור. כתוצאה מכך התהליך של פישוט תבניות בוקטורים או התרת משוואות דומה לנעשה במספרים. נדגים זאת:

1. שימוש בכלל המילוג

$$\underline{u} = (1, 2, -1) \quad \underline{v} = (1, 3, 0) \quad \text{יהיו}$$

לסעיף 2.1

1. חשב את הסכומים

א. $(-1, 0, 3) + (4, 6, -5)$

ב. $(4, -6, 8) + (5, 6, -3)$

ג. $(1, 2) + (3, 4) + (-5, 6)$

ד. $(k, k^2, k^3) + (-1, -1, -1)$

ה. $(a, 2b - 5, -c) + (-a, -2b, c)$

ו. $x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)$

2. חשב את המכפלות:

א. $14 \cdot (1, 2, -6)$

ב. $-6 \cdot (2, 8)$

ג. $\frac{1}{3}(-6, 9, 24)$

ד. $2 \cdot (4 \cdot (1, -3, 6))$

ה. $2 \cdot [-6(2, -3) + 5(1, 4)]$

3. א. מצא x ו y כדי שיתקיים שוויון חוקטורים

$(2, 4, 3) = (x - y, x + y, 3)$

ב. (1) האם הוקטורים $(6, -24, 42)$ ו $(1, -4, 7)$

הם ווקטורים קוליניאריים?

(2) האם הוקטורים $(6, -24, 24)$ ו $(1, -4, 7)$

הם ווקטורים קוליניאריים?

ג. האם יש סקלר k שבשבילו

$k(1, -5, 9) = (2, -10, 17)$

ד. מצא ℓ ו y שבשבילם $\ell(-4, 3) = (4, y)$

ה. מצא סקלר s וקואורדינטות x, z כך שיתקיים

$s(3, 8, 6) = (x, 1, z)$

4. יהיו $\underline{m}_1 = (-2, 1, 4)$ $\underline{m}_2 = (3, -5, 2)$

מצא את קואורדינטות חוקטורים:

א. $\underline{m}_1 + \underline{m}_2$ ד. $3\underline{m}_1 + \underline{m}_2$

ב. $2\underline{m}_1 - \underline{m}_2$ ה. $t\underline{m}_1 + 7\underline{m}_2$

ג. $\frac{1}{2}\underline{m}_2 - 5\underline{m}_1$ ו. $a\underline{m}_1 + (1 - a)\underline{m}_2$

5. יהיו $\underline{u} = (2, 3, 5)$ $\underline{v} = (3, 2, 0)$

ו $\underline{w} = (-1, 2, 3)$

מצא את קואורדינטות חוקטורים:

א. $\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$

ב. $\underline{u} - \underline{v} + \underline{w}$

ג. $\underline{u} + (\underline{v} - \underline{w}) + \underline{w}$

ד. $-\underline{u} + (\underline{v} + \underline{u}) - \underline{w}$

ה. $-\underline{w} + \underline{u} - \underline{v}$

ו. $(\underline{v} + \underline{w}) + (\underline{v} - \underline{u}) + (\underline{u} - \underline{w})$

6. יהיו $\underline{v} = (3, 1, 2)$, $\underline{w} = (2, 3, 1)$

ו $\underline{u} = (1, 2, 3)$

חשב את הוקטורים:

א. $\frac{1}{2}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{3}{4}\underline{w}$

ב. $\underline{u} + 2\underline{v} - 3\underline{u} + 4\underline{v}$

ג. $\frac{1}{6}(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})$

ד. $\underline{u} + 4(\underline{v} - 2\underline{w})$

ה. $(\underline{u} - \underline{v}) + \frac{2}{3}(\underline{v} + \underline{w}) - \underline{u}$

ו. $3(\underline{w} + 2\underline{u}) - 2(\underline{u} + 3\underline{v})$

7. נתונים הוקטורים: $\underline{u}_1 = (3, 4, -2)$

$\underline{u}_2 = (-4, 2, -1)$

מצא לפחות זוג אחד של מספרים a ו b כדי שבוקטור

$a\underline{u}_1 + b\underline{u}_2$

א. הקואורדינטה הראשונה תהיה 0.

ב. הקואורדינטה השלישית תהיה 0.

ג. הקואורדינטה השנייה תהיה 5.

ד. הקואורדינטות הראשונה והשנייה תהיינה שוות.

8. נתונים הוקטורים: $\underline{m}_1 = (1, -2, 3)$

$\underline{m}_2 = (3, 2, -5)$ $\underline{m}_3 = (-1, 0, 1)$

א. מצא t כאשר $\underline{m}_1 + t\underline{m}_2 = (7, 2, -7)$

ב. מצא s ו t כאשר $s\underline{m}_1 + t\underline{m}_2 = (9, -2, -1)$

ג. מצא s ו t כאשר

$\underline{m}_1 + s\underline{m}_2 + t\underline{m}_3 = (-7, -8, 17)$

9. פשט את הביטויים:

א. $\frac{1}{2}(\underline{a} + 2\underline{b}) - \underline{a} + (3\underline{b} - \underline{a})$

ב. $\underline{a} + [\underline{b} - 2\underline{a} + 3(\underline{a} - \underline{b})] + \underline{b}$

ג. $\underline{u} - 2[\underline{v} - 2\underline{w} + \frac{1}{2}(\underline{v} - \underline{u})] + \underline{w}$

ד. $(\underline{u} + \underline{v}) - (\underline{v} - \underline{w}) - (\underline{u} - \underline{w})$

ה. $x(\underline{u} + \underline{v}) + y(\underline{v} - \underline{w}) + z(\underline{w} - \underline{u})$

הערה: רשום את התבנית בסעיף ה כביטוי שצורתו:

$a\underline{u} + b\underline{v} + c\underline{w}$

10. חשב את הוקטורים שבתרגיל הקודם,

כאשר: $\underline{a} = (0, 0, 1)$, $\underline{b} = (0, 1, 0)$

$\underline{w} = (1, 0, 0)$, $\underline{v} = (1, -1, 1)$

$\underline{u} = (2, -1, 1)$

11. יהיו $\underline{v} = (1, -1, 0)$, $\underline{u} = (0, -1, 1)$

$\underline{w} = (1, 0, -1)$

מצא שלושה מספרים x, y, z כדי שיתקיים

$x\underline{u} + y\underline{v} + z\underline{w} = (0, 0, 0)$

12. יהיו $\underline{b} = (2, 1, 3)$, $\underline{a} = (1, 1, -1)$

$\underline{d} = (-1, 2, 3)$, $\underline{c} = (1, 0, 1)$

מצא שלושה מספרים x, y, z כך שיתקיים

$x\underline{a} + y\underline{b} + z\underline{c} = \underline{d}$

13. א. מצא וקטור $\underline{z}$ המקיים

$(1, -3, 6) + \underline{z} = (5, 8, 3)$

ב. מצא סקלר k המקיים

$k \cdot (-1, -2, 3) = (2, 4, -6)$

14. פתור לפי $\underline{x}$ את המשוואות:

א. $(-1, 2, 3) + \underline{x} = (4, -2, 7)$

ב. $\underline{x} + 2(8, -1, 3) = (8, -1, 3)$

ג. $\underline{x} + (1, -5, 8.3) = (0, 0, 0)$

ד. $-3\underline{x} + 2(1, -4, 5) = (0, 0, 0)$

ה. $2\underline{x} + (a, 2a, 3a) = (3a, 4a, 5a)$

ו. $(b_1, b_2, b_3) + \underline{x} = (a_1, a_2, a_3)$

15. החר לפי $\underline{x}$ את המשוואות הוקטוריות:

א. $3\underline{x} + 2(\underline{u} - \underline{x}) = 4(\underline{u} + \underline{x})$

ב. $(\underline{u} - 2\underline{x}) + \underline{v} = (\underline{v} + 2\underline{x}) - \underline{u}$

ג. $3(\underline{v} - \underline{x}) + 2(\underline{u} - 3(\underline{v} - \underline{x})) = 0$

ד. $3\underline{x} + (\underline{v} - \underline{x}) = 2(\underline{x} + \underline{v}) - \underline{v}$

ומצא בכל מקרה את הפתרון כאשר

$\underline{v} = (2, -5, 0)$ ו $\underline{u} = (0, 1, 1)$

תשובות פרק 2

$$\begin{aligned} t &= 2 \quad \text{א. 8} \\ s &= 3, t = 2 \quad \text{ב.} \\ s &= -3, t = -1 \quad \text{ג.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1\frac{1}{2}a + 4b &\quad \text{א. 9} \\ 2a - b &\quad \text{ב.} \\ 2u - 3v + 5w &\quad \text{ג.} \\ 2w &\quad \text{ד.} \\ (x-z)u + (x+y)v + (z-y)w &\quad \text{ה.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(0, 4, -1\frac{1}{2}\right) &\quad \text{א. 10} \\ (0, -1, 2) &\quad \text{ב.} \\ (6, 1, -1) &\quad \text{ג.} \\ (2, 0, 0) &\quad \text{ד.} \\ (3x-z, -2x-y+z, 2x+y-z) &\quad \text{ה.} \end{aligned}$$

$$(t \text{ לכל מספר ממשי}) \quad z = t, y = -t, x = t \quad \text{א. 11}$$

$$z = -5\frac{2}{3}, y = 2\frac{2}{3}, x = -\frac{2}{3} \quad \text{א. 12}$$

$$k = -2 \quad \text{ב. 13} \quad (4, 11, -3) \quad \text{א.}$$

$$\begin{aligned} (5, -4, 4) &\quad \text{א. 14} \\ (-8, 1, -3) &\quad \text{ב.} \\ (-1, 5, -8.3) &\quad \text{ג.} \\ \left(\frac{2}{3}, -2\frac{2}{3}, 3\frac{1}{3}\right) &\quad \text{ד.} \\ (a, a, a) &\quad \text{ה.} \\ (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3) &\quad \text{ו.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2}{3}u = \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \quad \text{א. 15} \\ x &= \frac{1}{2}u = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{ב.} \\ x &= y - \frac{2}{3}u = \left(2, -5\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \quad \text{ג.} \\ &\quad \text{ד. כל וקטור } x \text{ פתרון} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3, 6, -2) &\quad \text{א. 1} \\ (9, 0, 5) &\quad \text{ב.} \\ (-1, 12) &\quad \text{ג.} \\ (k-1, k^2-1, k^3-1) &\quad \text{ד.} \\ (0, -5, 0) &\quad \text{ה.} \\ (x_1, x_2, x_3) &\quad \text{ו.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (8, -24, 48) &\quad \text{ד. 2} \\ (-14, 76) &\quad \text{ה.} \\ (14, 28, -84) &\quad \text{א.} \\ (-12, -48) &\quad \text{ב.} \\ (-2, 3, 8) &\quad \text{ג.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 3, y = 1 \quad \text{א. 3} \\ &\quad \text{ב. (1) כן (2) לא} \\ &\quad \text{ג. אף} \\ \ell &= -1, y = -3 \quad \text{ד.} \\ s &= \frac{1}{8}, x = \frac{3}{8}, z = \frac{3}{4} \quad \text{ה.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1, -4, 6) &\quad \text{א. 4} \\ (-7, 7, 6) &\quad \text{ב.} \\ (11\frac{1}{2}, -7\frac{1}{2}, -19) &\quad \text{ג.} \\ (-3, -2, 14) &\quad \text{ד.} \\ (21-2t, t-35, 4t+14) &\quad \text{ה.} \\ (3-5a, 6a-5, 2a+2) &\quad \text{ו.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4, 0, -3) &\quad \text{ד. 5} \\ (0, -1, 2) &\quad \text{ה.} \\ (6, 4, 0) &\quad \text{ו.} \\ (4, 7, 8) &\quad \text{א.} \\ (-2, 3, 8) &\quad \text{ב.} \\ (5, 5, 5) &\quad \text{ג.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-3, -18, 3) &\quad \text{ד. 6} \\ \left(\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, 0\right) &\quad \text{ה.} \\ (-8, 11, 3) &\quad \text{ו.} \\ \left(0, \frac{31}{12}, \frac{11}{12}\right) &\quad \text{א.} \\ (16, 2, 6) &\quad \text{ב.} \\ (1, 1, 1) &\quad \text{ג.} \end{aligned}$$

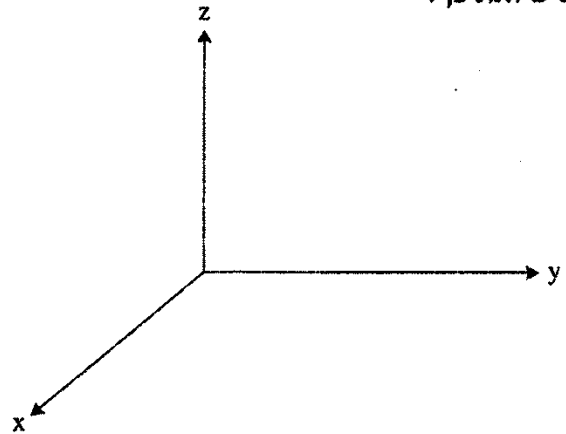
$$\begin{aligned} a &= 1, b = \frac{1}{2} \quad \text{ג. 7} \\ a &= -6, b = 1 \quad \text{ד.} \\ &\quad \text{א. } a = 4, b = 3 \\ &\quad \text{ב. } a = 1, b = -2 \end{aligned}$$

ישנן אפשרויות רבות, למשל:

3. המרחב הוקטורי R^3 והמרחב הוקטורי הגיאומטרי

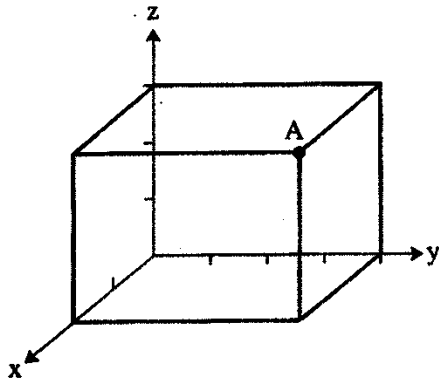
3.0 מבוא – קואורדינטות במרחב

כשם שכל נקודה במישור נקבעת על-ידי זוג קואורדינטות (x, y) , כך אפשר לאפיין כל נקודה במרחב בעזרת שלוש קואורדינטות. עושים זאת כך:

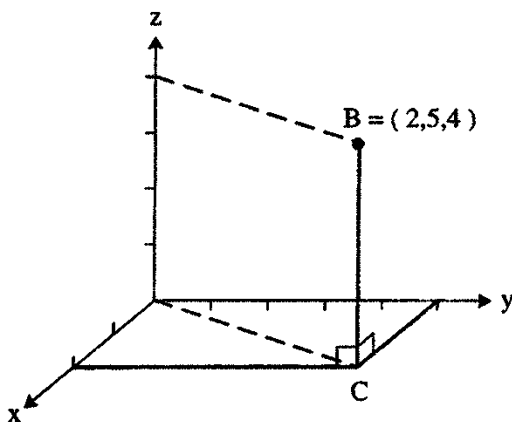


בונים שלושה צירי מספרים במרחב, הנחתכים כולם בנקודת האפס, וחמאונכים זה לזה: (בציור מופיע רק החלק החיובי של כל ציר).
דרך כל שניים מן הצירים האלה עובר מישור אחד ויחיד, ולכן קובעים צירים אלה שלושה מישורים: מישור $[xy]$ (המישור מכיל את צירי ה- x וה- y), מישור $[yz]$ ומישור $[zx]$.

עתה, אם A נקודה במרחב, נעביר דרכה שלושה מישורים המקבילים למישורי הצירים. מישורים אלה ומישורי הצירים יוצרים תיבה אשר בה A היא הקדקוד שמול הראשית. התיבה מקצה על הצירים שלושה מספרים שיקראו קואורדינטות הנקודה A , ולכן אם $A = (2, 4, 3)$ כבציור, פירוש הדבר שהתיבה מקצה 2 יחידות על ציר ה- x , 4 יחידות על ציר ה- y , ו-3 יחידות על ציר ה- z . שים לב לסדר!



דרך אחרת לחמחיש את חקשר בין נקודה במרחב לבין שיעוריה היא – לראות בשיעור השלישי מספר המציין את טובה הנקודה מעל המישור $[xy]$. שני השיעורים הראשונים הם שיעורי היטל הנקודה על המישור $[xy]$. בציור דלחלן מתוארת נקודה B במרחב.



BC מאונך למישור $[xy]$, לכן C הוא היטל הנקודה על מישור זה. שיעורי C במישור $[xy]$ הם $(2, 5)$, ואורך האנך הוא 4. לכן שיעורי הנקודה B הם $(2, 5, 4)$.

הערה: חצגת נקודה במישור $[xy]$ תהיה $(a, b, 0)$. השיעור השלישי יכול להיות שלילי או אפס.

3.1 ההצגה האלגברית של וקטור גיאומטרי

בפרקים הקודמים עסקנו בנפרד במרחב R^3 ובמרחב הוקטורי הגיאומטרי. ראינו כי בשני המרחבים מתקיימים אותם כללים. בפרק זה ניווכח, כי במובן מסוים אין הבדל בין המרחב הוקטורי הגיאומטרי והמרחב R^3 או R^2 , כאשר מצטמצמים לוקטורים במישור.

התשובה ברורה: $\vec{OA} = 2\vec{e}_x$ אם ורק אם A נמצאת על ציר ה x, בכיוון החיובי, במרחק 2 יחידות מהראשית, כלומר, אם ורק אם $A = (2, 0, 0)$. באופן כללי מקבלים:

$$\vec{OA} = t_1\vec{e}_x \quad \text{אם ורק אם } A = (t_1, 0, 0) \quad (\text{או } \vec{OA} = (t_1, 0, 0))$$

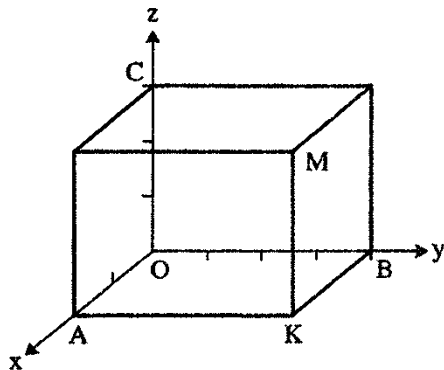
$$\vec{OB} = t_2\vec{e}_y \quad \text{אם ורק אם } B = (0, t_2, 0) \quad (\text{או } \vec{OB} = (0, t_2, 0))$$

$$\vec{OC} = t_3\vec{e}_z \quad \text{אם ורק אם } C = (0, 0, t_3) \quad (\text{או } \vec{OC} = (0, 0, t_3))$$

תהי M נקודה בת הקואורדינטות $(2, 4, 3)$. בסעיף 3.0 פירשנו את הקואורדינטות של M בעזרת תיבה הנקבעת על ידי משורי הצירים. בתיבה זו M הוא הקדקוד מול הראשית. בציר OA, OB, OC הם המקצועות על הצירים ומתקיים $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 4, 0)$, $C = (0, 0, 3)$

או בכתיב וקטורי, בעזרת וקטורי הצירים

$$\vec{OA} = 2\vec{e}_x, \vec{OB} = 4\vec{e}_y, \vec{OC} = 3\vec{e}_z$$



נסמן ב K את הקדקוד שבשכיל $\vec{OB} = \vec{AK}$. בשכיל קדקוד זה מתקיים גם $\vec{KM} = \vec{OC}$, כי KM מקביל ל OC ושווה לגובה התיבה. לכן

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AK} + \vec{KM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$$

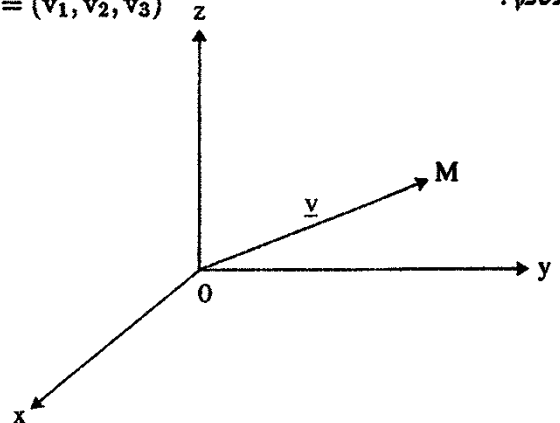
באופן כללי, אם $M = (m_1, m_2, m_3)$

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AK} + \vec{KM} = m_1\vec{e}_x + m_2\vec{e}_y + m_3\vec{e}_z \quad \text{או}$$

גם חטענה ההפוכה נכונה.

תחילה נראה כיצד אפשר להתאים לכל וקטור גיאומטרי במרחב וקטור מתוך R^3 . נבחר במרחב נקודה O ומערכת צירים קבועה שראשיתה O. יהי $\vec{y}$ וקטור גיאומטרי נתון. נעתיקו לראשית O ונסמן את סופו ב M, כלומר $\vec{y} = \vec{OM}$

במערכת הצירים הנתונה תחיינה (v_1, v_2, v_3) קואורדינטות הנקודה M. נתאים לווקטור הגיאומטרי $\vec{y}$ את השלשה (v_1, v_2, v_3) . נאמר, כי השלשה (v_1, v_2, v_3) היא הצגה אלגברית של הוקטור $\vec{OM} = (v_1, v_2, v_3)$ ונסמן:



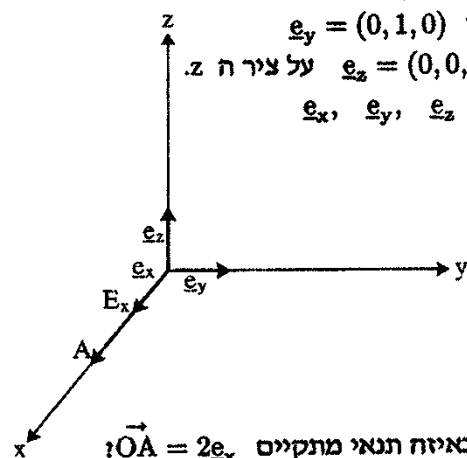
נמצא עתה פירוש גיאומטרי של הקואורדינטות v_1, v_2, v_3 . לצורך זה נגדיר שלושה וקטורים על הצירים.

יהי $\vec{e}_x$ וקטור על ציר ה x שחציתו האלגברית $\vec{OE}_x = \vec{e}_x = (1, 0, 0)$

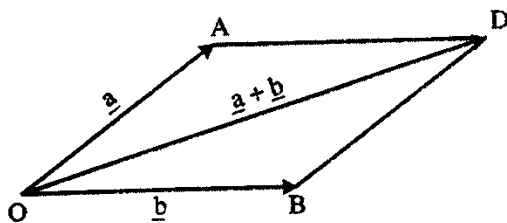
E_x היא הנקודה $(1, 0, 0)$ על ציר ה x, כלומר בכיוון החיובי על הציר במרחק יחידה מהראשית.

בצורה דומה יהיו $\vec{e}_y = (0, 1, 0)$ על ציר ה y, $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$ על ציר ה z.

נקרא לווקטורים $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ וקטורי צירים.



