إضافة كراسة

"متّجهات بمستوى 4 وحدات حسب المنهج الدراسيّ الجديد"

المحتوى

إضافة تمارين للبند 1.1

تمارين مع أشكال في المستوى 3

تعرف على أشكال ومفاهيم في الفراغ، تمارين مع أجسام 5

إضافة تمارين للبند 1.2

جمع وطرح متّجهات 9

إضافة تمارين للبنود 1.3, 4.3

ضرب متّجه في سكالار (ثابت) 10

متّجهات مرتبطة (غير مستقلّة) خطيًّا، التركيب الخطّي للمتجهات.

متّجهان مستقلّان خطيًّا 12

إضافة تمارين للبنود 5.1 – 5.2

زاوية بين متّجهين. الضرب السكالاريّ وصفاته 18

إضافة تمارين للبند 5.3

استعمال الضرب السكالاريّ لحسابات في المستوى والفراغ 20

مستقيم مُعامد للمستوى. منشور قائم. استعمال الضرب السكالاريّ لحسابات في الفراغ 26

تمارين من امتحانات البجروت بموضوع المتّجه بتمثيل هندسيّ 36

إضافة تمارين للبنود 3.2, 4.3

متّجه بتمثيل جبريّ 44

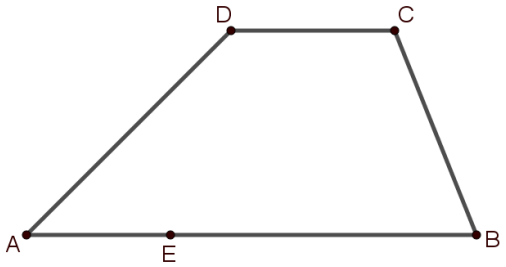
إضافة تمارين للبند 5.4

استعمال الضرب السكالاريّ تمثيل جبريّ 54

تمارين من امتحانات البجروت بموضوع المتّجه بتمثيل جبريّ 64

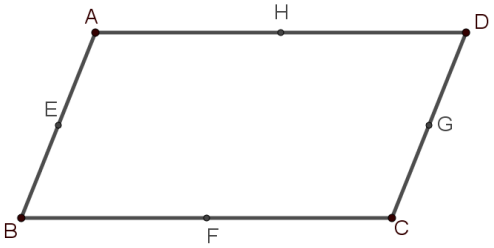
إضافة تمارين للبند 1.1

تمارين مع أشكال في المستوى



1.أ. في شبه المنحرف ABCD تقع النقطة E على القاعدة AB.

جدوا كلّ أزواج المتّجهات المرتبطة خطياً.

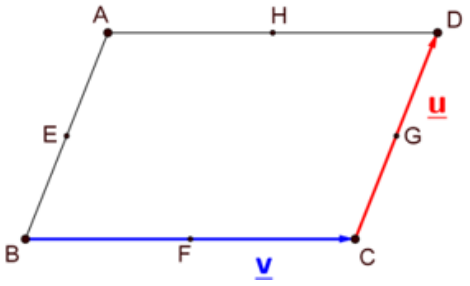


ب. في متوازي الأضلاع ABCD النقاط E, F, G, H

هي منتصفات الأضلاع AB, BC, CD, AD.

جدوا كلّ أزواج المتّجهات المرتبطة خطيا.

(يُمكن إضافة متجهات بواسطة التوصيل بين النقاط المعطاة).



2. في متوازي الأضلاع ABCD النقاط E, F, G, H

هي منتصفات الأضلاع AB،BC، CD، AD.

نرمز: $\underline{u}.\overrightarrow{BC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{CD}$

أ. سجّلوا متّجهًا مُساويًا للمتّجه $\underline{u}$ ومتّجهًا مُساويًا للمتّجه $\underline{v}$.

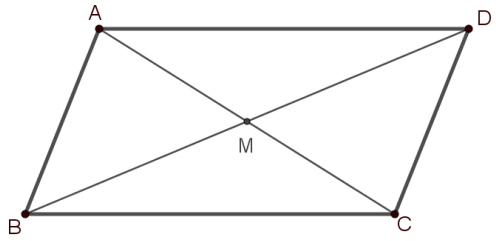
ب. سجّلوا متّجهات مُساوية لـ $-\underline{u}$ وسجّلوا متّجهات مُساوية لـ $-\underline{v}$.

ت. سجّلوا متّجهات مُساوية لـ $\overrightarrow{BF}$ سجّلوا ومتّجهات مُساوية لـ $-\overrightarrow{BF}$.

ث. سجّلوا متّجهات مُساوية للمتّجه $\overrightarrow{CG}$ و سجّلوا متّجهات مُساوية لـ $-\overrightarrow{CG}$.

ج. صلوا بين نقاط تظهر في الرسم للحصول على متّجهات متساوية ومتّجهات متضادة . سجّلوا المتّجهات.

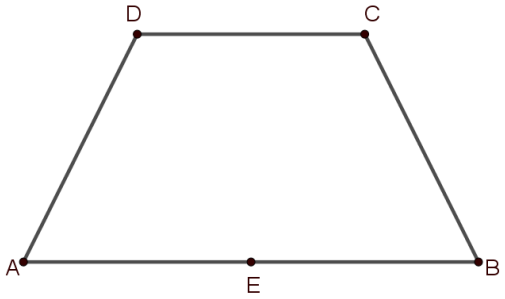
3. في متوازي الأضلاع ABCD يلتقي القطران في النقطة M.



أ. سجّلوا متّجهات مرتبطة خطيّا بالمتجه $\overrightarrow{AM}$.