תהי A נקודה. באיזה תנאי מתקיים $\vec{OA} = 2\vec{e}_x$?



חצגת הקואורדינטות של $\vec{OA}$ ו $\vec{OB}$ היא:

$$\vec{a} = \vec{OA} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$$

$$\vec{b} = \vec{OB} = b_1\vec{e}_x + b_2\vec{e}_y + b_3\vec{e}_z$$

מכאן:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z) + (b_1\vec{e}_x + b_2\vec{e}_y + b_3\vec{e}_z)$$

על סמך כללי הפעולות בוקטורים מתקבל:

$$\vec{OD} = \vec{a} + \vec{b} =$$

$$= (a_1 + b_1)\vec{e}_x + (a_2 + b_2)\vec{e}_y + (a_3 + b_3)\vec{e}_z$$

ולכן החצגה האלגברית של $\vec{a} + \vec{b}$ היא

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{OD} =$$

$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

תוצאה: קואורדינטות הקדקוד D של המקבילית OADB

$$D = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

הן:

הערה: אם מחברים את חוקטורים המתאימים ב R^3

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) =$$

מקבלים:

$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

וזה אינו אלא החצגה האלגברית של חוקטור המתאים לסכום

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OD}$$

בדבר פעולת הכפל של חוקטור בסקלר: יהי

$$\vec{a} = \vec{OA} = (a_1, a_2, a_3)$$

מחי החצגה האלגברית של $t\vec{a}$

חרי חצגת הקואורדינטות של $\vec{OA}$ היא

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$$

על סמך כללי הפעולות בוקטורים

$$t\vec{a} = t(a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z) =$$

$$= t(a_1\vec{e}_x) + t(a_2\vec{e}_y) + t(a_3\vec{e}_z) =$$

$$= (ta_1)\vec{e}_x + (ta_2)\vec{e}_y + (ta_3)\vec{e}_z$$

$$\vec{OM} = m_1\vec{e}_x + m_2\vec{e}_y + m_3\vec{e}_z$$

אם

$\vec{OM}$ הוא האלכסון בתיבה שמקצועותיה נקבעים על ידי

חוקטורים $\vec{OA} = m_1\vec{e}_x$, $\vec{OB} = m_2\vec{e}_y$, $\vec{OC} = m_3\vec{e}_z$

לכן קואורדינטות הקדקודים הסמוכים ל O הן

$$C = (0, 0, m_3), B = (0, m_2, 0), A = (m_1, 0, 0)$$

$$M = (m_1, m_2, m_3)$$

ומכאן

נסכם זאת:

$$\text{משפט: } M = (m_1, m_2, m_3) \text{ או}$$

$$\vec{OM} = (m_1, m_2, m_3)$$

אם ורק אם

$$\vec{OM} = m_1\vec{e}_x + m_2\vec{e}_y + m_3\vec{e}_z$$

נקרא לחצגה

$$\vec{OM} = m_1\vec{e}_x + m_2\vec{e}_y + m_3\vec{e}_z$$

החצגה בעזרת וקטורי הצירים או בקיצור החצגת קואורדינטות.

באופן דומה, החצגה האלגברית של וקטור $\vec{OM}$ במישור

$$\vec{OM} = (m_1, m_2)$$

תהיה $[xy]$

ובעזרת וקטורי הצירים

$$\vec{OM} = m_1\vec{e}_x + m_2\vec{e}_y$$

סיכום: השלשה (m_1, m_2, m_3) מציגה את הנקודה M

ואת החצגה האלגברית של חוקטור $\vec{OM}$.

$$\vec{OM} = (m_1, m_2, m_3)$$

כותבים זאת

חקשר ביניהם ניתן בעזרת החצגת הקואורדינטות

$$\vec{OM} = m_1\vec{e}_x + m_2\vec{e}_y + m_3\vec{e}_z$$

החצגה האחרונה תלויה בראשית O ובמערכת הצירים

$$\underline{m} = (m_1, m_2, m_3)$$

שבחרנו. נוסף לכך,

הוא וקטור אלגברי ב R^3 .

לחלן ניווכח שיש קשר בין חיבור וקטורים גיאומטריים

(חזתונים בחצגה אלגברית), לחיבור וקטורים ב R^3 , וכמו

כן קיים קשר בין כפל וקטור בסקלר במרחב חוקטורי

הגיאומטרי, ובמרחב R^3 .

בעיה: יהיו $\vec{a}$ ו $\vec{b}$ וקטורים גיאומטריים שמוצאם בראשית

O, ותהיינה חצגותיהם האלגבריות:

$$\vec{a} = \vec{OA} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = \vec{OB} = (b_1, b_2, b_3)$$

מצא את החצגה האלגברית של $\vec{a} + \vec{b}$.

התורה: חוקטור הגיאומטרי $\vec{a} + \vec{b}$ הוא אלכסון המקבילית

OADB. יש למצוא את החצגה האלגברית של $\vec{OD}$.

מכאן החצגה האלגברית של t_a היא:

$$t_a = (ta_1, ta_2, ta_3)$$

מאידך, אם כופלים ב t את וקטור המתאים ב R^3 ,

$$t(a_1, a_2, a_3) = (ta_1, ta_2, ta_3)$$

מקבלים: וזו בדיוק החצגה האלגברית של הוקטור המתאים למכפלה

$$\vec{OK} = t \vec{OA}$$

$$\vec{OK} = t \vec{OA}$$

תוצאה: אם

$$K = (ta_1, ta_2, ta_3)$$

הקואורדינטות של K הן:

הקשרים שהוכחנו בין וקטור גיאומטרי $\vec{OA}$ והחצגה

המתאימה (a_1, a_2, a_3) כוקטור ב R^3 (בעזרת מערכת

צירים), חסכום וחכפל בסקלר מאפשרים לחשב את הפעולות

בוקטורים גיאומטרים בדרך גיאומטרית או במקביל בדרך

אלגברית ב R^3 , ואת התוצאה אפשר לפרש כוקטור

גיאומטרי או כחצגה אלגברית שלו.

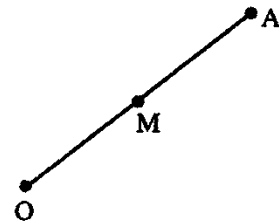
לעובדה זו שימושים רבים; נראה זאת לחלק.

דוגמה 1: יהי M אמצע חסע OA . (הראשית).

חשב את הקואורדינטות של M אם $A = (a_1, a_2, a_3)$

התרה:

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{OA}$$



בחצגה אלגברית:

$$\vec{OA} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{OA} = \frac{1}{2} (a_1, a_2, a_3) =$$

לכן

$$= \left(\frac{1}{2}a_1, \frac{1}{2}a_2, \frac{1}{2}a_3 \right)$$

כלומר M היא הנקודה

$$\left(\frac{1}{2}a_1, \frac{1}{2}a_2, \frac{1}{2}a_3 \right)$$

דוגמה 2: תהיינה $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$

שתי נקודות במרחב. מצא את החצגה האלגברית של $\vec{AB}$.

התרה:

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

ובחצגה אלגברית:

$$\vec{AB} = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

כלומר

מסקנה: כדי למצוא חצגה אלגברית לוקטור $\vec{AB}$ מחסרים

את קואורדינטות המוצא מקואורדינטות חסוף.

נוכיר גם כי אם $\vec{AB} = (t_1, t_2, t_3)$ או

$$\vec{BA} = -\vec{AB} = (-1)\vec{AB} = (-t_1, -t_2, -t_3)$$

דוגמה 3: יהיו $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$

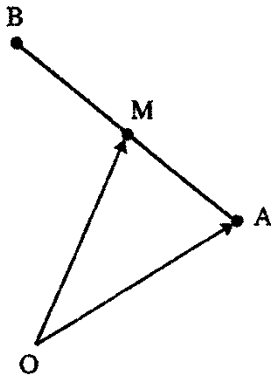
מצא את קואורדינטות אמצע חסע AB .

התרה: נסמן ב M את אמצע חסע AB .

$$\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AB}$$

מכאן:

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AB}$$



נשתמש בחצגה האלגברית של $\vec{AB}$ מהדוגמה הקודמת וכן

בחצגה האלגברית של $\vec{OA}$:

$$\vec{OM} = (a_1, a_2, a_3) +$$

$$+ \frac{1}{2} (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) =$$

$$= \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2} \right)$$

(נמק את השלב האחרון!).

מסקנה: הקואורדינטות של אמצע קטע מתקבלות כממוצע

חשבוני של קואורדינטות הקצוות.

דוגמה 4: תהי ABCD מקבילית במרחב

$A = (1, 2, -3)$, $B = (1, 0, -1)$, $C = (1, -2, 0)$
מצא את שיעורי הנקודה D.

התרה: ABCD מקבילית אם ורק אם $\vec{BA} = \vec{CD}$

נסמן $D = (x, y, z)$

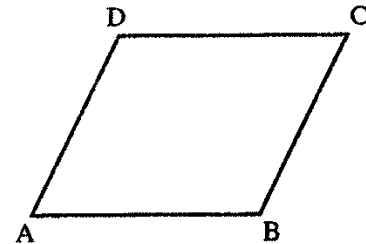
אז: $\vec{BA} = (0, 2, -2)$

$\vec{CD} = (x, y, z) - (1, -2, 0) = (x-1, y+2, z)$

משווין חוקטורים ב R^3 מקבלים:

$x-1=0$, $y+2=2$, $z=-2$

כלומר $D = (1, 0, -2)$



דוגמה 5: בטראזור OABC נתון:

$A = (1, 2, -1)$, $O = (0, 0, 0)$

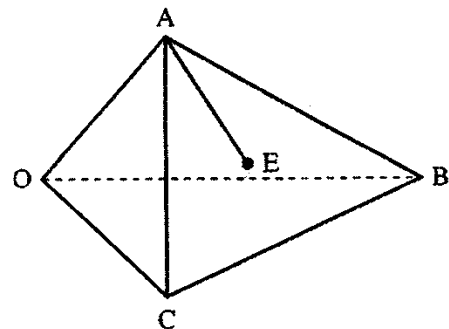
$B = (1, 0, -2)$, $C = (1, 0, 0)$

כמרכן $\vec{AE} = \frac{1}{3}(\vec{AC} + \vec{AB})$

נסמן: $\vec{w} = \vec{OC}$, $\vec{y} = \vec{OB}$, $\vec{u} = \vec{OA}$

א. בטא את $\vec{OE}$ בעזרת $\vec{w}$, $\vec{y}$ ו $\vec{u}$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה E.



התרה:

$$\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{AE} = \vec{OA} + \frac{1}{3}(\vec{AC} + \vec{AB}) =$$

$$= \vec{OA} + \frac{1}{3}(\vec{AO} + \vec{OC} + \vec{AO} + \vec{OB}) =$$

$$= \vec{OA} + \frac{1}{3}(-2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) =$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

$$\vec{OE} = \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$$

$$\vec{OE} = \frac{1}{3}((1, 2, -1) + (1, 0, -2) + (1, 0, 0)) =$$

$$= \frac{1}{3}(3, 2, -3) = \left(1, \frac{2}{3}, -1\right)$$

$$E = \left(1, \frac{2}{3}, -1\right)$$

3.2 תרגילים

1. חג בעזרת וקטורי הצירים את חוקטורים

א. $\vec{u} = (3, -1, 5)$

ב. $\vec{v} = (-2, 4, 0)$

ג. $\vec{w} = (-1, -1, 1)$

2. כתוב את החצגה האלגברית של חוקטורים

א. $2\vec{e}_z - 3\vec{e}_x + 5\vec{e}_y$

ב. $-5\vec{e}_x + 3\vec{e}_z$

ג. $3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 7\vec{e}_z$

ד. $(1-t)\vec{e}_x - t\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$

3. נתונים חוקטורים

$$\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + \vec{e}_z, \quad \vec{b} = -5\vec{e}_x + 7\vec{e}_y - 9\vec{e}_z$$

הצג בעזרת וקטורי הצירים וכתוב את החצגה האלגברית של הוקטורים:

א. $6\vec{a}$ ג. $-5\vec{a} + 3\vec{b}$

ב. $\vec{a} + \vec{b}$ ד. $t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$

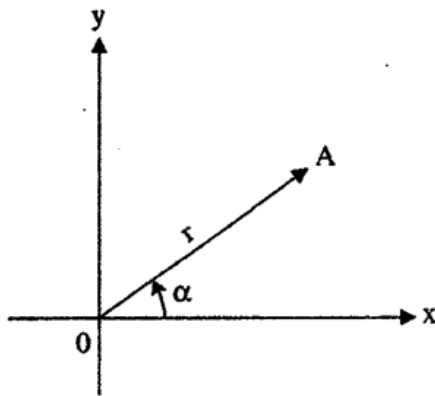
4. שרטט במערכת צירים במישור את הוקטורים:

א. $\vec{v} = (1, -2)$

ב. $\vec{v} = (2, -1)$

ג. $\vec{v} = (-1, 2)$

ד. $\vec{v} = (\sqrt{2}, \sqrt{5})$

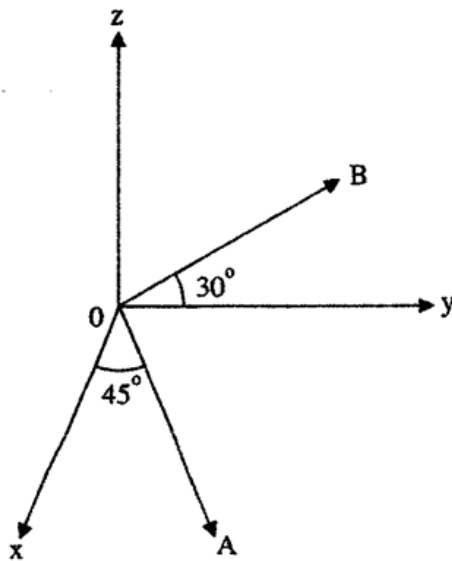


8. א. הוקטור $\vec{OA}$ נמצא במישור $[xy]$, אורכו 1, וחזויות שהוא יוצר עם ציר ה x היא 45° . מצא את חצגתו האלגברית במרחב הוקטורי תגיאומטרי.

5. שרטט במישור במערכת צירים את הוקטורים:

א. $\vec{u} = 2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y$

ב. $\vec{u} = -3\vec{e}_y$

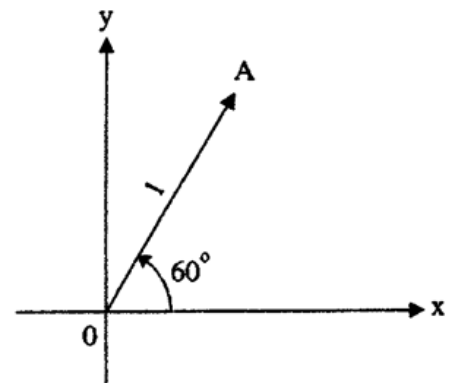


ב. הוקטור $\vec{OB}$ נמצא במישור $[yz]$, אורכו 1, וחזויות שהוא יוצר עם ציר ה y היא 30° . מצא את חצגתו האלגברית.

6. במישור נתון הוקטור $\vec{OA}$ כבציר. (אורך הוקטור 1).

א. מצא את חצגתו האלגברית.

ב. חצג את $\vec{OA}$ על-ידי וקטורי צירים.



7. במישור נתון הוקטור $\vec{OA}$ כבציר.

א. מצא את חצגתו האלגברית.

ב. כתוב את החצגה האלגברית של $\vec{OA}$ כאשר:

i. $r = 5, \alpha = 150^\circ$

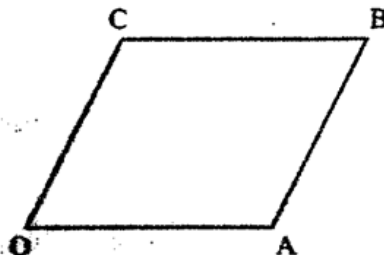
ii. $r = 2, \alpha = 315^\circ$

9. במקבילית OABC נתונים הקדקודים

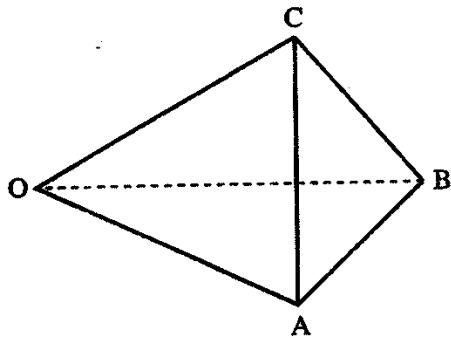
$O = (0, 0, 0)$, $A = (7, -2, 5)$, $C = (4, -3, 0)$

מצא את החצגה האלגברית של הוקטורים:

א. $\vec{AC}$ ב. $\vec{OB}$ ג. $\vec{AB}$



15. בטראזור OABC נתון: $O = (0, 0, 0)$, $A = (2, 1, 3)$, $B = (-3, 1, 0)$, $C = (-2, 1, 2)$. מצא את החצוג האלגברית של חוקטורים:



א. $(\vec{OA} + \vec{OB}) + \vec{OC}$ ג. $\vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BO}$
 ב. $\vec{OA} + \vec{BC}$ ד. $\vec{BA} - \frac{1}{2}\vec{CB}$

16. יהי $\vec{y} = \vec{AB}$. מצא את הנגזרת החסר:

א. $A = (3, 1, 2)$, $B = (-1, 2, 0)$, $\vec{y} = (, ,)$
 ב. $A = (2, 1, 3)$, $B = (, ,)$, $\vec{y} = (6, 2, -4)$
 ג. $A = (, ,)$, $B = (2, -5, 3)$, $\vec{y} = (1, 1, 1)$
 ד. $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, -1, 2)$, $\vec{y} = (, ,)$

17. יהי חוקטור $\vec{AB}$, ותהי נקודה C נתונה. מצא D כך שיתקיים $\vec{AB} = \vec{CD}$

א. $A = (1, 2, -1)$, $B = (3, 0, 0)$, $C = (1, 1, 1)$
 ב. $A = (-2, 1)$, $B = (3, 2)$, $C = (-1, 4)$
 ג. $A = (-3, 1, 2)$, $B = (0, 1, -2)$, $C = (5, 4, 3)$

18. במקבילית ABCD נתונים שלושה קדקודים. מצא את הקדקוד הרביעי ואת החצוג האלגברית של $\vec{AC}$.

א. $A = (2, 3)$, $B = (-1, 4)$, $D = (-3, 1)$
 ב. $A = (-1, 1, 2)$, $B = (4, 1, 2)$, $C = (2, -1, 3)$

10. תהיינה הנקודות

$O = (0, 0, 0)$, $A = (-2, 3, 6)$, $B = (4, 0, -5)$

- א. מצא את החצוג האלגברית של חוקטור $\vec{AB}$.
 ב. נתון $\vec{OC} = \frac{1}{2}\vec{OA}$. מצא את שיעור C.

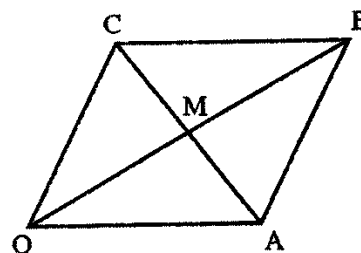
11. תהיינה הנקודות O , $A = (3, -2, 5)$. הראשית.

מצא את החצוג האלגברית של חוקטורים

א. $3\vec{OA}$ ב. $-2\vec{OA}$ ג. $\frac{1}{4}\vec{OA}$

12. תהי מקבילית OABC.

נתון: $\vec{OA} = (8, -2, 4)$, $\vec{OC} = (-5, 4, 6)$. כאשר O בראשית.



- א. מצא חצוג אלגברית לחוקטור $\vec{OB}$.
 ב. תהי M נקודת מפגש האלכסונים במקבילית. מצא חצוג אלגברית לחוקטור $\vec{OM}$.
 ג. מרחק הקואורדינטות של נקודות B ו M.

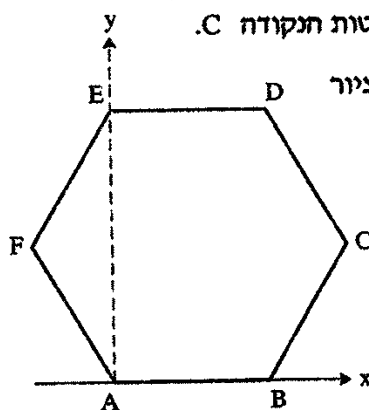
13. תהי M נקודת הפגשה של האלכסונים במקבילית OABC.

נתון $O = (0, 0)$, $M = (1, 2)$, $A = (5, 3)$

- א. מצא את החצוג האלגברית של $\vec{AB}$, $\vec{OB}$.
 ב. מצא את קואורדינטות הנקודה C.

14. במשושה המשוכלל שבציור

- אורך כל צלע הוא a.
 מצא את קואורדינטות חוקטור $\vec{FC}$.
 מהי המסקנה הגיאומטרית?



19. במישור, כתוב את הקואורדינטות של לפחות וקטור אחד, שמוצאו בראשית הצירים ואשר הנקודה $B = (2, 3)$ נמצאת עליו, אך לא בסופו.

20. בדוק אם $\vec{AB} = \vec{CD}$ כאשר:

א. $B = (-7, 6, 9)$, $A = (5, 3, 1)$

$D = (7, 4, -12)$, $C = (19, 0, -4)$

ב. $B = (15, -4)$, $A = (-6, 9)$

$D = (22, -10)$, $C = (1, 3)$

ג. $B = (-13, 11)$, $A = (8, 1)$

$D = (21, 4)$, $C = (7, -2)$

21. נתון $\vec{CD} = k \cdot \vec{AB}$. מצא את D כאשר:

א. $B = (3, 5, 9)$, $A = (-6, 1, 4)$

$k = -2$, $C = (1, 8, 4)$

ב. $B = (4, 1, 8)$, $A = (2, 0, -6)$

$k = 4$, $C = (-6, 2, 6)$

ג. $B = (-3, 5)$, $A = (4, -9)$

$k = 5$, $C = (4, 6)$

22. נתונות הנקודות $A = (a_1, a_2, a_3)$

ו $B = (b_1, b_2, b_3)$ וידוע כי $\vec{ON} = -\vec{BA}$ (ראשית הצירים).

מצא את שיעורי הנקודה N.

23. במנסרה משולשת:

$B = (0, 2, 1)$, $A = (-1, 2, 3)$

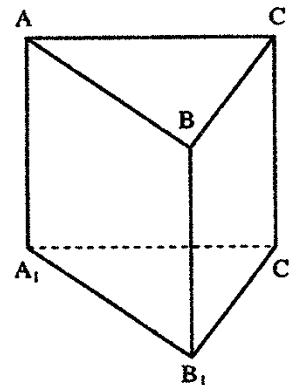
$B_1 = (4, 2, -4)$, $C = (1, 0, -4)$

א. מצא את שיעורי

הנקודות A_1, C_1

ב. מצא הצגה אלגברית

של הוקטור $\vec{AC_1}$.

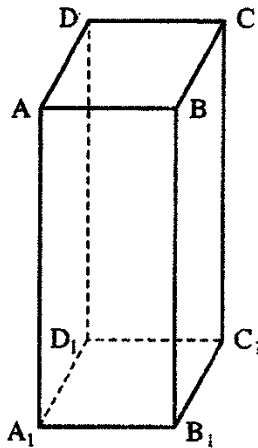


24. בתיבה נתונים הקדקודים:

$B = (0, 2, 3)$, $A = (1, 2, -1)$

$D_1 = (5, -17, 0)$, $C = (-4, 0, 2)$

מצא את שיעורי הקדקודים האחרים.



25. נתון משולש ABC:

$C = (-1, 0, 0)$, $B = (1, 0, 2)$, $A = (-1, 2, 3)$

מסמנים $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$

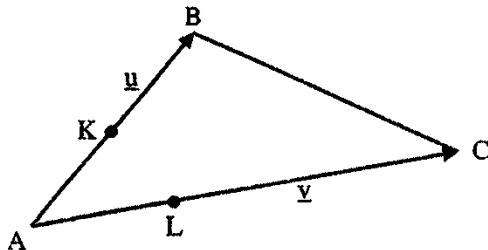
הנקודות K ו L מקיימות

$\vec{AK} = \frac{1}{2} \vec{AB}$, $\vec{AL} = \frac{1}{3} \vec{AC}$

א. תבע את $\vec{KL}$, $\vec{BC}$ ו $\vec{KC}$ בעזרת $\underline{u}$, $\underline{v}$.

ב. מצא את ההצגה האלגברית של הוקטורים $\vec{u}$ ו $\vec{v}$.

ג. מצא את הקואורדינטות של הנקודות K ו L.



26. קדקודי המשולש ABC הם

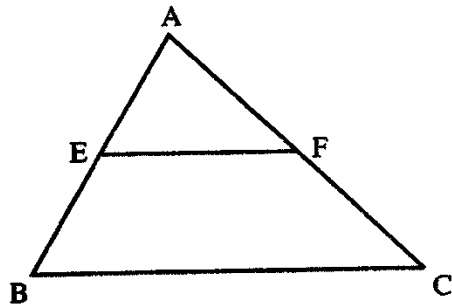
$A = (1, -2)$, $B = (0, 1)$, $C = (-3, 4)$

הנקודה D מקיימת $\vec{AD} = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AC}$

א. מצא את שיעורי הנקודה D.

ב. מצא הצגה אלגברית של הוקטור $\vec{BD}$.

נתון: $C = (1, -1, 3)$, $\vec{EF} = (0, -1, 2)$
מצא את הקואורדינטות של הנקודה B.



31. בטראזר ABCD ממצע המקצוע BC

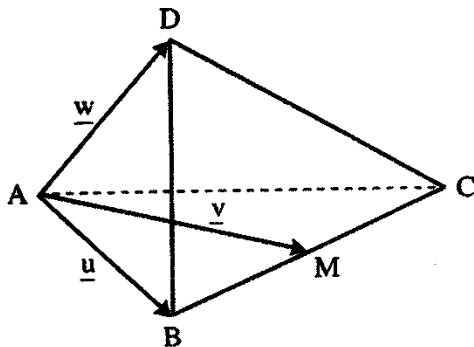
נסמן: $\vec{AD} = \underline{w}$, $\vec{AM} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$

א. חבצ את CD בעזרת חוקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$.

ב. נתון: $\underline{v} = (0, -1, 2)$, $\underline{u} = (-1, 2, 3)$

$\underline{D} = (1, 2, -2)$, $\underline{w} = (1, 0, -1)$

מצא את הקואורדינטות של קדקודי הטראזר.



27. בטראזר ABCD מסמנים

$\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AD} = \underline{w}$

נתון: $\vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{4}\vec{BD}$, $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

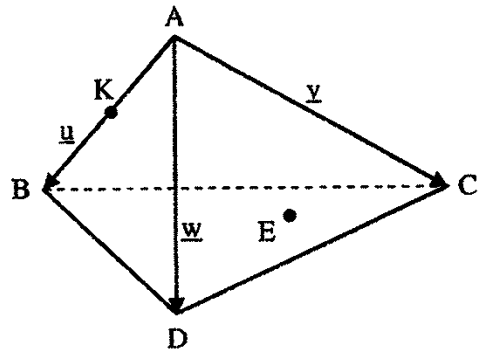
א. חבצ את KE בעזרת חוקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$.

ב. כאשר $B = (-1, 1, 1)$, $A = (0, 1, 0)$

$\underline{D} = (0, -2, 3)$, $C = (-2, 1, 0)$

מצא את החצגה האלגברית של KE, DE.

ג. מצא את הקואורדינטות של הנקודות E ו K.

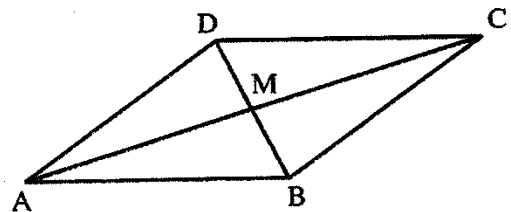


28. תחי M נקודת מפגש האלכסונים במקבילית ABCD.

נתון $B = (-1, 0, 2)$, $A = (2, 1, -3)$

$M = (0, 1, -1)$

מצא את הקואורדינטות של הקדקודים C ו D.



29. בציור של שאלה 28 נסמן: $\vec{MB} = \underline{v}$, $\vec{DC} = \underline{u}$

א. חבצ את $\vec{AD}$ ו $\vec{AC}$ בעזרת $\underline{u}$ ו $\underline{v}$

ב. נתון $A = (0, 0, 0)$

$\underline{v} = (3, -1, 2)$, $\underline{u} = (-1, 2, 0)$

מצא את הקואורדינטות של קדקודי המקבילית.

30. במשולש ABC E ו F אמצעי הצלעות AB ו AC

בהתאמה.

תשובות פרק 3

12. א. $(3, 2, 10)$
 ב. $\left(1\frac{1}{2}, 1, 5\right)$
 ג. $M = (1, 1, 5)$, $B = (3, 2, 10)$

13. א. $\vec{OB} = (2, 4)$ $\vec{AB} = (-3, -1)$
 ב. $C = (-3, 1)$

14. א. $\vec{FC} = 2\vec{AB}$ $\vec{FC} = (2a, 0)$ והמשמעות
 הגיאומטרית: FC מקביל ל AB ושווה לפעמיים
 אורכו.

15. א. $(-3, 3, 5)$ ג. $(2, -1, -2)$

ב. $(3, 1, 5)$ ד. $\left(\frac{1}{5}, 0, 4\right)$

16. א. $\underline{y} = (-4, 1, -2)$
 ב. $B = (8, 3, -1)$
 ג. $A = (1, -6, 2)$
 ד. $\underline{y} = (1, -3, 3)$

17. א. $(3, -1, 2)$ ב. $(4, 5)$ ג. $(8, 4, -1)$

18. א. $\vec{AC} = (-8, -1)$, $C = (-6, 2)$
 ב. $\vec{AC} = (3, -2, 1)$, $D = (-3, -1, 3)$

19. א. $(2t, 3t)$ לכל $t > 1$

20. א. לא ב. כן ג. לא

21. א. $(-17, 0, -6)$ ב. $(2, 6, 62)$ ג. $(-31, 76)$

22. $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

23. א. $C = (5, 0, -9)$, $A_1 = (3, 2, -2)$
 ב. $\vec{AC}_1 = (6, -2, -12)$

1. א. $3\vec{e}_x - \vec{e}_y + 5\vec{e}_z$
 ב. $-2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y$
 ג. $-\vec{e}_x - \vec{e}_y - \vec{e}_z$

2. א. $(2, -3, 5)$ ג. $(3, -4, 7)$
 ב. $(-5, 0, 3)$ ד. $(1-t, -t, 4)$

3. א. $-3\vec{e}_x + 24\vec{e}_y + 6\vec{e}_z = (-3, 24, 6)$

ב. $-5\frac{1}{2}\vec{e}_x + 11\vec{e}_y - 8\vec{e}_z = \left(-5\frac{1}{2}, 11, -8\right)$

ג. $-12\frac{1}{2}\vec{e}_x + \vec{e}_y - 32\vec{e}_z = \left(-12\frac{1}{2}, 1, -32\right)$

ד. $\left(4\frac{1}{2}t - 5\right)\vec{e}_x + (-3t + 7)\vec{e}_y + (10t - 9)\vec{e}_z =$
 $= \left(4\frac{1}{2}t - 5, -3t + 7, 10t - 9\right)$

6. א. $(\cos 60, \sin 60) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
 ב. $\frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y$

7. א. $(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$
 ב. $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (ii) $\left(\frac{-5\sqrt{3}}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$ (i)

8. א. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ב. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

9. א. $(-3, -1, -5)$
 ב. $(11, -5, 5)$
 ג. $(4, -3, 0)$

10. א. $(6, -3, -11)$ ב. $\left(-1, 1\frac{1}{2}, 3\right)$

11. א. $(9, -6, 15)$ ג. $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$
 ב. $(-6, 4, -10)$

$$(1, 1, -1) \quad .30$$

$$\begin{aligned} & \underline{u} - 2\underline{v} + \underline{w} \quad .\kappa \quad .31 \\ ,A &= (0, 2, -1) \quad \neg \\ ,B &= (-1, 4, 2) \\ C &= (1, -2, 0) \end{aligned}$$

$$B_1 = (8, -15, 5) \quad , \quad D = (-3, 0, -2) \quad .\kappa \quad .24$$

$$A_1 = (9, -15, 1) \quad , \quad C_1 = (4, -17, 4)$$

$$\vec{KL} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} \quad .\kappa \quad .25$$

$$\vec{BC} = -\underline{u} + \underline{v}$$

$$\vec{KC} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \underline{v}$$

$$\vec{KL} = \left(-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) \quad \neg$$

$$\vec{BC} = (-2, 0, -2)$$

$$\vec{KC} = \left(-1, -1, -2\frac{1}{2}\right)$$

$$L = \left(-1, 1\frac{1}{3}, 2\right) \quad , \quad K = \left(0, 1, 2\frac{1}{2}\right) \quad \neg$$

$$\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) \quad \neg \quad \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \quad .\kappa \quad .26$$

$$-\frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{4}\underline{w} \quad .\kappa \quad .27$$

$$\vec{KE} = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) \quad \neg$$

$$\vec{DE} = \left(-1\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4}, -2\right)$$

$$K = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \quad , \quad E = \left(-1\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1\right) \quad \neg$$

$$D = (1, 2, -4) \quad C = (-2, 1, 1) \quad .28$$

$$\vec{AD} = \underline{u} - 2\underline{v} \quad , \vec{AC} = 2\underline{u} - 2\underline{v} \quad .\kappa \quad .29$$

$$,B = (-1, 2, 0) \quad \neg$$

$$,C = (-8, 6, -4)$$

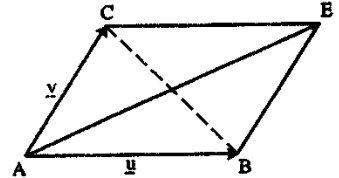
$$D = (-7, 4, -4)$$

4.3 המקבילון ותכונותיו

המקבילית

כאשר $\vec{u} = \vec{AB}$ ו $\vec{v} = \vec{AC}$ שני וקטורים בעלי מוצא משותף שאינם על ישר אחד, סכומם הוא האלכסון

במקבילית ABCD הנוצרת על-ידם, והפרשם $\vec{CB} = \vec{u} - \vec{v}$ הוא האלכסון השני (סעיף 1.2)

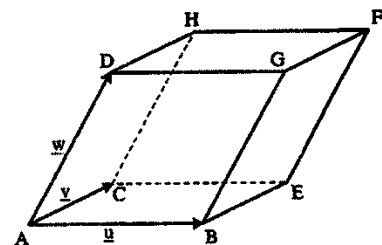


המקבילון

נצא משלושה וקטורים במרחב $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$, $\vec{w} = \vec{AD}$ בעלי מוצא משותף ושאינם במישור אחד. כל זוג וקטורים $\vec{u}, \vec{v}$, $\vec{v}, \vec{w}$, $\vec{u}, \vec{w}$

יוצר מקבילית במישור שהוא קובע. אם $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ שלושה מקצועות של תיבה, כל אחד מחזוגות חללו יוצר מלבן, ומשלימים לתיבה על-ידי חוספת מלבנים בפאות האחרות. בצורה דומה, כאשר הוקטורים אינם יוצרים מלבנים אלא מקביליות, אפשר להשלים את שלוש הפאות חללו לגוף גיאומטרי הנקרא מקבילון.

א. במקבילון זה כל הפאות הן מקביליות, וכל שתי פאות נגדיות הן מקביליות חופפות.



ב. האלכסון AF במקבילון כוקטור הוא:

$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BE} + \vec{EF} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

כי $\vec{BE} = \vec{AC} = \vec{v}$, $\vec{EF} = \vec{AD} = \vec{w}$ AD ו EF קטעים שווים באורכם ומקבילים (ולכן AEFD מקבילית).

ג. נתאר עתה כיצד נוצר המקבילון באופן גיאומטרי. נראה גם כי מתאור זה נובעות תכונות היסוד של המקבילון.

i. במישור של $\vec{u}, \vec{v}$ נבנה את המקבילית ACEB, ונקבל

$$\vec{CE} = \vec{AB} = \vec{u}, \quad \vec{BE} = \vec{AC} = \vec{v}$$

$$\vec{AE} = \vec{u} + \vec{v}$$

ii. במישור של $\vec{u}, \vec{w}$ נבנה את המקבילית ABGD, ונקבל

$$\vec{BG} = \vec{AD} = \vec{w}, \quad \vec{DG} = \vec{AB} = \vec{u}$$

$$\vec{AG} = \vec{u} + \vec{w}$$

iii. במישור של $\vec{v}, \vec{w}$ נבנה את המקבילית ACHD, ונקבל

$$\vec{DH} = \vec{AC} = \vec{v}, \quad \vec{CH} = \vec{AD} = \vec{w}$$

$$\vec{AH} = \vec{v} + \vec{w}$$

iv. נשלים את $\vec{CE}$ ו $\vec{CH}$ למקבילית CEFH. לכן מתקיים

$$\vec{HF} = \vec{CE} = \vec{u}, \quad \vec{EF} = \vec{CH} = \vec{w}$$

יוצא מכאן

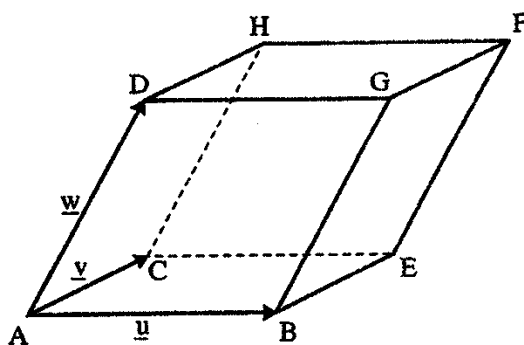
$$\vec{AF} = \vec{AE} + \vec{EF} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

ראינו, כי ארבע הפאות שבנינו בשביל המקבילון ACEB, ABGD, ACHD, CEFH,

הן מקביליות. גם יתר שתי הפאות הן מקביליות: DGFH מקבילית כי $\vec{DG} = \vec{u} = \vec{HF}$ ו $\vec{GF} = \vec{w} = \vec{BD}$ מקבילית כי

תכונות המקבילון

1. שמונה הנקודות A, B, C, D, E, F, G, H הן קדקודי המקבילון.



2. המקבילון הוא גוף מרחבי המוגבל על-ידי שש פאות שכולן מקבילות. במקרה הפרטי שכל המקבילות האלה מלבנים, מתקבלת התיבה הידועה לנו.

3. למקבילון 12 מקצועות AD, DG, GB,... המתחלקות לשלוש קבוצות של מקצועות מקבילים ושווים: $\vec{AB} = \vec{CE} = \vec{DG} = \vec{HF}$, וכו'.

4. שני קדקודים שאינם שייכים לפאה אחת נקראים קדקודים נגדיים. כנגד כל קדקוד של המקבילון ישנו בדיוק קדקוד נגדי אחד.

5. קטע המחבר שני קדקודים נגדיים נקרא אלכסון של המקבילון.

למקבילון ארבעה אלכסונים המחברים את ארבעת הזוגות של קדקודים נגדיים:

$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$$

$$\vec{BH} = \vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CH} = -\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$$

$$\vec{CG} = \vec{CA} + \vec{AB} + \vec{BG} = -\underline{v} + \underline{u} + \underline{w}$$

$$\vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AB} + \vec{BE} = -\underline{w} + \underline{u} + \underline{v}$$

6. פאות ללא נקודה משותפת נקראות פאות נגדיות. מישורי פאות נגדיות הם מקבילים. האלכסונים בפאות נגדיות מקבילים בזוגות ושווים; כלומר, $\vec{AE} = \vec{DF} = \underline{u} + \underline{v}$, וכו'.

7. לכן האלכסונים בפאות נגדיות יוצרים מקבילות. לדוגמה, ADFE, EGDC, הן מקבילות.

8. ארבעת האלכסונים במקבילון נפגשים בנקודה אחת החוצה כל אלכסון.

הוכחת הטענות דלעיל נובעת מפקח ג'.

דוגמה: אלכסוני המקבילון נפגשים בנקודה אחת החוצה כל אלכסון.

הוכחה: נביא לחלק שתי הוכחות לתכונה זו.

i. הוכחה בוקטורים:

יהי M אמצע האלכסון AF.

$$\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AF} = \frac{1}{2} (\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})$$

$$\vec{BM}_1 = \frac{1}{2} \vec{BH} \quad \text{יהי } M_1 \text{ אמצע } BH \text{ כלומר,}$$

$$\vec{AM}_1 = \vec{AB} + \vec{BM}_1 = \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BH} =$$

$$= \vec{AB} + \frac{1}{2} (\vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CH}) =$$

$$= \underline{u} + \frac{1}{2} (-\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}) =$$

$$= \frac{1}{2} (\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}) = \vec{AM}$$

קיבלנו שני וקטורים שווים שיש להם אותו מוצא ולכן גם אותו סוף, דהיינו $M = M_1$. נשאר לקרוא כתרגיל לחוכיה בצורה דומה לגבי האלכסונים האחרים. (ראה סעיף 4.5 תרגיל 28).

ii. הוכחה גיאומטרית:

DHEB מקבילית, לכן אלכסוניה DE ו HB (שהם גם שניים מארבעת אלכסוני המקבילון) נחצים בנקודה M. גם DFEA היא מקבילית שאחד מאלכסוניה DE, ואלכסון אחר בה הוא AF; לכן אלה נחצים בנקודה M. בצורה דומה מראים כי גם האלכסון הרביעי CG נחצה באותה נקודה M.

תרגיל: במקבילון ABECDFGH דלעיל נתון:

$$A = (1, 2, 0), \quad B = (-1, 0, 2)$$

$$C = (1, -1, 1), \quad F = (0, -2, 0)$$

מצא את הקדקודים הנותרים ואת נקודת מפגש האלכסונים.

התרה: נמצא למשל את D:

$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$$

נסמן $D = (d_1, d_2, d_3)$, ונעבור לחצגה אלגברית:

$$(-1, -4, 0) = (-2, -2, 2) + (0, -3, 1) +$$

$$+ (d_1 - 1, d_2 - 2, d_3)$$

בחישוב פשוט מקבלים מכאן $D = (2, 3, -3)$

הקורא יסיים בעצמו את התרת התרגיל.

4.4 שימושים לחשבון וקטורים במרחב

בעיה א: במקבילון שבציור מסמנים:

$$\vec{HN} = s\vec{HF}, \quad \vec{AM} = t\vec{AB}$$

$$\vec{u} = \vec{AB}, \quad \vec{v} = \vec{AC}, \quad \vec{w} = \vec{AD}$$

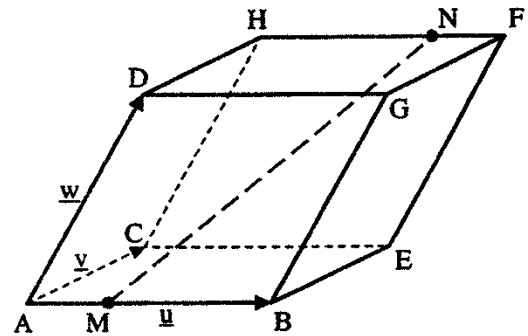
בטא את חוקטור $\vec{MN}$ בעזרת $\vec{u}$, $\vec{v}$ ו $\vec{w}$.

התרה: כותבים $\vec{MN} = \vec{x}$ מתוך:

$$\vec{AM} + \vec{MN} + \vec{NH} + \vec{HC} + \vec{CA} = \vec{0}$$

$$t\vec{u} + \vec{x} - s\vec{u} - \vec{w} - \vec{v} = \vec{0} \quad \text{מקבלים:}$$

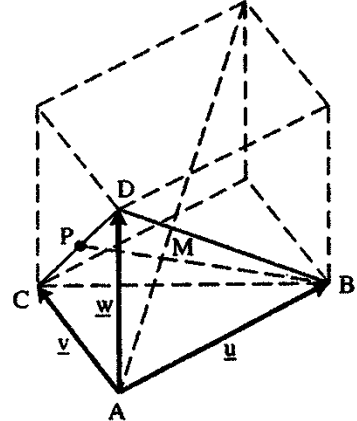
$$\vec{x} = s\vec{u} + \vec{w} + \vec{v} - t\vec{u} \quad \text{ולכן:}$$



כאשר $s = t$, מקבלים $\vec{x} = \vec{v} + \vec{w} = \vec{AH}$ ובמקרה זה $\vec{AH} \parallel \vec{MN}$ ושווה לו.

בעיה ב: בפירמידה המשולשת (טטראדר) ABCD מחברים את הקדקוד A אל מרכז הכובד M (נקודת מפגש התיכונים) של המשולש CDB. חשב את $\vec{AM}$ מתוך

$$\vec{u} = \vec{AB}, \quad \vec{v} = \vec{AC}, \quad \vec{w} = \vec{AD}$$



התרה: יהי BP תיכון במשולש CDB. אזי

$$\vec{BM} = \frac{2}{3}\vec{BP}$$

בסעיפים קודמים ראינו (למשל אי של סעיף 4.2), כי

$$\vec{BP} = \frac{1}{2}(\vec{BD} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}[(\vec{w} - \vec{u}) + (\vec{v} - \vec{u})] =$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{w} + \vec{v}) - \vec{u}$$

לכן:

$$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BP} =$$

$$= \vec{u} + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(\vec{w} + \vec{v}) - \vec{u}\right] = \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$$

בסעיף הקודם הוכחנו, כי $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ הוא אלכסון במקבילון הנוצר על-ידי חוקטורים $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ שמצואם בנקודה A. יוצא, כי מרכז הכובד M של המשולש BCD נמצא על אלכסון המקבילון הנוצר על-ידי שלוש הצלעות AB, AC ו AD, ונמצא בשליש אורכו. במלים אחרות הוכחנו:

משפט: אלכסון של מקבילון חותך את המשולש הנוצר על-ידי שלוש הקדקודים חסמוכים לקדקוד האלכסון במרכז הכובד של המשולש, ומרכז הכובד מחלק את האלכסון ביחס 1 : 2.

הערה: למעשה השלמנו כאן את חטראדר ABCD למקבילון (ראה גם סעיף 4.2 ח').

תרגילים לסעיף 4.3

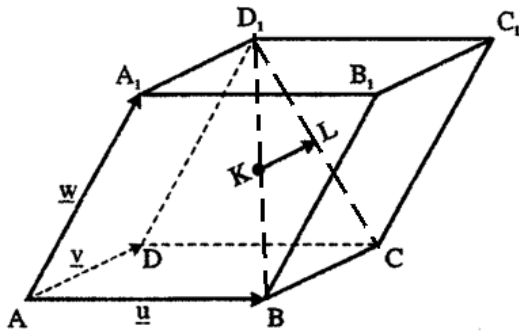
נראה בסעיף 4.3 תכונות המקבילון: "האלכסונים במקבילון נפגשים בנקודה אחת החוצה כל אלכסון".
נראה גם תכונה שמופיעה שם.

29. במקבילון שבציור מסמנים:

$$\vec{AA_1} = \vec{w}, \quad \vec{AD} = \vec{v}, \quad \vec{AB} = \vec{u}$$

K מפגש אלכסוני המקבילון, L מפגש אלכסוני הפאה DD_1C_1C .

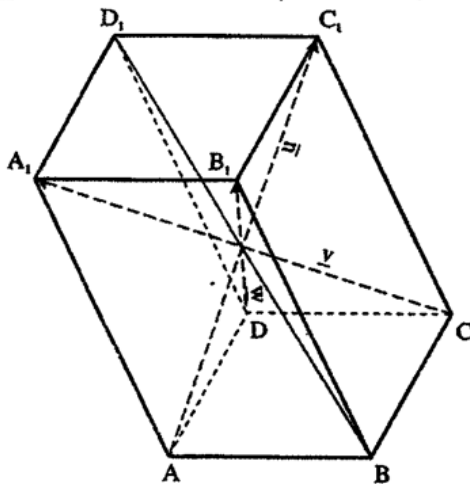
- חצג את חוקטור $\vec{KL}$ בעזרת $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
- איזו תכונה גיאומטרית יש לחוקטור $\vec{KL}$.



30. במקבילון שבציור נסמן את וקטורי אלכסוני:

$$\vec{u} = \vec{AC_1}, \quad \vec{v} = \vec{CA_1}, \quad \vec{w} = \vec{DB_1}$$

חבצ את וקטור האלכסון הרביעי $\vec{BD_1}$ בעזרת $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

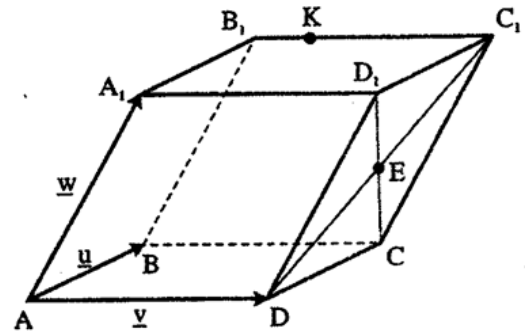


27. במקבילון שבציור נתון:

$$\vec{AB} = \vec{u} = (1, 0, -1)$$

$$\vec{AD} = \vec{v} = (-2, 1, 0)$$

$$\vec{AA_1} = \vec{w} = (4, -1, 1)$$



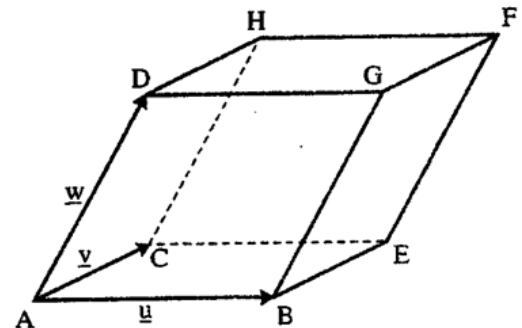
E מפגש אלכסוני הפאה DCC_1D_1 ו K מחלקת את B_1C_1 ביחס 1:4.

מצא את החצגות האלגבריות לחוקטורים:

- $\vec{A_1E}$
- $\vec{BK}$
- $\vec{KD}$
- $\vec{EK}$

28. במקבילון שבציור מסמנים:

$$\vec{AB} = \vec{u}, \quad \vec{AC} = \vec{v}, \quad \vec{AD} = \vec{w}$$



יהי M אמצע האלכסון AF. נסמן ב M' את אמצע האלכסון CG וב M'' את אמצע האמצע האלכסון DE.

חוכה כי $M = M' = M''$.

רמז: הראה כי $\vec{AM} = \vec{AM'} = \vec{AM''}$

תשובות לפרק 4.3

27. א. $\left(-3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, -1\right)$ ב. $(3.6, -0.8, 1)$

ג. $(-6.6, 1.8, 0)$ ד. $(4.1, -1.3, 0)$

29. א. $\vec{KL} = \frac{1}{2}\vec{y}$

ב. KL מקביל ל AD ושווה למחצית אורכו.

30. $\underline{u} + \underline{v} - \underline{w}$

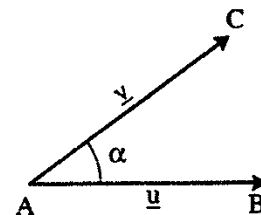
5. המכפלה הסקלרית

5.1 זווית בין וקטורים

בפרקים הקודמים לא חשונו אורכים של וקטורים, פרט מאשר לאלה הנמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים, ולא התייחסנו לזווית בין ישרים המכילים וקטורים. בפרק זה נטפל במושגים האלה, ולשם כך נכניס מכשיר חדש לחשבון וקטורים – את המכפלה הסקלרית.

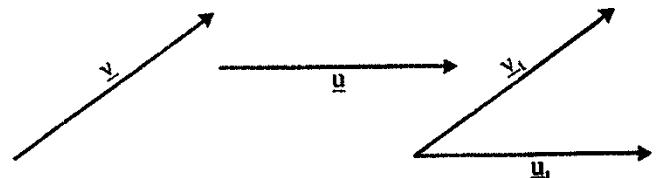
תחילה נכליל את מושג הזווית בין קרניים לזווית בין וקטורים שונים מאפס שמוצאם באותה נקודה.

יהיו $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$ שני וקטורים שונים מאפס, בעלי מוצא משותף A. הקרניים AB, AC יוצרות זווית. לגודל הזווית הזאת נקרא הזווית בין הווקטורים $\vec{u}$ ו $\vec{v}$, ונסמן אותה $\angle(\vec{u}, \vec{v})$. הזווית תימדדנה ברדיאנים במספרים ממשיים α , $0 \leq \alpha \leq \pi$, או במעלות במספרים ממשיים $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$. כאשר $\vec{u}$ ו $\vec{v}$ על אותו ישר ובאותו כיוון (הקרניים AB ו AC מתלכדות), מקבלים $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. כאשר $\vec{u}$ ו $\vec{v}$ על אותו ישר אך כיוונם מנוגד, מקבלים $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$ או $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$.



אם לוקטורים אין אותה נקודת מוצא נוכל להעתיק אחד מהם או את שניהם לאותו מוצא. הזווית בין שני וקטורים כלשהם שונים מאפס מוגדרת כזווית בין אותם וקטורים שהועתקו למוצא משותף.

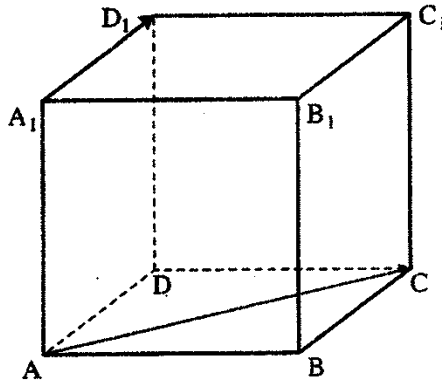
בציור: $\vec{v} = \vec{v}_1$, $\vec{u} = \vec{u}_1$



$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \angle(\vec{u}_1, \vec{v}_1)$$

דוגמה: בקובייה שבציור:

$$\angle(\vec{A_1D_1}, \vec{AC}) = \angle(\vec{AD}, \vec{AC}) = 45^\circ$$



כאשר הזווית α בין $\vec{u}$, $\vec{v}$ ישרה כלומר $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($\alpha = 90^\circ$) נאמר כי הווקטור $\vec{v}$ ניצב על $\vec{u}$ ונסמן $\vec{u} \perp \vec{v}$ או $\vec{v} \perp \vec{u}$.

בקובייה שבדוגמה לעיל $\vec{A_1D_1} \perp \vec{AB}$.

הערה: הזווית בין וקטורים $\vec{u}$, $\vec{v}$ אינה תלויה במיצגי הווקטורים $\vec{u}$, $\vec{v}$ ובבחירת נקודת המוצא המשותפת. כלומר, גם אם נשנה את נקודת המוצא הזווית בין הווקטורים לא תשתנה. אפשר להוכיח זאת בחסתמך על משפטי יסוד של هندסת המרחב.

(חקורא יכול להוכיח זאת במישור) אנו נקבל את הטענה ללא הוכחה.

5.2 המכפלה הסקלרית

ברצוננו ליחס לכל שני וקטורים $\vec{u}$ ו $\vec{v}$ בעלי מוצא משותף מספר חתלוי באורכי הווקטורים ובזווית ביניהם. נסמן ב $|\vec{u}|$ את אורך הווקטור $\vec{u}$, ונגדיר:

הגדרה: יהיו $\vec{u}$, $\vec{v}$ שני וקטורים בעלי מוצא משותף, ותהי $\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ הזווית ביניהם. מתאימים ל $\vec{u}$, $\vec{v}$ מספר שיסומן $\vec{u} \cdot \vec{v}$ כדלקמן:

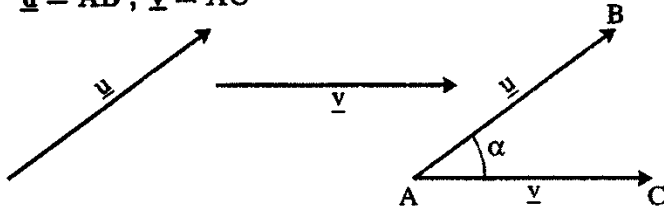
1. אם $\vec{u} = \vec{0}$ או $\vec{v} = \vec{0}$ יוגדר $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

המכפלה הסקלרית של וקטורים שאין להם מוצא משותף

בסעיף 5.1 הכללנו את מושג הזווית בין שני וקטורים גם כאשר לוקטורים אין אותו מוצא. הכללה זו מאפשרת להגדיר את המכפלה הסקלרית לכל שני וקטורים. יהיו $\underline{u}$ וקטורים במישור או במרחב, לאו דווקא בעלי מוצא משותף.

מעתיקים אותם לוקטורים בעלי מוצא משותף:

$$\underline{u} = \vec{AB}, \quad \underline{v} = \vec{AC}$$



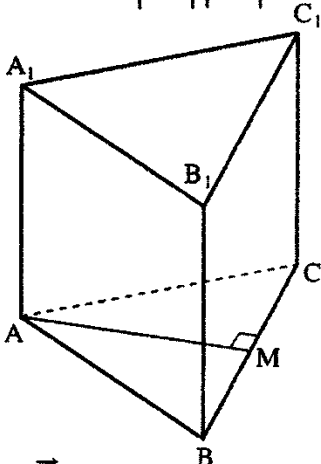
הגדרה: המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$ מוגדרת כמכפלה הסקלרית $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, כלומר

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

דוגמה:

א. במנסרה המשולשת בציור הבסיסים הם משולשים שווים צלעות. אורך כל צלע 2.

$$\vec{A_1C_1} \cdot \vec{AB} = \vec{AC} \cdot \vec{AB} = |\vec{AC}| |\vec{AB}| \cos 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$



ב. אם M אמצע הצלע BC אז $\vec{B_1C_1} \perp \vec{MA}$ (מדוע?) ולכן $\vec{B_1C_1} \cdot \vec{MA} = 0$

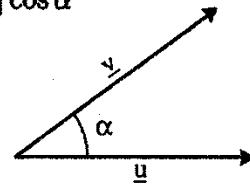
הערות

(i) אין לבלבל בין סימן הכפל במכפלה סקלרית בווקטורים, לסימן הכפל במכפלת מספרים.

למרות ש $\underline{u} \cdot \underline{v}$ הוא מספר (סקלר) בדרך כלל $\underline{u} \cdot \underline{v} \neq |\underline{u}| \cdot |\underline{v}|$ לדוגמה אם $\underline{u}$ ו $\underline{v}$ וקטורים

2. אם שני וקטורים שונים מ $\underline{0}$, נגדיר

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| |\underline{v}| \cos \alpha$$



למספר $\underline{u} \cdot \underline{v}$ קוראים המכפלה הסקלרית של $\underline{u}$ ו $\underline{v}$. קוראים לזה מכפלה, כי יש לזה תכונות דומות לתכונות חכפל (ראה לחלק 5.2.1)

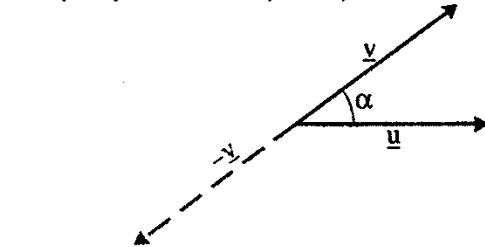
לחלק כמה תכונות של המכפלה הסקלרית הנובעות מייד מן החגדרה

א. כאשר הזווית α בין $\underline{u}$ ו $\underline{v}$ ישרה, כלומר $\underline{u} \perp \underline{v}$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| |\underline{v}| \cos \alpha = 0$ לחיפך, אם $\underline{u}$ ו $\underline{v}$ וקטורים שונים מאפס והמכפלה $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, מתקבל $\cos \alpha = 0$, כלומר $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ווקטורים ניצבים זה על זה. מטעמי נוחות מסכימים, כי וקטור האפס ייחשב ניצב לכל וקטור. $\underline{v} \perp \underline{0}$ למרות שהזווית בין $\underline{v}$ ו $\underline{0}$ אינה מוגדרת. חסכם זה מאפשר לנו לסכם: $\underline{u} \perp \underline{v}$ אם ורק אם $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$

ב. במקרה הפרטי כאשר $\underline{u} = \underline{v}$, מתקבל $\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2$, ולכן $\sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}}$ הוא אורך וקטור $\underline{u}$.

ג. כיוון ש $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, אין חשיבות למגמה שבוחרים בשביל הזווית α^1 . לכן גם $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$ כלומר המכפלה הסקלרית קומוטטיבית.

ד. מתקיים $\underline{u} \cdot (-\underline{v}) = -(\underline{u} \cdot \underline{v}) = (-\underline{u}) \cdot \underline{v}$ ואומנם $\angle(\underline{u}, \underline{v}) = \alpha \Rightarrow \angle(\underline{u}, -\underline{v}) = 180^\circ - \alpha$



חיות ומתקיים $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ מקבלים: $\underline{u} \cdot (-\underline{v}) = |\underline{u}| \cdot |-\underline{v}| \cos(180^\circ - \alpha) = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| (-\cos \alpha) = -(\underline{u} \cdot \underline{v})$

המונח "מכפלה" מותאים גם הוא, היות שמתקיימים כמה חוקים הדומים לחוקי הכפל במספרים.

משפט: המכפלה הסקלרית מקיימת את החוקים האלה:

א. $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$ (קומוטטיביות);

ב. $\underline{u} \cdot t\underline{v} = t(\underline{u} \cdot \underline{v})$ (הומוגניות);

ג. $\begin{cases} \underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w} \\ (\underline{v} + \underline{w}) \cdot \underline{u} = \underline{v} \cdot \underline{u} + \underline{w} \cdot \underline{u} \end{cases}$ (דיסטריבוטיביות)

הוכחת המשפט תובא בסעיף הבא (5.2.2). בסעיף זה נבא דוגמאות לשימושים של כללי המכפלה הסקלרית כפי שצוטטו במשפט.

1. תבניות בוקטורים

כתוצאה מחדמיון בין חוקי המכפלה הסקלרית לחוקי הכפל במספרים, מקבלים גם דמיון בפעולות חישוב לדוגמה:

א. $(\underline{u} + \underline{v})^2 = (\underline{u} + \underline{v})(\underline{u} + \underline{v}) =$

$= (\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{u} + (\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{v} =$

$= \underline{u} \cdot \underline{u} + \underline{v} \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{v} =$

$= \underline{u}^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v}^2$

נמק כל שלב בהסתמך על המשפט שצוטט לעיל.

ב. בצורה דומה מוכיחים:

$(\underline{u} - \underline{v})^2 = \underline{u}^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v}^2$

ג. $(\underline{u} + \underline{v})(\underline{u} - \underline{v}) = \underline{u} \cdot (\underline{u} - \underline{v}) + \underline{v} \cdot (\underline{u} - \underline{v}) =$

$= \underline{u}^2 - \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{u} - \underline{v}^2$

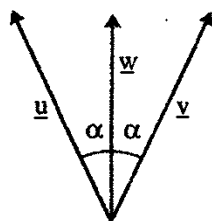
$(\underline{u} + \underline{v})(\underline{u} - \underline{v}) = \underline{u}^2 - \underline{v}^2$ ולכן:

הערה: למרות הדמיון בין חוקי המכפלה הסקלרית לחוקי הכפל במספרים קיימים גם הבדלים.

למשל, כלל הצמצום בכפל מספרים אינו קיים במכפלה סקלרית.

בציר, $\angle(\underline{u}, \underline{w}) = \angle(\underline{v}, \underline{w}) = \alpha$, $|\underline{u}| = |\underline{v}|$, ולכן, $\underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w}$ (נמק!)

אולם הוקטורים $\underline{u}$ ו $\underline{v}$ שונים (ראה ציור).



שונים מ $\underline{0}$ ניצבים זה לזה $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ לעומת זאת $|\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \neq 0$. בתחילת הסעיף ראינו כי אם $\underline{u} = \underline{v}$ מתקיים $\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}| \cdot |\underline{u}| \dots (*)$

למרות השוויון בתוצאה, מדובר בשתי פעולות כפל שונות.

כדי להדגיש את השוני בפעולות מסמנים לפעמים את המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$ בצורה $(\underline{u}, \underline{v})$.

חקורא יוכל לחבחין מייד אם סימן הכפל "מתניח"

למכפלת מספרים $a \cdot b$, מכפלה סקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$, או

כפל וקטור בסקלר $t \cdot \underline{u}$, ואין חשש לבלבול.

שאלה: בביטוי $(\underline{u} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{w}$, מה מבטא כל אחד מסמני הכפל?

כמו בתבניות מספריות מסמנים גם בוקטורים $\underline{u} \cdot \underline{u} = \underline{u}^2$ ולכן את השוויון (*) לעיל נוכל לרשום $\underline{u}^2 = |\underline{u}|^2$ הקורא מתבקש לשים לב כי $\sqrt{\underline{u}^2}$ הוא אורך הוקטור $\underline{u}$ ולא הוקטור $\underline{u}$ עצמו. ולכן

$\sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} = \sqrt{\underline{u}^2} = \sqrt{|\underline{u}|^2} = |\underline{u}|$

(ii) בסעיף הקודם ציינו כי הזווית בין שני וקטורים אינה תלויה בבחירת נקודת המוצא. העתקת וקטור בודאי אינה משנה את אורכו. ולכן המכפלה הסקלרית של וקטורים איננה תלויה במיצגי הוקטורים ובבחירת המוצא המשותף.

תכונות המכפלה הסקלרית כפי שנתקבלו עד כה נכונות גם אם לוקטורים אין אותו מוצא. נסכם תכונות אלה:

א. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ כאשר ורק כאשר $\underline{u} \perp \underline{v}$ (זה כולל את המקרה שאחד הוקטורים הוא אפס).

ב. $\sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} = |\underline{u}|$ הוא אורך הוקטור $\underline{u}$, כלומר

$\sqrt{\underline{u}^2} = |\underline{u}|$

ג. $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$

ד. $\underline{u} \cdot (-\underline{v}) = -\underline{u} \cdot \underline{v}$

5.2.1 תכונות נוספות

המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$ (שאותה מסמנים לפעמים גם $\underline{u}, \underline{v}$ בלי נקודת הכפל) היא פונקציה המתאימה לכל זוג וקטורים מספר ממשי. השם "מכפלה סקלרית" ניתן לפונקציה זאת משום שאפשר לראות בה מכפלה של $\underline{u}$ ב $\underline{v}$, אך התוצאה איננה וקטור, כי אם מספר ממשי, כלומר סקלר.

2. זוויות בין וקטורים

א. נתון $\underline{u} - \underline{v}$ ניצב ל $\underline{u} + 2\underline{v}$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = 3$.
מצא את הזווית בין $\underline{u}$ ו $\underline{v}$.
פתרון: נסמן $\alpha = \angle(\underline{u}, \underline{v})$. מחזורית המכפלה הסקלרית מתקבל:
 $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$

$|\underline{u}|$, $|\underline{v}|$ נתונים. נחשב את $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

$$\begin{aligned} 0 &= (\underline{u} - \underline{v}) \cdot (\underline{u} + 2\underline{v}) = \\ &= \underline{u}^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} - \underline{v} \cdot \underline{u} - 2\underline{v}^2 = \\ &= \underline{u}^2 + \underline{u} \cdot \underline{v} - 2\underline{v}^2 \\ \underline{u} \cdot \underline{v} &= 2\underline{v}^2 - \underline{u}^2 = 2|\underline{v}|^2 - |\underline{u}|^2 = \\ &= 2 \cdot 4 - 9 = -1 \end{aligned}$$

הסתמכנו על הכלל: $\underline{u}^2 = |\underline{u}|^2$. מכאן:

$$\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|} = \frac{-1}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{6}$$

וחתשובה: $\alpha = 99.6^\circ$

ב. נתון: $|\underline{v}| = \frac{1}{2}$, $|\underline{u}| = \sqrt{3}$, $\underline{u} \perp \underline{v}$

חשב את הזווית בין $\underline{u}$ ו $\underline{u} - 2\underline{v}$.

פתרון: נסמן את הזווית המבוקשת ב α

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\underline{u} \cdot (\underline{u} - 2\underline{v})}{|\underline{u}| |\underline{u} - 2\underline{v}|} = \\ &= \frac{\underline{u}^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \sqrt{(\underline{u} - 2\underline{v})^2}} = \frac{\underline{u}^2 - 0}{|\underline{u}| \sqrt{(\underline{u} - 2\underline{v})^2}} = \\ &= \frac{|\underline{u}|^2}{|\underline{u}| \sqrt{(\underline{u} - 2\underline{v})^2}} = \\ &= \frac{|\underline{u}|}{\sqrt{\underline{u}^2 - 4\underline{u} \cdot \underline{v} + 4\underline{v}^2}} = \frac{|\underline{u}|}{\sqrt{\underline{u}^2 + 4\underline{v}^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 + 4 \cdot \frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

ולכן $\alpha = 30^\circ$

הסתמכנו על הכלל:

$$\frac{\underline{u}^2}{|\underline{u}|} = |\underline{u}|$$

$$\frac{\underline{u}^2}{|\underline{u}|} = \frac{|\underline{u}|^2}{|\underline{u}|} = |\underline{u}| \quad \text{ואומנם:}$$

ג. נתון $|\underline{v}| = 1$, $|\underline{u}| = 2$, $\angle(\underline{u}, \underline{v}) = 60^\circ$.
בשביל איזה ערך של t אורך הוקטור $t\underline{u} - \underline{v}$ יהיה מינימלי. מצא את אורכו במקרה זה.

$$\begin{aligned} |t\underline{u} - \underline{v}| &= \sqrt{(t\underline{u} - \underline{v})^2} = \quad \text{פתרון:} \\ &= \sqrt{t^2 \underline{u}^2 - 2t(\underline{u} \cdot \underline{v}) + \underline{v}^2} = \\ &= \sqrt{4t^2 - 2t \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 60 + 1} = \\ &= \sqrt{4t^2 - 2t + 1} \end{aligned}$$

התבנית $4t^2 - 2t + 1$ תקבל ערך מינימלי כאשר $t = \frac{1}{4}$ (מדוע?) ולכן בשביל $t = \frac{1}{4}$ יהיה מינימלי. האורך במקרה זה:

$$|t\underline{u} - \underline{v}| = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{16} - 2 \cdot \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

שאלה: אם ל $\underline{u}$, $\underline{v}$ אותו מוצא, מחי המשמעות הגיאומטרית של האורך שמצאנו

3. חישוב המכפלה הסקלרית באמצעות אורכים בלבד.

ראינו כי לכל שני וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ מתקיים:

$$(\underline{u} - \underline{v})^2 = \underline{u}^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v}^2$$

נחליף את $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ונקבל:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \frac{1}{2} (\underline{u}^2 + \underline{v}^2 - (\underline{u} - \underline{v})^2)$$

מנטסח זה רואים כי המכפלה הסקלרית תלויה אך ורק באורכי הוקטורים ובאורך הפרשם.

תרגיל: נתון $|\underline{u}| = 3$, $|\underline{v}| = 5$, $|\underline{u} - \underline{v}| = 7$.
חשב את הזווית בין הוקטורים $\underline{u}$ ו $\underline{v}$.

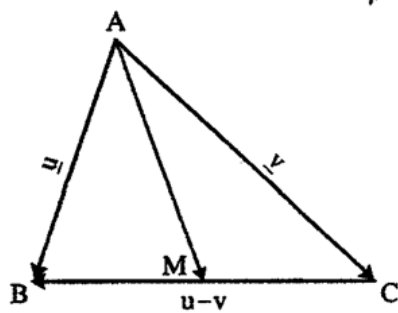
אם $\vec{u} \perp \vec{v}$, אזי $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. כלומר

$$|\vec{CB}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$$

וכך נתקבל משפט פיתגורס

2. אורך התיכון במשולש

בעיה: במשולש ABC יהי AM התיכון דרך A. בטא את האורך של AM בעזרת הצלעות AB, AC והזווית ביניהן.



התרה: יהיו $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$

$$\begin{aligned} \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} (\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2)}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} (3^2 + 5^2 - 7^2)}{3 \cdot 5} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

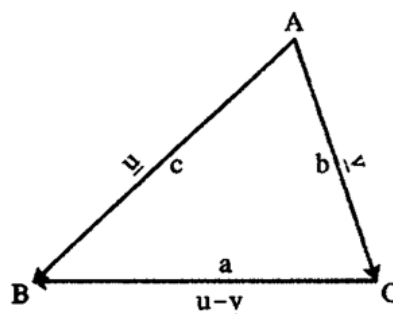
ולכן $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 120^\circ$

5.3 שימושים גיאומטריים למכפלה הסקלרית

במכפלה הסקלרית נוכל להשתמש כמכשיר לחישובים (אורכים, זוויות) לחיכוחת משפטים ובטריגונומטריה. בסעיף זה נביא כמה דוגמאות לכך.

1.

בעיה: בטא במשולש ABC את אורך הצלע CB עלידי הצלעות AC, AB והזווית ביניהן $\alpha = \angle BAC$



התרה: נסמן $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$, לכן $\vec{CB} = \vec{u} - \vec{v}$

$$|\vec{CB}|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

ובצורה מפורשת: $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha$

כאשר

$$|\vec{AB}| = |\vec{u}| = c \quad |\vec{AC}| = |\vec{v}| = b \quad |\vec{CB}| = a$$

מפרקים קודמים (ראה 4.2) ידוע כי

$$\vec{m} = \vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$$

לכן:

$$\begin{aligned} |\vec{m}|^2 &= \left[\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) \right]^2 = \frac{1}{4}(\vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}) = \\ &= \frac{1}{4} \left(|\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2 + 2|\vec{AB}||\vec{AC}|\cos\alpha \right) \end{aligned}$$

3. חישוב אורך אלכסון בתיבה, והזווית בין האלכסון ומקצועות

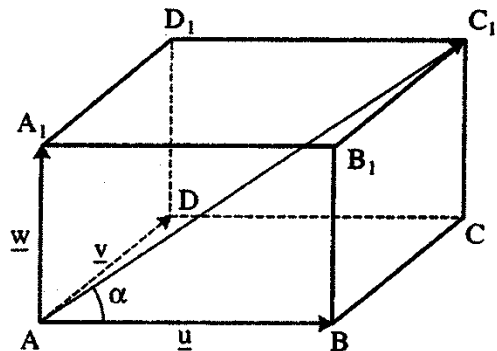
בעיה: בתיבה שמקצועותיה a, b, c יחי האלכסון AC_1 .
א. חשב את אורך האלכסון.

ב. חשב את הזווית בין אלכסון התיבה ומקצועות.

התרה: נסמן את וקטורי המקצועות:

$$\vec{AA_1} = \vec{w}, \vec{AD} = \vec{v}, \vec{AB} = \vec{u}$$

אורכם: c, b, a בהתאמה.



$$\vec{AC_1} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} \quad \text{א.}$$

ולכן

$$\begin{aligned} |\vec{AC_1}|^2 &= (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})^2 = \\ &= \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + \vec{w}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{w} + 2\vec{v} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

אבל $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ניצבים זה לזה ולכן:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

$$|\vec{AC_1}|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + \vec{w}^2 \quad \text{לפיכך:}$$

מכאן אורך האלכסון בתיבה.

$$|\vec{AC_1}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

זהו משפט פיתגורס במרחב.

$$\alpha = \angle(\vec{AC_1}, \vec{u}) \quad \text{ב. נסמן}$$

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\vec{AC_1} \cdot \vec{u}}{|\vec{AC_1}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u}}{|\vec{AC_1}| \cdot |\vec{u}|} = \\ &= \frac{\vec{u}^2 + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}}{|\vec{AC_1}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{\vec{u}^2 + 0 + 0}{|\vec{AC_1}| \cdot |\vec{u}|} \end{aligned}$$

מכאן:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{AC_1}|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

השתמשנו בנוסחת אורך האלכסון מסעיף א.

4. בעיות במישור ובמרחב.

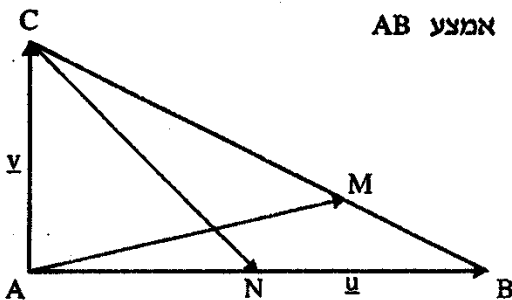
i בעיה: במשולש ישר זווית ABC ($\angle A = 90^\circ$)

$$\vec{AC} = \vec{v}, \vec{AB} = \vec{u}$$

$$\text{נתון: } |\vec{v}| = 1, |\vec{u}| = 2$$

M מחלקת את CB ביחס 2:1

N אמצע AB



א. חבצ את $\vec{AM}$ ו $\vec{CN}$ בעזרת $\vec{u}, \vec{v}$.

ב. חשב את הזווית α בין הוקטורים $\vec{AM}$ ו $\vec{AB}$.

ג. חשב את הזווית β בין הוקטורים $\vec{AM}$ ו $\vec{CN}$.

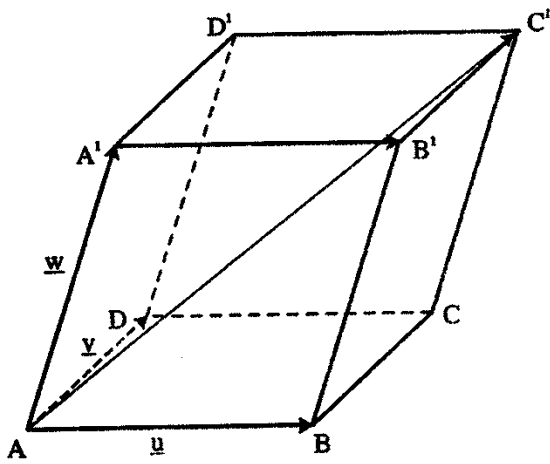
התרה

$$\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} \quad \text{א. (ראה סעיף 4.2)}$$

$$\vec{CN} = \vec{CA} + \vec{AN} = -\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AM} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AM}| \cdot |\vec{AB}|} =$$

$$= \frac{(\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}) \cdot \vec{u}}{|\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{\frac{2}{3}\vec{u}^2 + \frac{1}{3}\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}| \cdot |\vec{u}|}$$



- א. מצא את הזווית בין וקטור האלכסון $\vec{AC'}$ ווקטור המקצוע $\vec{AB}$.
 ב. חוכח כי וקטור האלכסון $\vec{AC'}$ ניצב לווקטור אלכסון תבסיס $\vec{BD}$.

התורה
א. נסמן

$$\alpha = \angle(\vec{AC'}, \vec{AB})$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AC'} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AC'}| |\vec{AB}|} = \frac{(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| |\vec{u}|}$$

נחשב בנפרד את $|\vec{AC'}|$

$$|\vec{AC'}| = |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})^2} = \sqrt{\vec{u}^2 + \vec{v}^2 + \vec{w}^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{w})}$$

$$\vec{u}^2 = \vec{v}^2 = \vec{w}^2 = 1 \quad \text{מהנתון}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60 = \frac{1}{2}$$

ולכן:

$$(*) \quad |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{3 + 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)} = \sqrt{6}$$

מהנתון $\vec{u} \perp \vec{v}$ ולכן $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ כמו כן $\frac{\vec{u}^2}{|\vec{u}|} = |\vec{u}|$ ולכן

$$\cos \alpha = \frac{\frac{2}{3} |\vec{u}|}{\left| \frac{2}{3} \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{v} \right|}$$

נחשב את המכנה (האורך של $\vec{AM}$)

$$|\vec{AM}| = \left| \frac{2}{3} \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{v} \right| = \sqrt{\left(\frac{2}{3} \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{v} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9} \vec{u}^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \vec{u} \cdot \vec{v} + \frac{1}{9} \vec{v}^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9} \cdot 4 + 0 + \frac{1}{9} \cdot 1} = \frac{\sqrt{17}}{3}$$

ומכאן

$$\cos \alpha = \frac{\frac{2}{3} \cdot 2}{\frac{\sqrt{17}}{3}} = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \alpha = 14.04^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{AM} \cdot \vec{CN}}{|\vec{AM}| |\vec{CN}|} = \frac{\left(\frac{2}{3} \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{v} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{u} - \vec{v} \right)}{\left| \frac{2}{3} \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{v} \right| \left| \frac{1}{2} \vec{u} - \vec{v} \right|}$$

בהסתמך על כללי המכפלה הסקלרית ונתון $\vec{u} \perp \vec{v}$:
 חראח כי:

$$\cos \beta = \frac{\frac{1}{3} \vec{u}^2 - \frac{1}{3} \vec{v}^2}{\sqrt{\frac{4}{9} \vec{u}^2 + \frac{1}{9} \vec{v}^2} \sqrt{\frac{1}{4} \vec{u}^2 + \vec{v}^2}} =$$

$$= \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{16}{9} + \frac{1}{9}} \cdot \sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{17}}{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\beta = 59.04^\circ \quad \text{ומכאן}$$

ii בעיה: במקבילון שבציור נסמן:

$$\vec{AA'} = \vec{w}, \vec{AD} = \vec{v}, \vec{AB} = \vec{u}$$

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1$$

נתון

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \angle(\vec{u}, \vec{w}) = 60^\circ$$

ג. חוכה כי אין נקודה M שבשבילה

$$\angle(C'EM) = 45^\circ$$

ד. בשביל איזה ערך של t הזווית α תהיה ישרה.

התרה:
א.

$$\vec{EM} = \vec{EA} + \vec{AM} = -\frac{1}{2}\vec{w} + t\vec{u}$$

$$\vec{EC'} = \vec{EA'} + \vec{AD'} + \vec{D'C'} = \frac{1}{2}\vec{w} + \vec{v} + \vec{u}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \quad \text{ב. מתקיים ולכן:}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{EM} \cdot \vec{EC'}|}{|\vec{EM}| \cdot |\vec{EC'}|} =$$

$$= \frac{(-\frac{1}{2}\vec{w} + t\vec{u}) \cdot (\frac{1}{2}\vec{w} + \vec{v} + \vec{u})}{|-\frac{1}{2}\vec{w} + t\vec{u}| \cdot |\frac{1}{2}\vec{w} + \vec{v} + \vec{u}|} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}\vec{w}^2 + t\vec{u}^2}{\sqrt{\frac{1}{4}\vec{w}^2 + t^2\vec{u}^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}\vec{w}^2 + \vec{v}^2 + \vec{u}^2}} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{4} \cdot 4 + t \cdot 4}{\sqrt{\frac{1}{4} \cdot 4 + 4t^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 4 + 4 + 4}} =$$

$$\cos \alpha = \frac{-1 + 4t}{\sqrt{1 + 4t^2} \cdot 3} \quad \text{ולכן}$$

$$\text{נניח } \cos \alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}} \text{ כדי למצוא את } t \text{ שבשבילו } \alpha \text{ תהיה ישרה}$$

$$(*) \quad \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{-1 + 4t}{3\sqrt{1 + 4t^2}}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sqrt{1 + 4t^2} = \sqrt{2}(4t - 1)$$

נעלה בריבוע ונקבל את המשוואה הריבועית:

$$28t^2 - 16t + 1 = 0$$

$$t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{1}{14} \quad \text{והפתרונות}$$

זהו אורך האלכסון במקבילון

$$\begin{aligned} (**)... \vec{AC'} \cdot \vec{AB} &= (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \\ &= \vec{u}^2 + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

נציב את (*) ו (**) בתבנית של $\cos \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{6} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\alpha = 35.26^\circ \quad \text{ולכן}$$

$$\begin{aligned} \vec{AC'} \cdot \vec{BD} &= (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})(\vec{v} - \vec{u}) = \\ &= (\vec{v} + \vec{u})(\vec{v} - \vec{u}) + \vec{w}(\vec{v} - \vec{u}) = \\ &= \vec{v}^2 - \vec{u}^2 + \vec{w} \cdot \vec{v} - \vec{w} \cdot \vec{u} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned} \quad \text{ב.}$$

$$\vec{AC'} \perp \vec{BD} \quad \text{ולכן}$$

iii בעיה*: בקובייה שבציור נסמן:

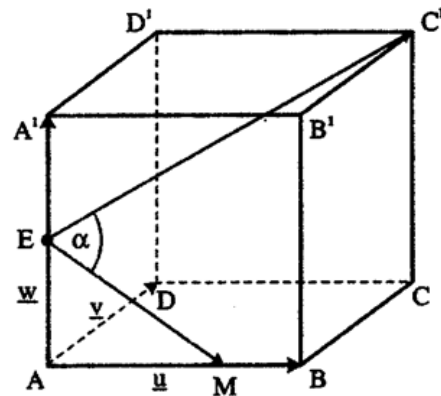
$$\vec{AA'} = \vec{w}, \vec{AD} = \vec{v}, \vec{AB} = \vec{u}$$

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 2$$

נתון:

E אמצע המקצוע AA'

$$\vec{AM} = t\vec{AB}$$



א. תבע את $\vec{EM}$ ו $\vec{EC'}$ בעזרת $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

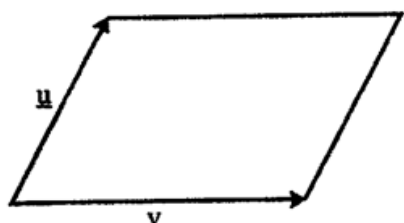
ב. נסמן $\angle(\vec{EC'}, \vec{EM}) = \alpha$. מצא תבנית

$$\cos \alpha \text{ ל } \cos \alpha \text{ בשביל איזה ערך של } t$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

5. תכונות גיאומטריות במישור ובמרחב
במכפלה הסקלרית אפשר גם לחשתמש לשם הוכחת משפטים.
דוגמאות לכך תובאנה בפרק 7. אולם כבר כאן נוכיח בעזרתה
שני משפטים.

משפט: האלכסונים במקבילית ניצבים זה על זה כאשר ורק
כאשר המקבילית היא מעויין.



הוכחה: יהיו $\underline{u}$, $\underline{v}$ הוקטורים שהם "צלעות" המקבילית.
וקטורי האלכסונים הם $\underline{u} + \underline{v}$ ו $\underline{u} - \underline{v}$. תנאי הניצבות
במקרה שלפנינו הוא: $(\underline{u} + \underline{v}) \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = 0$
מחוקי המכפלה הסקלרית ידוע, כי
 $(\underline{u} + \underline{v}) \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = \underline{u}^2 - \underline{v}^2$ לכן
 $(\underline{u} + \underline{v}) \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = 0$
כאשר ורק כאשר $|\underline{u}|^2 - |\underline{v}|^2 = 0$, כלומר $|\underline{u}| = |\underline{v}|$.
ובמילים: צלעות המקבילית שוות, כלומר המקבילית היא
מעויין.

משפט: בטראדר ABCD אם $\vec{AD} \perp \vec{BC}$ ו $\vec{CD} \perp \vec{AB}$,
אזי $\vec{BD} \perp \vec{AC}$
(כלומר: בטראדר, אם שני מקצועות מאונכים בחתאמה
למקצועות שממולן, אז גם מקצוע שלישי מאונך למקצוע
שמולו).

הוכחה: בטראדר שבציור נסמן:
 $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AD} = \underline{w}$
מהנתון $\vec{CD} \perp \vec{AB}$, $\vec{AD} \perp \vec{BC}$ כלומר
 $(\underline{w} - \underline{v}) \cdot \underline{u} = 0$ ו $\underline{w} \cdot (\underline{v} - \underline{u}) = 0$

2. הוכחה למקבילית שנקבעת עליה וקטורים $\underline{u}$, ו $\underline{v}$, כמראה בציור.
בסגנון מעין זה נשתמש גם בחמש ואין חשש לבלבול.

מכיוון שהעלנו בריבוע לא כל פתרון של המשוואה
הריבועית הוא בהכרח פתרון של (*).
אם נציב $t = \frac{1}{14}$ נקבל $\cos \alpha = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$.
בניגוד לנתון לעומת זאת $t = \frac{1}{2}$ הוא פתרון כנדרש
(בדוק!)

ג. אם $\alpha = 45^\circ$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$
נתייר את המשוואה

$$(*) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4t - 1}{3\sqrt{1 + 4t^2}}$$

נעלה בריבוע ונקבל את המשוואה הריבועית
 $4t^2 + 16t + 7 = 0$
וחפתרונות: $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = -3\frac{1}{2}$.
בדיקה מראה כי פתרונות אלו אינם מקיימים את
המשוואה (*).

ד. אם $\alpha = 90^\circ$, $t = \frac{1}{4}$. במקרה זה
 $\vec{EM} \perp \vec{EC}'$

$$= \frac{1}{2} (\underline{u} - \underline{w} + \underline{v} - \underline{w}) = \frac{1}{2} (\underline{u} + \underline{v} - 2\underline{w})$$

$$\vec{AM} = \vec{AD} + \vec{DM} = \vec{AD} + t\vec{DE} =$$

$$= \underline{w} + \frac{1}{2}t(\underline{u} + \underline{v} - 2\underline{w})$$

ולאחר פישוט נקבל:

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}t(\underline{u} + \underline{v}) + (1-t)\underline{w}$$

$$\vec{CB} = \underline{u} - \underline{v}$$

כמו כן:

ב. על סמך א':

$$\vec{AM} \cdot \vec{CB} = \left(\frac{1}{2}t(\underline{u} + \underline{v}) + (1-t)\underline{w} \right) (\underline{u} - \underline{v}) =$$

$$= \frac{1}{2}t(\underline{u} + \underline{v})(\underline{u} - \underline{v}) + (1-t)\underline{w} \cdot (\underline{u} - \underline{v})$$

$$(\vec{AD} \perp \vec{CB} \text{ מתקבל מהנתון } \underline{w} \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = 0 \text{ אולם, ולכן:})$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{CB} = \frac{1}{2}t(\underline{u} + \underline{v})(\underline{u} - \underline{v}) = \frac{1}{2}t(\underline{u}^2 - \underline{v}^2)$$

$$\vec{AM} \perp \vec{CB} \Leftrightarrow 0 = \vec{AM} \cdot \vec{CB} = \frac{1}{2}t(\underline{u}^2 - \underline{v}^2)$$

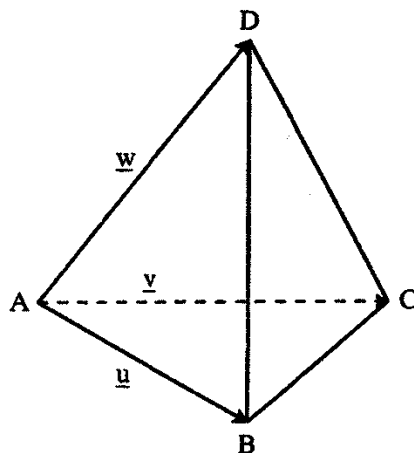
$$\vec{AM} \perp \vec{CB} \Leftrightarrow |\underline{u}| = |\underline{v}| \quad \text{ומכאן:}$$

$$\underline{w} \cdot \underline{u} = \underline{v} \cdot \underline{u} \quad \underline{w} \cdot \underline{v} = \underline{w} \cdot \underline{u} \quad \text{מכאן}$$

$$\underline{w} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u} \quad \text{כלומר}$$

$$\underline{w} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{v} \quad \text{או}$$

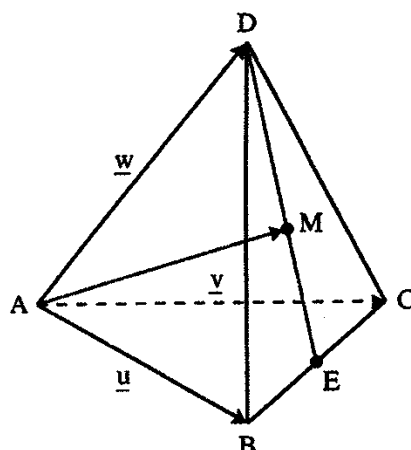
$$\vec{BD} \perp \vec{AC} \quad \text{שמשמע } (\underline{w} - \underline{u}) \cdot \underline{v} = 0 \quad \text{ולכן}$$



בעיה: בטטראדר ABCD נתון:

$$\underline{u} = \vec{AB}, \underline{v} = \vec{AC}, \underline{w} = \vec{AD}$$

E אמצע הצלע BC הנקודה M מקיימת $\vec{DM} = t\vec{DE}$.



א. הבע את $\vec{AM}$ ו $\vec{CB}$ בעזרת $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, t$.

ב. נתון $\vec{AD} \perp \vec{CB}$.

חוכה $\vec{AM} \perp \vec{CB}$ (לכל t) אם ורק אם $|\underline{u}| = |\underline{v}|$ (כלומר, המשולש ABC שווה שוקיים).

התורה

א. $\vec{DE}$ הוא וקטור התיכון במשולש BDC ולכן:

$$\vec{DE} = \frac{1}{2}(\vec{DB} + \vec{DC}) =$$

5.4 המכפלה הסקלרית בהצגה אלגברית.

5.4.1 חישוב המכפלה הסקלרית

בסעיף זה נראה כיצד אפשר לחשב את המכפלה הסקלרית של שני וקטורים הנתונים בהצגה אלגברית ושימושים לכך.

יחיד וקטורים שהצגתם האלגברית

במישור: $\underline{u} = (u_1, u_2)$, $\underline{v} = (v_1, v_2)$

במרחב: $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$

במשפט חבא נביא תבנית למכפלתם הסקלרית.

משפט: המכפלה הסקלרית של וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ הנתונים בהצגה אלגברית כמתואר לעיל היא:

במישור: $\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$

במרחב: $\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

הוכחה: נביא לחץ את ההוכחה במישור; ההוכחה במרחב דומה.

את הוקטורים $\underline{u} = (u_1, u_2)$, $\underline{v} = (v_1, v_2)$ אפשר לחציג כך:

$\underline{u} = u_1 \underline{e}_x + u_2 \underline{e}_y$, $\underline{v} = v_1 \underline{e}_x + v_2 \underline{e}_y$

כאשר $\underline{e}_x$ ו $\underline{e}_y$ הם וקטורי יחידה ניצבים זה לזה (לדיון בנושא וקטור יחידה ראה סוף הסעיף הקודם (6))

לכן מתקיים: $\underline{e}_x \cdot \underline{e}_y = 0$, $\underline{e}_x \cdot \underline{e}_x = 1$, $\underline{e}_y \cdot \underline{e}_y = 1$

נשתמש בחוקי המכפלה הסקלרית:

$$\begin{aligned} \underline{u} \cdot \underline{v} &= (u_1 \underline{e}_x + u_2 \underline{e}_y) \cdot (v_1 \underline{e}_x + v_2 \underline{e}_y) = \\ &= u_1 \underline{e}_x \cdot (v_1 \underline{e}_x + v_2 \underline{e}_y) + u_2 \underline{e}_y \cdot (v_1 \underline{e}_x + v_2 \underline{e}_y) = \\ &= u_1 v_1 (\underline{e}_x \cdot \underline{e}_x) + u_1 v_2 (\underline{e}_x \cdot \underline{e}_y) + \\ &+ u_2 v_1 (\underline{e}_y \cdot \underline{e}_x) + u_2 v_2 (\underline{e}_y \cdot \underline{e}_y) = \\ &= u_1 v_1 \cdot 1 + u_1 v_2 \cdot 0 + u_2 v_1 \cdot 0 + u_2 v_2 \cdot 1 = \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 \end{aligned}$$

במרחב: $\underline{u} = u_1 \underline{e}_x + u_2 \underline{e}_y + u_3 \underline{e}_z$

$\underline{v} = v_1 \underline{e}_x + v_2 \underline{e}_y + v_3 \underline{e}_z$

כאשר $\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$ הם וקטורי יחידה ניצבים זה על זה. כאמור, ההוכחה במקרה זה דומה להוכחה במישור ואנו משאירים אותה כתרגיל.

דוגמה: במרחב נתונות הנקודות

$$A = (-1, 1, -5), B = (3, 0, -4), C = (-2, 3, 1)$$

הוכח כי $\vec{AC} \perp \vec{BA}$

פתרון: $\vec{AC} = (-1, 2, 6)$, $\vec{BA} = (-4, 1, -1)$

נחשב את המכפלה הסקלרית:

$$\vec{AC} \cdot \vec{BA} = (-1, 2, 6) \cdot (-4, 1, -1) =$$

$$= (-1)(-4) + 2 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) = 4 + 2 + (-6) = 0$$

ולכן $\vec{AC} \perp \vec{BA}$

5.4.2 מרחק בין שתי נקודות

בסוף סעיף 5.3 חבאנו את נוסחת האורך של וקטור $\underline{u}$ הנתון בהצגה אלגברית $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$. בעזרת נוסחת המכפלה הסקלרית בקואורדינטות אפשר לקבל אותה הנוצאה מייד:

$$|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} = \sqrt{(u_1, u_2, u_3) \cdot (u_1, u_2, u_3)} =$$

$$= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

כמו כן אם $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ חמרחק AB מתקבל כך:

$$|\vec{AB}| = |(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)| =$$

$$= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

הנוסחאות במישור דומות.

דוגמאות:

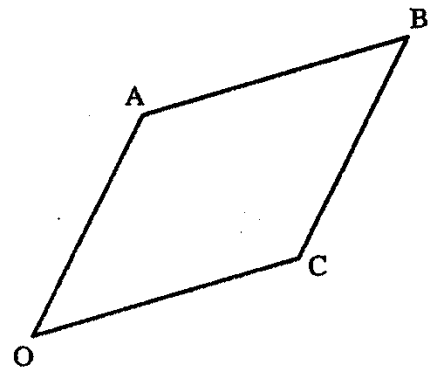
1. נתון וקטור $\underline{u} = (1, -2, 3)$. מצא וקטור יחידה בכיוון $\underline{u}$.

פתרון: נסמן ב $\underline{e}$ את וקטור היחידה המבוקש

$$\underline{e} = \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|} = \frac{1}{|(1, -2, 3)|} (1, -2, 3) = \frac{1}{\sqrt{1+4+9}} (1, -2, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$

2. במקבילית OABC נתון:

$$B = (-1, 3, -3), A = (1, 2, -1), O = (0, 0, 0)$$



א. חשב את אורך האלכסון AC במקבילית.

ב. חשב את הזווית A.

פתרון:

$$\vec{OC} = \vec{AB} = (-2, 1, -2)$$

א.

הנקודה O היא הראשית, לכן:

$$C = (-2, 1, -2)$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2 + (-2-(-1))^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$$

ב. נסמן $\alpha = \angle(OAB)$ מתקיים

$$\alpha = \angle(\vec{AO}, \vec{AB})$$

שים לב: $\angle(\vec{OA}, \vec{AB})$ משלימה את α ל 180° .

$$\vec{AO} = -\vec{OA} = (-1, -2, 1)$$

$$\vec{AB} = (-2, 1, -2)$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AO} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AO}| |\vec{AB}|} = \frac{(-1, -2, 1) \cdot (-2, 1, -2)}{|(-1, -2, 1)| |(-2, 1, -2)|} = \frac{2-2-2}{\sqrt{6}\sqrt{9}} = -\frac{2}{3\sqrt{6}}$$

ולכן $\alpha = 105.8^\circ$

5.4.3 דוגמאות נוספות

1. במקבילון ABCDA₁B₁C₁D₁ נתון:

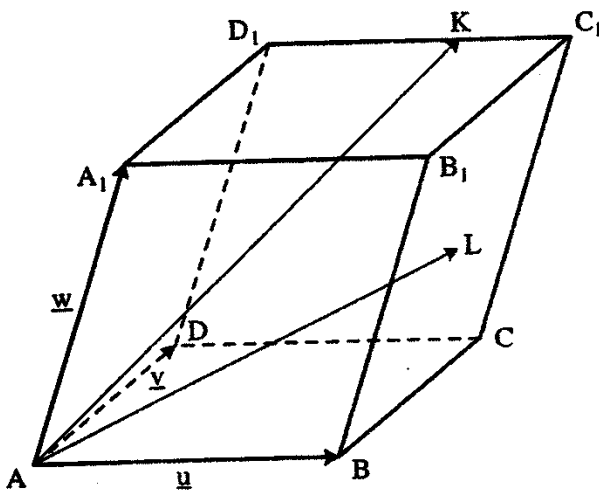
$$A = (-1, 1, 2), B = (2, -5, 2)$$

$$D = (-3, 1, 5), A_1 = (-1, 3, 3)$$

K מחלקת את D₁C₁ ביחס 2:1

L מפגש האלכסונים בפאה BCC₁B₁

חשב את הזווית $\angle KAL$



התרה: נמצא קודם את $\vec{AL}$ ו $\vec{AK}$

אחת הדרכים:

$$\underline{u} = \vec{AB} = (3, -6, 0) \text{ נסמן}$$

$$\underline{v} = \vec{AD} = (-2, 0, 3)$$

$$\underline{w} = \vec{AA_1} = (0, 2, 1)$$

$$\vec{AK} = \vec{AA_1} + \vec{A_1D_1} + \vec{D_1K} = \underline{w} + \underline{v} + \frac{2}{3}\underline{u} = (0, 2, 1) + (-2, 0, 3) + \frac{2}{3}(3, -6, 0) = (0, -2, 4)$$

$$\vec{AL} = \vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{BB_1} + \vec{BC}) =$$

מהנתון $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$ ולכן

$$\vec{ME} \cdot \vec{MB} = \left(\frac{1}{2}\underline{u} - \underline{v} + \underline{w} \right) \left(-\frac{1}{2}\underline{u} - \underline{v} \right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\underline{u}^2 + \underline{v}^2$$

$$(\vec{ME})^2 = \left(-\frac{1}{2}\underline{u} - \underline{v} + \underline{w} \right)^2 = \frac{1}{4}\underline{u}^2 + \underline{v}^2 + \underline{w}^2$$

$$(\vec{MB})^2 = \left(\frac{1}{2}\underline{u} - \underline{v} \right)^2 = \frac{1}{4}\underline{u}^2 + \underline{v}^2$$

נתון $|\underline{v}| = 2, |\underline{w}| = |\underline{u}| = 1$ ולכן

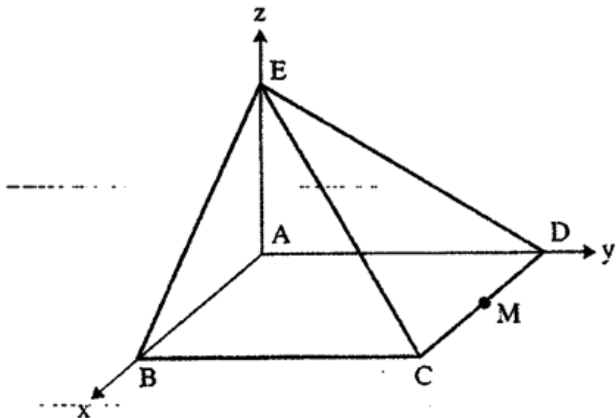
$$\cos \alpha = \frac{\vec{ME} \cdot \vec{MB}}{|\vec{ME}| |\vec{MB}|} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}\underline{u}^2 + \underline{v}^2}{\sqrt{\frac{1}{4}\underline{u}^2 + \underline{v}^2 + \underline{w}^2} \sqrt{\frac{1}{4}\underline{u}^2 + \underline{v}^2}} =$$

$$= \frac{\frac{15}{4}}{\sqrt{\frac{21}{4}} \sqrt{\frac{17}{4}}} = \frac{15}{\sqrt{357}}$$

$$\alpha = 37.45^\circ$$

דרך ב'. מכיוון ש $\underline{AE}, \underline{AD}, \underline{AB}$ ניצבים זה על זה הם יכולים לשמש כצירי z, y, x בהתאמה.



$$A = (0, 0, 0), B = (1, 0, 0)$$

$$C = (1, 2, 0), D = (0, 2, 0)$$

$$E = (0, 0, 1), M = \left(\frac{1}{2}, 2, 0 \right)$$

מתקיים:

$$= \underline{u} + \frac{1}{2}(\underline{v} + \underline{w}) = (2, -5, 2)$$

$$\cos \angle(KAL) =$$

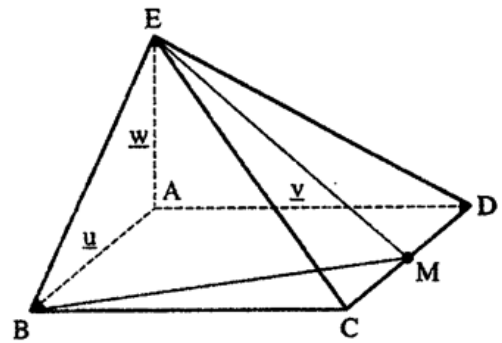
$$= \frac{\vec{AK} \cdot \vec{AL}}{|\vec{AK}| |\vec{AL}|} = \frac{(0, -2, 4) \cdot (2, -5, 2)}{|(0, -2, 4)| |(2, -5, 2)|} =$$

$$= \frac{18}{\sqrt{20}\sqrt{33}} = 0.7$$

2. בפירמידה ABCDE נתון כי המקצועות $\underline{AB}, \underline{AD}, \underline{AE}$ ניצבים זה על זה, וחבסיס מלבן.

$$|\vec{AD}| = 2, |\vec{AE}| = |\vec{AB}| = 1$$

M אמצע המקצוע CD. חשב את הזווית $\angle EMB$.



נביא לחלף שתי דרכים לפתרון. האחת מסתמכת על חשבון חיצים והאחרת באמצעות קואורדינטות.

התורה: דרך א'.

נסמן

$$\underline{w} = \vec{AE}, \underline{v} = \vec{AD}, \underline{u} = \vec{AB}$$

$$\vec{ME} = \vec{MD} + \vec{DA} + \vec{AE} = -\frac{1}{2}\underline{u} - \underline{v} + \underline{w}$$

$$\vec{MB} = \frac{1}{2}\underline{u} - \underline{v}$$

$$\vec{ME} = \left(-\frac{1}{2}, -2, 1\right) \quad \vec{MB} = \left(\frac{1}{2}, -2, 0\right)$$

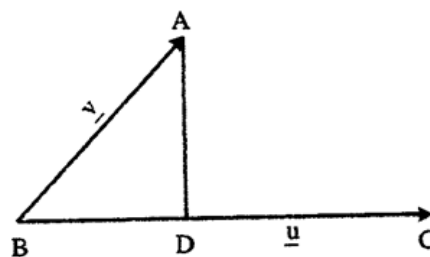
ולכן:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\left(-\frac{1}{2}, -2, 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, -2, 0\right)}{\left| \left(-\frac{1}{2}, -2, 1\right) \right| \left| \left(\frac{1}{2}, -2, 0\right) \right|} = \\ &= \frac{-\frac{1}{4} + 4}{\sqrt{\frac{1}{4} + 4 + 1} \sqrt{\frac{1}{4} + 4}} = \frac{\frac{15}{4}}{\sqrt{\frac{21}{4}} \sqrt{\frac{17}{4}}} = \frac{15}{\sqrt{357}} \end{aligned}$$

3. נתונות הנקודות

$$A = (1, -3, 2), B = (0, -2, 5), C = (2, -2, 9)$$

הנקודה D מקיימת $\vec{BD} = t\vec{BC}$



בשביל איזו ערך של t $\vec{BD} \perp \vec{AD}$

התורה:

$$\begin{aligned} \vec{AD} &= \vec{BD} - \vec{BA} = t\vec{BC} - \vec{BA} = \\ &= t(2, 0, 4) - (1, -1, -3) = (2t - 1, 1, 4t + 3) \\ \vec{BD} \perp \vec{AD} &\Leftrightarrow \vec{BC} \cdot \vec{AD} = 0 \end{aligned}$$

כלומר:

$$(2, 0, 4) \cdot (2t - 1, 1, 4t + 3) = 0$$

מתקיים גם:

$$(1, 0, 2) \cdot (2t - 1, 1, 4t + 3) = 0$$

נשתמש בתבנית למכפלה הסקלרית:

$$1(2t - 1) + 0 \cdot 1 + 2(4t + 3) = 0$$

$$t = -\frac{1}{2} \quad \text{והפתרון:}$$

5.6 תרגילים

לסעיפים 5.1-5.2

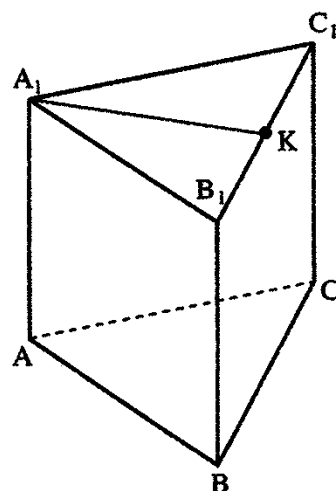
1. במנסרה ישרה $ABCA_1B_1C_1$ הבסיס הוא משולש שווה צלעות. K אמצע המקצוע B_1C_1 .

א. מצא את הזוויות הבאות:

$$\angle(\vec{A_1B_1}, \vec{KC_1}) \quad (iv) \quad \angle(\vec{A_1C_1}, \vec{AB}) \quad (i)$$

$$\angle(\vec{AB}, \vec{BC}) \quad (v) \quad \angle(\vec{A_1K}, \vec{AC}) \quad (ii)$$

$$\angle(\vec{A_1B_1}, \vec{C_1C}) \quad (iii)$$



ב. מצא וקטורים שיהיו ניצבים לוקטור $\vec{A_1K}$.

2. נתונים האורכים $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ של שני וקטורים וחזויות ביניהם $\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v})$. חשב את המכפלה הסקלרית $\vec{u} \cdot \vec{v}$ כאשר:

א. $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$

ב. $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 3$, $\alpha = 30^\circ$

ג. $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 2$, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$

ד. $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$, $\alpha = 120^\circ$

ה. $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 1$, $\alpha = 180^\circ$

3. השתמש במחשבון לשם מציאת הנתון החסר.

א. $\angle(\vec{u}, \vec{v}) =$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$, $|\vec{v}| = 3$, $|\vec{u}| = 2$

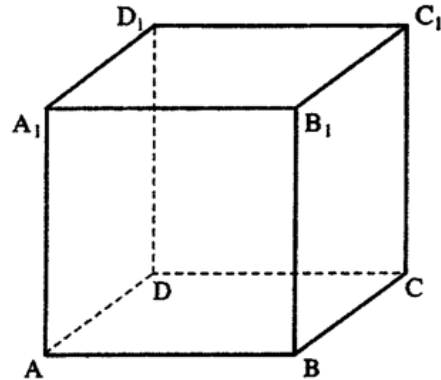
ב. $|\vec{v}| =$, $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{4}{5}\pi$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -8$, $|\vec{u}| = 5$

ג. $\angle(\vec{u}, \vec{v}) =$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 11$, $|\vec{v}| = 7$, $|\vec{u}| = 4$

4. בקובייה שבציור אורך כל מקצוע 2. חשב את המכפלות

הסקלריות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \vec{A_1C_1} \cdot \vec{AB} & \text{ד. } \vec{A_1C_1} \cdot \vec{BD} \\ \text{ב. } \vec{CC_1} \cdot \vec{AD} & \text{ה. } \vec{C_1A_1} \cdot \vec{C_1B} \\ \text{ג. } \vec{A_1C_1} \cdot \vec{AC} & \text{ו. } \vec{CC_1} \cdot \vec{A_1A} \end{array}$$



5. פתח את הסוגריים ופשט ככל האפשר

$$\begin{array}{ll} \text{א. } (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{w}) & \text{ב. } (\vec{u} + \vec{v})^2 \\ \text{ג. } (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) & \text{ד. } (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \\ \text{ה. } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ כאשר } (a\vec{u} + b\vec{v})^2 & \text{ו. } (a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot (a\vec{u} - b\vec{v}) \\ \text{ז. } (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})^2 & \text{אחר.} \end{array}$$

6. הוכח:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } |\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2) & \text{ב. } |\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 4(\vec{u} \cdot \vec{v}) \\ \text{ג. } (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) & \end{array}$$

7. יהיו $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ וקטורים, t מספר. ציין לגבי כל אחת

מתחבניות הבאות האם היא מייצגת וקטור, סקלר, או

האם הביטוי חסר משמעות.

$$\begin{array}{ll} \text{א. } t^2 \cdot (2\vec{u} + 3\vec{v}) & \text{ב. } (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})^2 \\ \text{ג. } \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w} & \text{ד. } |\vec{v}| \cdot \vec{u} + |\vec{u}| \cdot \vec{v} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ה. } \vec{u}^2 \cdot \vec{u} & \text{י. } \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} - \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \\ \text{ו. } \vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w} & \text{יא. } \frac{1}{\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} \\ \text{ז. } |\vec{u} + \vec{v}| - |\vec{u} - \vec{v}| & \text{יב. } (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \\ \text{ח. } (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} & \text{יג. } \frac{\vec{u}^2}{|\vec{v}|} - \frac{\vec{v}^2}{|\vec{u}|} \\ \text{ט. } \vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{w}|^2 & \end{array}$$

8. ציין לגבי כל אחד מהפסוקים הבאים אמת או שקר.

$$\begin{array}{ll} \text{א. } t\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot t\vec{v} & \text{ב. } (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 \\ \text{ג. } \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| |\vec{u}| & \end{array}$$

ה. אם $\vec{u} = \vec{v}$ אז $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}$

ו. אם $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}$ ו $\vec{w} \neq \vec{0}$ אז $\vec{u} = \vec{v}$

ז. אם $\vec{u} \perp \vec{v}$ אז $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2$

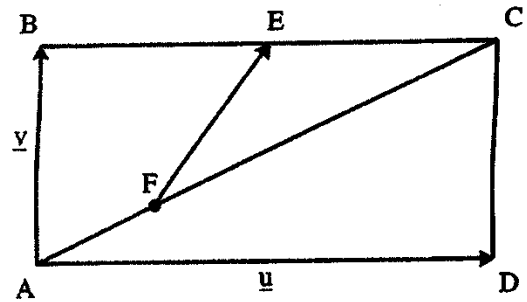
יא. אם $\vec{u}$ ו $\vec{v}$ וקטורי יחידה $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \cos \vec{u} \cdot \vec{v}$

9. נתון $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$, $|\vec{v}| = 4$, $|\vec{u}| = \sqrt{3}$. חשב:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \vec{u} \text{ ו } \vec{v} \text{ הזווית בין } & \text{ב. } \vec{u} + \vec{v} \text{ אורך הוקטורים } \vec{u}, \vec{u} - \vec{v} \\ \text{ג. } \vec{u} + \vec{v} \text{ הזווית בין הוקטורים } \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} & \text{ד. } \vec{u} - \vec{v} \text{ הזווית בין הוקטורים } \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \end{array}$$

לסעיף 5.3

23. במלבן ABCD E אמצע BC ו $\vec{AF} = \frac{1}{4} \vec{AC}$.
נסמן: $\vec{AB} = \underline{y}$, $\vec{AD} = \underline{u}$, $|\underline{y}| = 4$, $|\underline{u}| = 8$.



- חבצ את $\vec{FE}$ בעזרת $\underline{y}$ ו $\underline{u}$.
- מצא את אורך חוקטור $\vec{FE}$.
- מצא את הזווית בין חוקטורים הבאים:

i. $\vec{AD}$ ו $\vec{AC}$

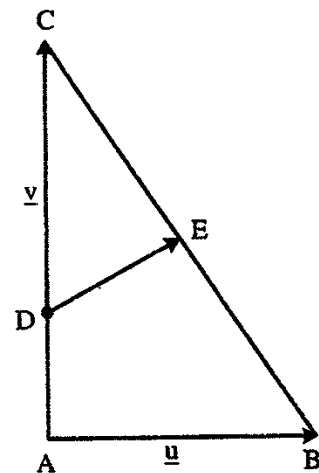
ii. $\vec{AC}$ ו $\vec{FE}$

iii. $\vec{BD}$ ו $\vec{AC}$

24. במשולש ישר זווית ABC (A קדקוד הזווית הישרת).

E אמצע היתר ו D מחלקת את AC ביחס 1:2.

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{y}$, $|\underline{y}| = 6$, $|\underline{u}| = 2$.



- מצא את אורך חוקטור $\vec{DE}$.
- מצא את הזווית בין חוקטורים הבאים:

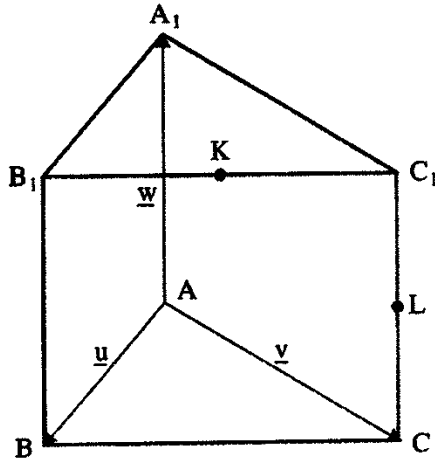
i. $\vec{BD}$ ו $\vec{BE}$

ii. $\vec{AC}$ ו $\vec{DE}$

iii. $\vec{AE}$ ו $\vec{DE}$

29. במנסרה ישרה ומשולשת, חבסיס הוא משולש ישר זווית (A, A_1) קדקודי הזווית הישרה, K אמצע B_1C_1 , L אמצע CC_1 .

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{y}$, $\vec{AA_1} = \underline{w}$,
 $|\underline{y}| = 2$, $|\underline{u}| = |\underline{w}| = 1$.



- מצא את אורכי חוקטורים $\vec{AK}$, $\vec{AL}$, $\vec{KL}$.
- מצא את הזווית בין חוקטורים הבאים:

i. $\vec{AA_1}$ ו $\vec{AK}$

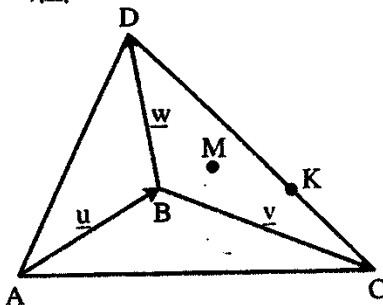
ii. $\vec{AL}$ ו $\vec{AK}$

iii. $\vec{AB}$ ו $\vec{KL}$

30. בטטראדר ABCD, הנקודה K מחלקת את DC ביחס 2:1.

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{BC} = \underline{y}$, $\vec{BD} = \underline{w}$.

$|\underline{y}| = |\underline{w}| = 3$, $|\underline{u}| = 1$. ניצבים זה לזה.



מצא את הזווית בין חוקטורים הבאים:

i. $\vec{AD}$ ו $\vec{AC}$

ii. $\vec{BA}$ ו $\vec{BK}$

iii. $\vec{BD}$ ו $\vec{AK}$

iv. חוקטור $\underline{w} + \underline{y} + 2\underline{u}$ וחוקטור $\vec{DC}$.

31. בנתוני השאלה הקודמת, הנקודה M היא מפגש

התיכונים בCD.

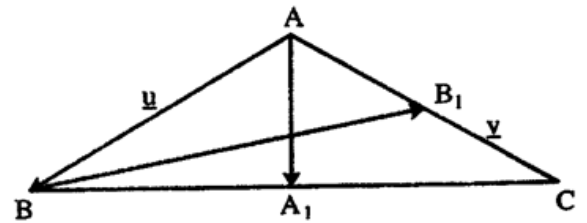
חשב את אורך הוקטור $\vec{AM}$.

32. במשולש שווה שוקיים ABC $|\vec{AB}| = |\vec{AC}| = 2$, $\angle A = 120^\circ$.

A_1 אמצע BC

B_1 אמצע AC

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$

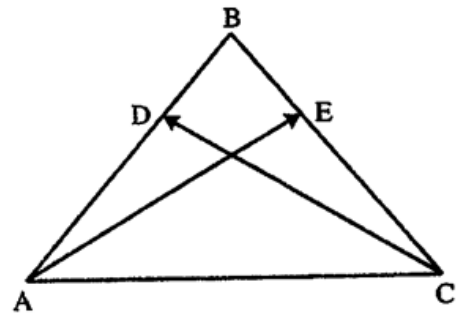


א. מצא את אורכי התיכונים מ A ומ B.

ב. מצא את הזווית בין וקטורי התיכונים $\vec{AA_1}$ ו $\vec{BB_1}$.

33. משולש שווה צלעות. אורך כל צלע 3.

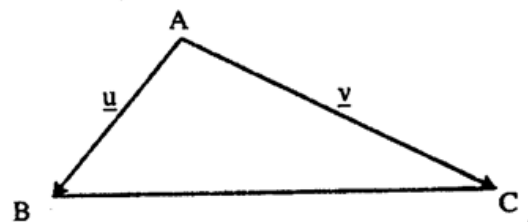
D ו E מחלקים את AB ו CB בחתאמה ביחס של 2:1.



מצא את הזווית בין הוקטורים $\vec{CD}$ ו $\vec{AE}$.

34. במשולש ABC נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$,

$$|\vec{BC}| = \sqrt{5}, |\underline{v}| = \sqrt{2}, \underline{u} \cdot \underline{v} = -1$$



א. מצא את $|\underline{u}|$

ב. מצא את $\angle A$

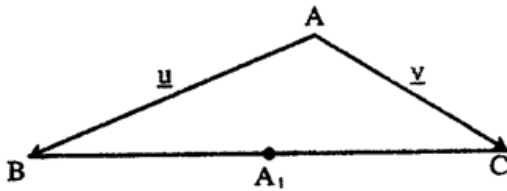
ג. חשב את שטח המשולש ABC.

35. במשולש ABC נתון: $|\vec{AB}| = 2$, $|\vec{BC}| = \sqrt{13}$,

$$|\vec{AC}| = \sqrt{3}$$

A_1 אמצע BC

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$



א. הבע את $\vec{BC}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$

(2) הבע את אורך הוקטור BC באמצעות $\underline{u} \cdot \underline{v}$

ב. מצא את המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$

ג. מצא את אורך וקטור התיכון $\vec{AA_1}$

מצא את הזווית $\angle(BAA_1)$

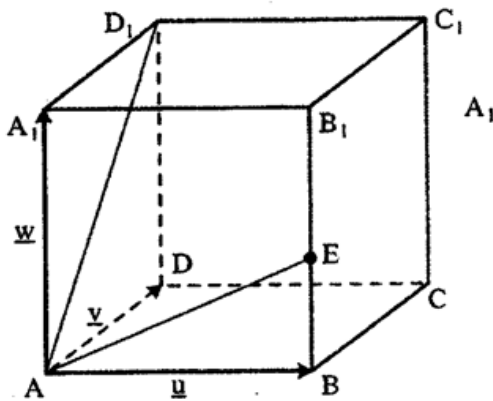
36. בקובייה שבצורה, אורך המקצוע 1.

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AA_1} = \underline{w}$

הנקודה E נמצאת על המקצוע BB_1 או על המשכו,

כך ש $\vec{BE} = t \vec{BB_1}$

נסמן: $\angle(D_1AE) = \alpha$

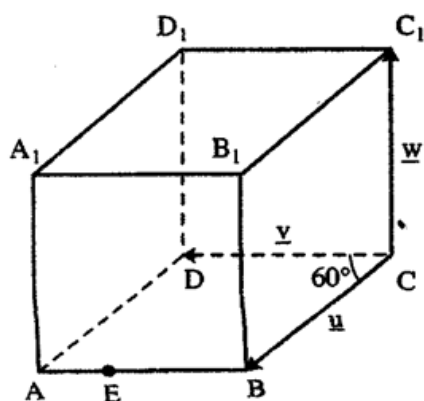


א. הבע את $\vec{AE}$ ו $\vec{AD_1}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, t.

ב. בשביל איזה ערך של t יתקיים:

$$\cos \alpha = \frac{1}{7} \quad \text{i.} \quad \alpha = 120^\circ \quad \text{iii.}$$

$$\alpha = 60^\circ \quad \text{ii.} \quad \vec{AD_1} \perp \vec{AE} \quad \text{iv.}$$



הנקודה E נמצאת על המקצוע AB או על המשכו כך
 $\vec{BE} = t\vec{BA}$ ש

בשביל איזה ערך של t מתקיים:

א. $\vec{CE} \perp \vec{CA_1}$

ב. $\angle(ECA_1) = 30^\circ$ #

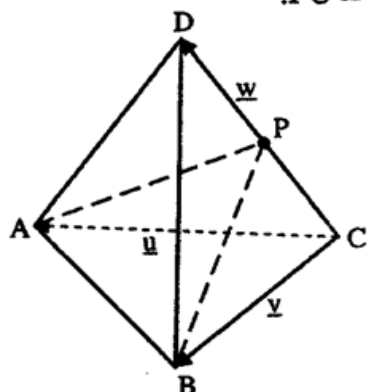
ציין בכל מקרה את מיקומה של הנקודה E.

39. בטטראדר שבציר אורך כל מקצוע הוא 1.

נסמן: $\vec{CA} = \underline{u}$, $\vec{CB} = \underline{v}$, $\vec{CD} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע CD או על חמשכו כך

ש $\vec{PC} = t\vec{DC}$



א. מצא עבור איזה ערך של t $\cos \angle APB = \frac{5}{14}$

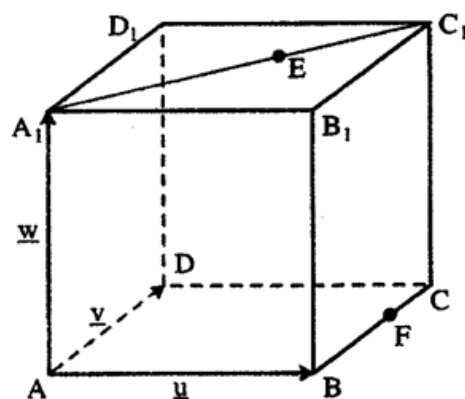
ב. הוכח, כי אין בנמצא נקודה P שבשילוח $\vec{PA} \perp \vec{PB}$

37. בקובייה שבציר אורך המקצוע 1.

מתקיים: $\vec{A_1E} = t\vec{A_1C_1}$, $\vec{BF} = t\vec{BC}$

(כלומר, E ו F מחלקים את A_1C_1 ו BC בחתאמה באותו יחס).

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AA_1} = \underline{w}$



א. הבע את $\vec{EF}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו t.

ב. הוכח כי בשביל כל ערך של t $\vec{EF}$ ניצב ל $\vec{BC}$.

ג. בשביל איזה ערך של t חוקטור $\vec{EF}$ ניצב לחוקטור:

i. $\vec{A_1C_1}$

ii. $\vec{AC_1}$

iii. $\vec{A_1C}$

ציין בכל מקרה את מיקום הנקודות E ו F.

ד. עבור $t = 0.5$ חשב את שטח המשולש A_1FC_1 .

38. במקבילון שבציר נסמן: $\vec{CD} = \underline{v}$, $\vec{CC_1} = \underline{w}$

$\vec{CB} = \underline{u}$

הזווית בין חוקטורים $\underline{u}$ ו $\underline{v}$ היא 60° . $\underline{w}$ ניצב ל $\underline{u}$ ול $\underline{v}$.

אורך כל מקצוע הוא 1.

לסעיף 5.4

64. חשב את המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$ כאשר:

א. $\underline{u} = (0, 1, 3)$, $\underline{v} = (-1, 1, 2)$

ב. $\underline{u} = (-2, -4)$, $\underline{v} = (-1, 3)$

ג. $\underline{v} = (3, 0, 6)$, $\underline{u} = (-2, -3, 1)$

ד. $\underline{v} = (b, -a, a + b)$, $\underline{u} = (3a, 3b, a - b)$

65. מצא את אורך הוקטור שהצגתו האלגברית נתונה

א. $\underline{u} = (1, 2, -3)$

ב. $\underline{u} = (-5, 3)$

ג. $\underline{u} = (a + b, a - b)$

67. מצא בעזרת מחשבוך את הזווית בין הוקטורים:

א. $\underline{u} = (0, 3, -2)$, $\underline{v} = (1, -1, -2)$

ב. $\underline{u} = (-5, 1)$, $\underline{v} = (2, 10)$

ג. $\underline{u} = (2, 3, 4)$, $\underline{v} = (-3, 0, 5)$

68. אילו מבין זוגות הוקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ ניצבים זה לזה?

א. $\underline{u} = (2, -3, 1)$, $\underline{v} = (4, 1, -5)$

ב. $\underline{u} = (-1, 4, 6)$, $\underline{v} = (5, -3, 3)$

ג. $\underline{u} = (0, 5, 1)$, $\underline{v} = (5, 0, -1)$

ד. $\underline{u} = (3, 7)$, $\underline{v} = (-7, 4)$

ה. $\underline{u} = (5, 1)$, $\underline{v} = (2, -10)$

ו. $\underline{u} = (-6, 2, 1)$, $\underline{v} = \left(\frac{1}{2}, 3, -3\right)$

70. מצא שלושה וקטורים ניצבים לוקטור

$\underline{a} = (3, -5, 7)$

71. נתונים הוקטורים

$\underline{u} = (1, -3, 5)$, $\underline{v} = (-2, 3, 7)$

$\underline{w} = (4, -6, -14)$

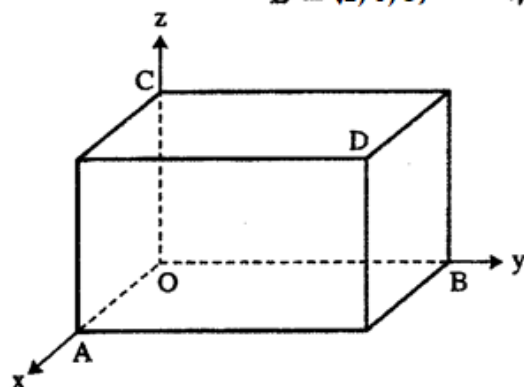
א. חשב את הזווית

$\alpha = \angle(\underline{u}, \underline{v})$, $\beta = \angle(\underline{u}, \underline{w})$

ב. חסבר את התוצאה, ונסח תכלית.

77. בתיבה שבצירי חקדוקים A, B, C נמצאים על צירי חקדוקינטות.

תחי $D = (2, 6, 5)$



א. מצא את הזווית בין האלכסון OD וחצירם.

ב. חשב את שטח המעטפת של התיבה.

ג. חשב את נפח התיבה.

ד. מהו נפח הפירמידה AOBC

78. מצא אילו מבין חקטורים $\vec{AB}$ ו $\vec{CD}$ ניצבים זה לזה, כאשר:

א. $A = (4, 1, 0)$, $B = (-1, -2, 2)$

$C = (3, 9, -7)$, $D = (4, 2, -15)$

ב. $A = (7, -5, 2)$, $B = (5, -3, 11)$

$C = (-8, 4, 1)$, $D = (0, 6, -3)$

ג. $A = (-7, 5, 9)$, $B = (-18, 7, 8)$

$C = (8, -7, 6)$, $D = (7, -14, 3)$

72. בשביל אילו ערכים של הפרמטר t מתקיים $\vec{u} \perp \vec{v}$?

א. $\vec{u} = (-5, 1, 3)$, $\vec{v} = (1, 4, t)$

ב. $\vec{u} = (2, t, -3)$, $\vec{v} = (3t, 1, 5t)$

ג. $\vec{u} = (t, -1, -2)$, $\vec{v} = (t, 5t, -3)$

ד. $\vec{u} = (1, t, t^2)$, $\vec{v} = (t^2, -2t, 3)$

73. תחיינה הנקודות

$O = (0, 0, 0)$, $A = (2, 1, 3)$, $B = (-3, 0, 4)$

א. חשב את הזווית $\angle AOB$.

ב. חשב את אורכי צלעות המשולש OAB.

ג. חשב את שטח המשולש AOB

74. במשולש ABC:

א. $A = (3, -2, 3)$, $B = (3, -1, 2)$

$C = (1, 1, 2)$

חשב את $\angle A$ $\cos$

ב. $A = (-3, 2)$, $B = (1, 4)$, $C = (0, 5)$

חשב את $\angle A$ $\cos$

ג. $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 0, 0)$

$C = (0, 1, 0)$ חשב את $\angle B$ $\cos$

ד. לכל אחד מהסעיפים חשב את שטח

המשולש ABC.

75. נתונות הנקודות:

$O = (0, 0)$, $A = (2, 1)$, $B = (-3, 5)$

יחי OC תיכון במשולש OAB.

א. מצא את אורך חתיכון OC.

ב. מצא את הזווית $\angle COA$.

ג. הראה בעזרת החישובים כי שטחי המשולשים COA ו-COB שווים.

76. במרחב נתונות הנקודות

$A = (2, 3, -1)$, $B = (1, 0, 2)$

$C = \left(-1, 1, \frac{7}{3}\right)$

א. חוכת, כי ABC משולש ישר-זווית.

ב. מצא את אורך היתר.

ג. חשב את הזווית החדות של המשולש ABC.

מק 5

$$|\underline{u} - \underline{v}| = \sqrt{7}, |\underline{u} + \underline{v}| = \sqrt{31}$$

30° א .9
21.05° ג
151.95° ד

120° (iv)

120° (v)

60° (i) א .1

30° (ii)

90° (iii)

106.26° ג 69.44° ב 4 א .10

$\vec{BC}$ $\vec{B_1C_1}$ $\vec{C_1C}$ $\vec{B_1B}$ $\vec{A_1A}$ ב

$\pm \frac{3}{8}$ ב $\frac{3}{4}$ א .11

0 ג $3\sqrt{2}$ א .2

-5 ד $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ב

-1 ה

4 א .12

30° ב

66.87° ג 1.978 ב 33.56° א .3

2 .14

0 ד 4 א .4

$t = s$.15 4 ה 0 ב

-4 ו 8 ג

$\frac{1}{2}$.16

$2\underline{u}^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{w} - 3\underline{v} \cdot \underline{u} - 3\underline{v} \cdot \underline{w}$ א .5

$\underline{u}^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v}^2$ ב

$\underline{u}^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{w}^2 - \underline{v}^2$ ג

$\underline{u}^2 - \underline{v}^2$ ד

$a^2 \underline{u}^2 + b^2 \underline{v}^2$ ה

$a^2 \underline{u}^2 - b^2 \underline{v}^2$ ו

$\underline{u}^2 + \underline{v}^2 + \underline{w}^2$ ז

$\frac{1}{3}$.18

$t = s$.19

$\frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\underline{u}^2} \cdot \underline{u}$.20

26.57° (i) ג $\frac{1}{4}\underline{u} + \frac{3}{4}\underline{v}$ א .23

29.74° (ii) $\sqrt{13}$ ב

53° (iii)

$\sqrt{2}$ א .24

26.56° (i) ב

45° (ii)

26.56° (iii)

7 א. וקטור ו. חסר משמעות יא. חסר משמעות

ב. סקלר ז. סקלר יב. וקטור

ג. חסר משמעות ח. סקלר יג. סקלר

ד. וקטור ט. סקלר

ה. וקטור י. וקטור

8 א. אמת יא. אמת

ב. שקר

ג. אמת

ה. אמת

ו. שקר

ז. אמת

$$|\vec{KL}| = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad |\vec{AL}| = \frac{\sqrt{17}}{2}, \quad |\vec{AK}| = 1\frac{1}{2} \quad \text{.N .29}$$

$$48.19^\circ \quad \text{(i)} \quad \text{.3}$$

$$36.06^\circ \quad \text{(ii)}$$

$$114.09^\circ \quad \text{(iii)}$$

$$65.9^\circ \quad \text{(iii)}$$

$$84.26^\circ \quad \text{(i)} \quad \text{.30}$$

$$90^\circ \quad \text{(iv)}$$

$$90^\circ \quad \text{(ii)}$$

$$\sqrt{3} \quad \text{.31}$$

$$|\vec{BB}_1| = \sqrt{7}, \quad |\vec{AA}_1| = 1 \quad \text{.N .32}$$

$$100.8^\circ \quad \text{.3}$$

$$\arccos -\frac{1}{7} = 98.21^\circ \quad \text{.33}$$

$$1 \quad \text{.N .34}$$

$$135^\circ \quad \text{.3}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{.3}$$

$$60^\circ \quad \text{.3} \quad \frac{1}{2} \quad \text{.3} \quad \sqrt{7-2\vec{u} \cdot \vec{v}} \quad (2) \quad \vec{v} - \vec{u} \quad (1) \quad \text{.N .35}$$

$$\vec{AE} = \vec{u} + t\vec{w}, \quad \vec{AD}_1 = \vec{v} + \vec{w} \quad \text{.N .36}$$

$$-1 \quad \text{(iii)} \quad \sqrt{\frac{2}{47}} \quad \text{(i)} \quad \text{.3}$$

$$0 \quad \text{(iv)} \quad 1 \quad \text{(ii)}$$

$$0 \quad \text{(ii)} \quad (1-t)\vec{u} - \vec{w} \quad \text{.N .37}$$

$$2 \quad \text{(iii)} \quad 1 \quad \text{(i)} \quad \text{.3}$$

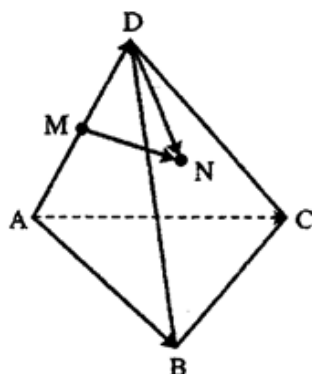
$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{.3}$$

$$1 \quad \text{.3} \quad -1 \quad \text{.N .38}$$

$$t = \frac{2}{3} \quad \text{N} \quad t = \frac{1}{3} \quad \text{.N .39}$$

77. א. $51.67^\circ, 41.91^\circ, 75.64^\circ$
 ב. 80 ג. 60 ד. 10
78. א. ניצבים
 ב. לא ניצבים
 ג. ניצבים
64. א. 7
 ב. -10
 ג. $a^2 - b^2$
 ד. 0
65. א. $\sqrt{14}$
 ב. $\sqrt{34}$
 ג. $\sqrt{2(a^2 + b^2)}$
67. א. 83.5°
 ב. 90°
 ג. 63.52°
68. א. כן
 ב. לא
 ג. לא
 ד. לא
 ה. כן
 ו. כן
71. א. $\alpha = 58.99^\circ$
 ב. $\beta = 180 - \alpha = 121.01^\circ$
72. א. $\frac{1}{3}$
 ב. 0
 ג. 2 א. 3
 ד. 0
73. א. 71.29°
 ב. $|\vec{AB}| = 3\sqrt{3}$, $|\vec{OB}| = 5$, $|\vec{OA}| = \sqrt{14}$
 ג. 8.86
74. א. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$
 ב. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
 ג. $\frac{1}{2}$
 ד. 1.73 (א) 3 (ב) 0.87 (ג)
75. א. $\frac{\sqrt{37}}{2}$
 ב. 72.9°
76. א. $\frac{1}{3}\sqrt{217}$
 ב. $27.41^\circ, 62.59^\circ$

3. בטראזר ABCD: $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$, $\vec{w} = \vec{AD}$



חנקודה M היא אמצע הקטע AD. N היא נקודה על הפאה BCD, המקיימת: $\vec{DN} = \frac{1}{4}(\vec{DB} + \vec{DC})$ (ראה ציור).

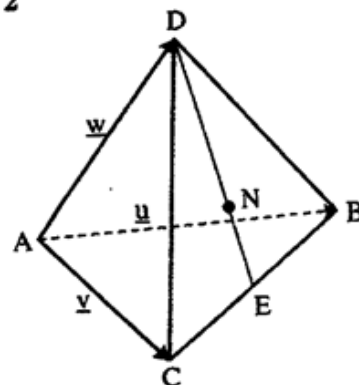
א. הבע את $\vec{MN}$ באמצעות $\vec{u}$, $\vec{v}$ ו $\vec{w}$.
 ב. נמק מדוע $\vec{MN}$ מקביל למישור ABC.
 ג. הוכח: אם $\vec{u}$ ו $\vec{v}$ שווים באורכם, אז $\vec{MN}$ ניצב ל $\vec{BC}$.

4. נתונה חתיבה ABCDA'B'C'D'. ארבעה מקדודים חם:

A(1, 2, 0), C(4, 0, 1), D(2, 2, -1), B'(9, 12, 8). מצא את נפח חתיבת.

5. במשולש ABC, חנקודה E היא אמצע הצלע AB.

נסמן $\vec{EB} = \vec{u}$, $\vec{EC} = \vec{v}$.
 א. הבע את הצלעות $\vec{CB}$, $\vec{CA}$ באמצעות $\vec{u}$ ו $\vec{v}$.
 ב. הוכח כי אם $\vec{CA}$ ניצב ל $\vec{CB}$ אז $\vec{u}$ ו $\vec{v}$ חם וקטורים בעלי אותו אורך.



ב. N היא נקודת פגישת התיכונים של המשולש BCD. הוכח כי:

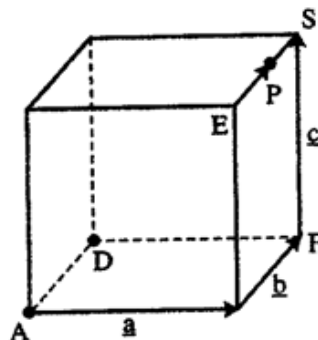
$$\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$$

ג. תראה כי אם $\vec{AD}$ ניצב ל $\vec{BC}$ וחוקטורים $\vec{u}$ ו $\vec{v}$ שווים באורכם, אזי $\vec{AN}$ ניצב ל $\vec{BC}$.

1. נתונה קובייה כמתואר בציור. אורך מקצוע הקוביה הוא 5.

נתון שהוקטור $\vec{EP} = \lambda \vec{b}$

א. בטא את $\vec{AP}$ ואת $\vec{PF}$ באמצעות $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, λ .
 ב. הוכח כי הזווית $\angle APF$ שונה מ 90° , עבור כל בחירה של λ .



2. בטראזר ABCD נסמן: $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$, $\vec{w} = \vec{AD}$ (ראה ציור).
 א. DE הוא תיכון לצלע BC. הוכח כי:

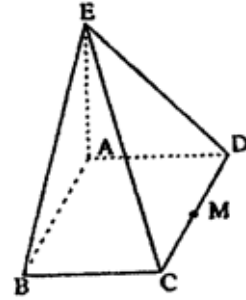
$$\vec{DE} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$$

6. במקבילון $ABCD A'B'C'D'$ נתונים הקדקודים:
 $A(1, 2, 0), C(4, 0, 1), D(2, 2, -1), B'(9, 12, 8)$

- מצא את הקדקוד B.
- חוכה כי המקבילון הוא תיבה.
- חשב את נפח הפירמידה $B'ABCD$.

7. נתונה פירמידה מרובעת $ABCDE$ שבסיסה ריבוע (ראה ציור)

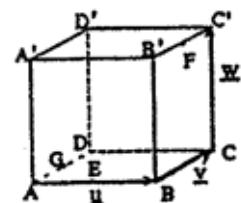
נסמן: $\vec{AE} = \underline{u}, \vec{AB} = \underline{v}, \vec{AD} = \underline{w}$
 M היא אמצע הקטע CD.



- חבט את $\vec{EB}$ ואת $\vec{EM}$ באמצעות $\underline{u}, \underline{v}$ ו $\underline{w}$.
- נתון כי $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ מאונכים זה לזה, וכן $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$.
 חשב את הזווית $\angle MEB$.

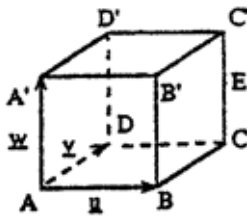
8. בקובייה $ABCD A'B'C'D'$:

$\vec{AB} = \underline{u}, \vec{BC} = \underline{v}, \vec{CC'} = \underline{w}$
 $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$
 הנקודות E, F, G הן נקודות האמצע של מקצועות הקובייה (ראה ציור).



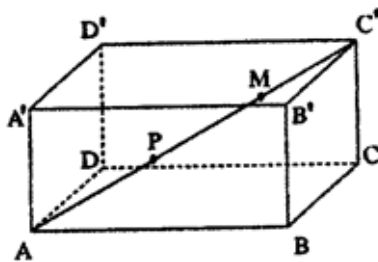
- חבט את $\vec{FE}$ ואת $\vec{FG}$ באמצעות $\underline{u}, \underline{v}$ ו $\underline{w}$.
- חשב את גודל הזווית $\angle EFG$.
- חשב את שטח המשולש EFG.

9. בקובייה $ABCD A'B'C'D'$:
 $\vec{AA'} = \underline{w}, \vec{AD} = \underline{v}, \vec{AB} = \underline{u}$ (ראה ציור).

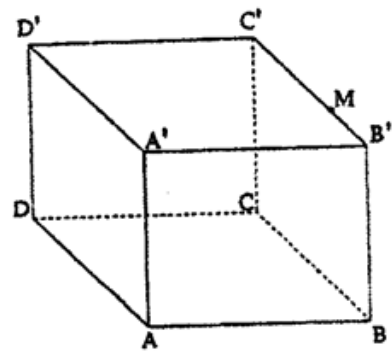


- נתון כי $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$. נקודה E נמצאת באמצע המקצוע CC' .
 נקודה F נמצאת על המקצוע DD' או על המשכו, כך ש $\vec{DF} = t \cdot \underline{w}$.
 א. חבט את $\vec{AE}$ ואת $\vec{AF}$ באמצעות $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$.
 ב. חשב את ערכו של t, אם נתון $\cos \angle EAF = \frac{1}{3}$.

10. נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$.



- נסמן: $\vec{AA'} = \underline{u}, \vec{AD} = \underline{v}, \vec{AB} = \underline{w}$
 נקודות P ו M מחלקות את תיבת AC' לשלושה קטעים שווים $AP = PM = MC'$ (ראה ציור).
 א. חבט את $\vec{BP}$ ואת $\vec{BM}$ באמצעות $\underline{u}, \underline{v}$ ו $\underline{w}$.
 ב. נתון: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 1, |\underline{w}| = 2$. חשב את גודל הזווית $\angle PBM$.



נסמן: $\vec{AA'} = \vec{w}$, $\vec{AD} = \vec{y}$, $\vec{AB} = \vec{u}$
נתון: $|\vec{u}| = |\vec{y}| = |\vec{w}| = 1$

הנקודה M נמצאת על הישר B'C' כך ש

$\vec{B'M} = \lambda \vec{B'C'}$, $\lambda \neq 0$
א. חבצ את AC ואת AM באמצעות $\vec{u}$, $\vec{y}$, $\vec{w}$

ב. חבצ באמצעות λ את הזווית של $\angle MAC$.
ג. חשב את $\angle MAC$ במקרה שבו הנקודה M נמצאת על המשך הצלע B'C' כך שמתקיים $C'M = B'C'$

רמז: $\lambda = 2$

1. $\vec{AP} = \vec{a} + \lambda \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{PF} = (1 - \lambda) \vec{b} - \vec{c}$ א.

3. $\frac{1}{4} (\vec{u} + \vec{v})$ א.

$\vec{x} = (-1, 1, -3) + t(-3, 2, 1) + s(-1, 3, -3)$ א.

ב. $9x + 10y - 7z = -20$

ג. $\frac{63}{\sqrt{230}}$

72. 4

5. $\vec{CA} = -\vec{y} - \vec{u}$, $\vec{CB} = \vec{u} - \vec{y}$ א.

6. $(3, 0, 2)$ ב. 24

7. $\vec{EM} = \frac{1}{2}\vec{y} + \vec{w} - \vec{u}$, $\vec{EB} = \vec{u} - \vec{u}$ א.
ב. 45°

8. $\vec{FG} = -\vec{u} - \vec{w}$, $\vec{FE} = -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{y} - \vec{w}$ א.

ב. 30°

ג. 0.43

9. $\vec{AF} = \vec{y} + t\vec{w}$, $\vec{AE} = \vec{u} + \vec{y} + \frac{1}{2}\vec{w}$ א.

ב. $t = -\frac{3}{4}$

10. $\vec{BM} = \frac{1}{3}(2\vec{u} + 2\vec{y} - \vec{w})$ א.

$\vec{BP} = \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{y} - 2\vec{w})$

ב. 35.26°

11. $\vec{AM} = \vec{u} + \vec{w} + \lambda \vec{y}$, $\vec{AC} = \vec{u} + \vec{y}$ א.

ב. $\frac{1 + \lambda}{\sqrt{4 + 2\lambda^2}}$

ג. 30°

דוגמאות לשאלות ותרגילים (מתוך תכנית הלימודים)

1. בסיס הפירמידה $SABCD$ הוא מקבילית $ABCD$.

א. (1) רשום נקודה וישר שבעזרתם אפשר להגדיר

את מישור הבסיס.

(2) רשום שני ישרים נחתכים שבעזרתם אפשר

להגדיר את מישור הבסיס.

(3) רשום שני ישרים מקבילים שבעזרתם אפשר

להגדיר את מישור הבסיס.

ב. הישר AB הוא ישר החיתוך של אלו שני

מישורים?

ג. מה המצב הדדי:

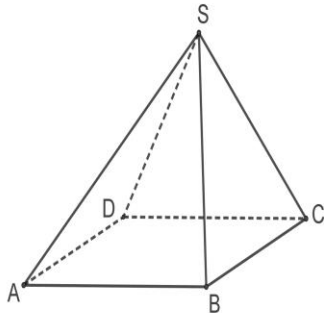
(1) בין מישור הבסיס למישור SAB ? אם הם

נחתכים רשום את ישר החיתוך.

(2) בין הישר DC למישור הבסיס?

(3) בין הישר DC למישור SAB ?

(4) בין הישר DC לישר SB ?



2. בסיס הפירמידה $SABCD$ הוא מקבילית

$ABCD$.

נקודה K נמצאת על מקצוע SC .

דרך K העבירו מישור מקביל למישור הבסיס.

המישור חותך את המקצועות SA , SD , SB

בנקודות E , F , G בהתאמה.

א. מהו המצב ההדדי בין הישרים FK ו- DC ?

נמק.

ב. הוכח כי המרובע $KFEG$ הוא מקבילית.

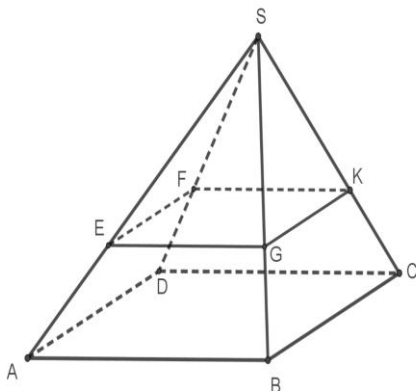
ג. נתון כי הפירמידה $SABCD$ היא פירמידה

ישרה.

(1) הוכח כי הפירמידה $SEFKG$ היא פירמידה

ישרה.

(2) מאיזה סוג המקביליות $ABCD$ ו- $EFGK$?



3. במשולש ABC התיכונים נפגשים בנקודה M.

$$\text{נסמן: } \overrightarrow{AB} = \underline{u}, \overrightarrow{AC} = \underline{v}$$

א. הבע את הווקטור $\overrightarrow{AM}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ב נתונים שיעורי שלוש נקודות:

$$A(3, -4, 1), B(4, 1, 8), C(2, 0, 7)$$

(1) הראה שהנקודות לא נמצאות על אותו ישר.

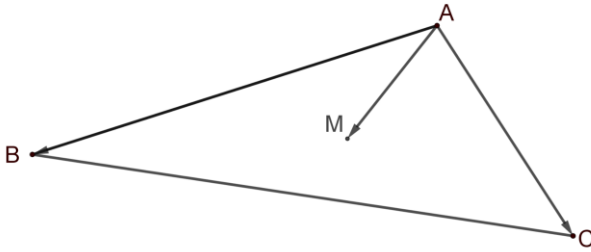
(2) מצא את ההצגה האלגברית של הווקטורים

$$\underline{u} \text{ ו- } \underline{v}$$

(3) בהסתמך על סעיף א' מצא את שיעורי מפגש

התיכונים M של המשולש ABC.

(4) חשב פי כמה גדול שטח המשולש ABC משטח המשולש BMC.



4. במנסרה ישרה הבסיסים הם משולשים שוי

צלעות בעלי צלע שאורכה 3.

אורך המקצוע הצדדי הוא 4.

$$\text{נסמן: } \overrightarrow{AB} = \underline{u}, \overrightarrow{AC} = \underline{v}, \overrightarrow{AA'} = \underline{w}$$

א. הבע את $\overrightarrow{A'B}$ ו- $\overrightarrow{A'C}$ בעזרת $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$.

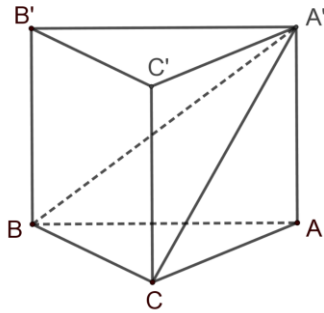
ב. חשב את האורכים של $A'B$ ו- $A'C$.

ג. חשב את:

$$(1) \text{ המכפלה הסקלרית: } \underline{u} \cdot \underline{v}$$

$$(2) \text{ הזווית } \angle BA'C$$

$$(3) \text{ שטח המשולש } BA'C$$



5. בפירמידה ישרה ABCDS הבסיס ABCD

הוא מלבן. SO הוא גובה הפירמידה.

$$\text{נתון: } AB=4, BC=3, SO=5$$

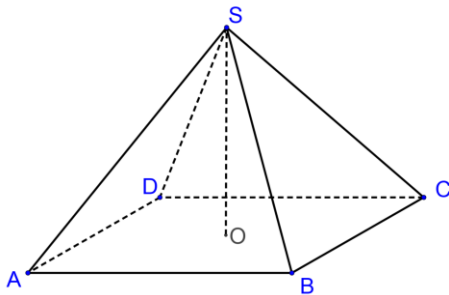
$$\text{נסמן: } \overrightarrow{AB} = \underline{u}, \overrightarrow{BC} = \underline{v}, \overrightarrow{OS} = \underline{w}$$

א. הבע את $\overrightarrow{SB}$ ואת $\overrightarrow{SC}$ בעזרת $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$.

ב. חשב את הזווית $\angle BSC$.

ג. חשב פי כמה קטן שטח המשולש BOC משטח הפאה

SBC.



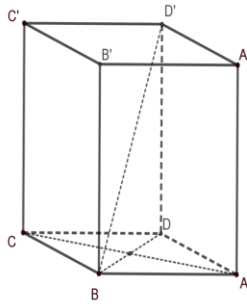
6. נתונות הנקודות $A(-1, -4, 1), B(-2, -3, -3), C(-3, 0, 0), D(2, -7, 3)$.

א. מדוע הנקודות A, B, C קובעות מישור אחד?

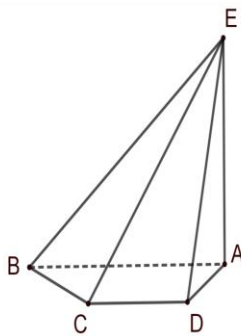
ב. האם הנקודה D נמצאת במישור ABC?

ג. אם הנקודה D נמצאת במישור ABC - האם המרובע ABCD הוא מקבילית?

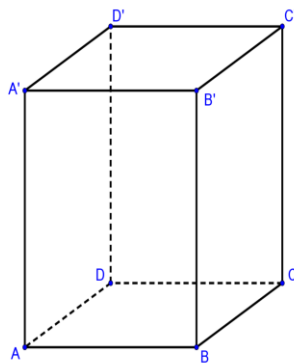
אם הנקודה D לא נמצאת במישור ABC - איזה גוף יוצרות הנקודות הנתונות? האם הגוף מסוג ישר?



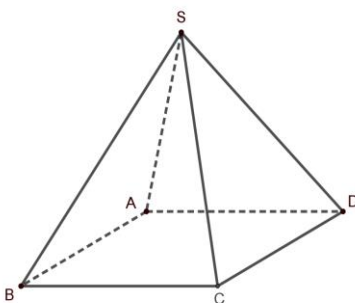
7. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ הבסיס הוא מלבן. אורך אלכסון המלבן ABCD הוא 5 והזווית החדה בין אלכסוני המלבן שווה ל- 60° . הזווית בין אלכסון התיבה BD' לאלכסון הבסיס BD היא 30° .
- א. (1) מדוע משולש BDD' הוא ישר זווית? נמק.
- (2) חשב את אורך המקצוע הצדדי של התיבה.
- ב. חשב את נפח התיבה.
- ג. פי כמה גדול נפח התיבה מנפח הפירמידה $ABDD'$?



8. במרובע ABCD :
 $D(0,-1,1)$, $C(1,-3,-2)$, $B(4,-8,-3)$, $A(2,-4,3)$
 א. (1) מדוע $DC \parallel AB$?
 (2) הוכח שהמרובע הוא טרפז ישר זווית.
 ב. חשב את שטח הטרפז.
 ג. בפירמידה ABCDE
 נתון קודקוד $E(15,-1,1)$.
 (1) הוכח: המקצוע AE בפירמידה ABCDE מאונך למישור הבסיס ABCD.
 (2) מצא את נפח הפירמידה.



9. במנסרה $ABCD A'B'C'D'$ הבסיס ABCD הוא מקבילית.
 נתון: $A(3,3,2)$, $B(5,1,0)$, $D(2,3,1)$, $C'(10,13,-7)$.
 א. מצא את שיעורי הקודקוד C.
 ב. הוכח כי המנסרה היא תיבה.
 ג. חשב את נפח התיבה.



10. בפירמידה מרובעת ABCDS קודקודי הבסיס הם $A(0,0,0)$, $B(4,0,0)$, $C(4,4,0)$, $D(0,4,0)$, וקודקוד הראש הוא $S(2,2,5)$.
 א. הוכח כי הפירמידה ישרה.
 ב. הוכח כי בסיס הפירמידה הוא ריבוע.
 ג. מדוע בסיס הפירמידה נמצא במישור xy?
 ד. חשב את נפח הפירמידה.

11. בפירמידה ABCD :

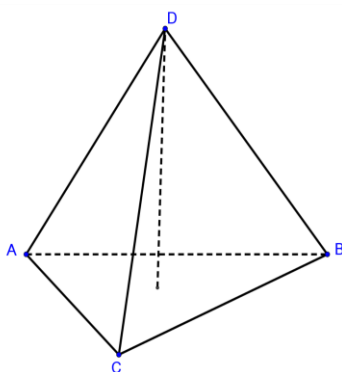
$D(0,6,0)$, $C(-4,3,-1)$, $B(0,1,1)$, $A(-1,1,0)$

א. הוכח כי הפירמידה ישרה.

ב. חשב את הזווית $\angle BAC$ ואת רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC.

ג. מדוע גובה הפירמידה DO מאונך ל-AO?

ד. חשב את נפח החרוט שבסיסו הוא המעגל החוסם את המשולש ABC וראשו בנקודה D.



12.

נתונה פירמידה ABCDE שבסיסה

מקבילית ABCD הנמצאת במישור xy,

וראשה E הנמצא בנקודה $(0,0,w)$,

$w > 0$.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$

נתון: $\underline{v} = (-3,4,0)$, $\underline{u} = (2,3,0)$

אורך הווקטור $\overrightarrow{BE}$ הוא $\sqrt{57}$.

א. מצא את הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ב. חשב את

(1) האורך של גובה הפירמידה.

(2) נפח הפירמידה.

ג. קדקוד הראש של חרוט ישר נמצא בנקודה $S(1,2,w)$ ובסיסו במישור xy.

שטח בסיסו שווה לשטח בסיס הפירמידה הנתונה.

לאיזה משני הגופים נפח גדול יותר – לחרוט או לפירמידה? נמק.

ד. חשב את נפח הגליל הישר שגובהו כגובה החרוט, ורדיוס בסיסו שווה לרדיוס בסיס החרוט.

ה. נתון חרוט ישר נוסף שבסיסו נמצא במישור xy ורדיוס בסיסו קטן פי 2 מרדיוס הבסיס של

החרוט הראשון (מסעיף ג'). קודקודו של החרוט הנוסף נמצא בנקודה $F(-2,4,2w)$.

האם נפחו של החרוט הנוסף שווה לנפח החרוט הקודם, גדול ממנו או קטן ממנו?

העלה השערה ובדוק את נכונותה.