ب. سجّلوا متّجهًا مساويًا للمتّجه $\overrightarrow{AM}$ ومتّجهًا مساويًا للمتّجه $-\overrightarrow{AM}$ ت. سجّلوا ثلاثة أزواج من المتّجهات المتساوية لا تشمل المتّجه .

ث. سجّلوا ثلاثة أزواج من المتّجهات المتضادة.



4. في شبه المنحرف المتساوي الساقين ABCD النقطة E هي منتصف القاعدة AB (انظروا الرسم).

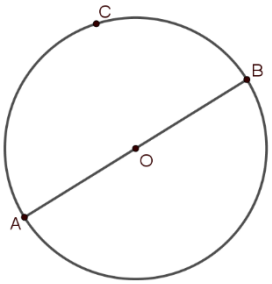
معطى $AE = DC$. نرمز: $\overrightarrow{AE} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$

أ. سجّلوا كلّ المتّجهات المُساوية لـ $\underline{u}$.

ب. سجّلوا كلّ المتّجهات المُساوية لـ $-\underline{v}$.

ت. سجّلوا خمسة أزواج من المتّجهات المرتبطة خطيّا .

ث. هل صحيح أنّ: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ؟ علّلوا.



5. AB هو قطر في دائرة مركزها O.

النقطة C تقع على محيط الدائرة.

أ. هل صحيح:

(1) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BO}$ ؟ (2) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$ ؟ (3) $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right|$ ؟

6. أعطوا أمثلة لأشكال مع متجهات متساوية، متضادة ومرتبطة خطيّا.

التعرف على أجسام ومصطلحات أساسيّة في الفراغ

مواضيع:

<u>خواص الأجسام:</u>

منشور (ليس فقط قائم).

حالات خاصة من المنشور: متوازي مستطيلات، صندوق، مكعّب.

هرم (ليس فقط قائم)

هرم قائم.

<u>مصطلحات أساسيّة في الفراغ:</u>

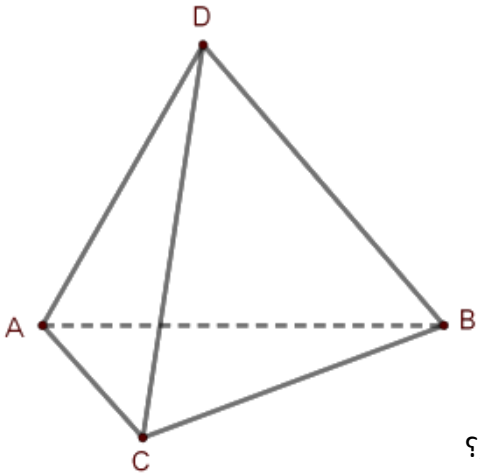
تحديد مستوى (بواسطة مستقيمان متقاطعان، ثلاث نقاط لا تقع على مستقيم واحد، مستقيم ونقطة خارج المستقيم، مستقيمان متوازيان).

الوضع المتبادل بين مستقيم ومستوى (مستقيم مُحتوى (محويّ) في المستوى، مستقيم ومستوى يتقاطعان في نقطة ، مستقيم ومستوى متوازيان).

الوضع المتبادل بين مستويين (مستويان يتقاطعان ومستقيم قاطع، مستويان متوازيان).

الوضع المتبادل بين مستقيمين (متقاطعان، متوازيان، متصالبان).

تمارين إضافيّة



7. أمامكم رسم لهرم ثلاثيّ ABCD.

أ. مثّلوا مستوى قاعدة الهرم بواسطة:

- مستقيمين متقاطعين.

- ثلاث نقاط لا تقع على مستقيم واحد.

-مستقيم ونقطة خارج المستقيم.

ب. ما الوضع المتبادل بين المستوى ADC والمستوى ABC؟

ت. ما هي المستويات التي تحقق أنّ المستقيم BC هو مستقيم تقاطعهم؟

ث. ما هو الوضع المتبادل

(1) بين المستقيم BD والمستوى BDC؟

(2) بين المستقيم BD والمستوى ABC؟

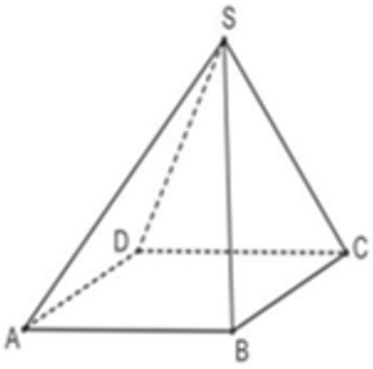
(3) بين المستقيم AC والمستقيم BD?

ج. النقطتان E و F هما منتصفا الضلعين BD و CD.

(1) ما هو الوضع المتبادل بين المستقيم EF والمستقيم BC؟

(2) ما هو الوضع المتبادل بين المستقيم EF والمستوى ADC؟

(3) ما هو الوضع المتبادل بين المستقيم EF والمستوى ABC؟



8. قاعدة الهرم SABCD هي متوازي أضلاع ABCD.

أ. (1) سجّلوا نقطة ومستقيم يُمكن بواسطتهما تحديد مستوى القاعدة.

(2) سجّلوا مستقيمين متقاطعين يُمكن بواسطتهما تحديد مستوى القاعدة.

(3) سجّلوا مستقيمين متوازيين يُمكن بواسطتهما تحديد مستوى القاعدة.

ب. لأيّ مستويين، المستقيم AB هو خط تقاطع ؟

ت. ما هو الوضع المتبادل:

(1) بين مستوى القاعدة ومستوى SAB؟ إذا كانا متقاطعين، سجّلوا مستقيم التقاطع.

(2) بين المستقيم DC ومستوى القاعدة؟

(3) بين المستقيم DC ومستوى SAB؟

(4) بين المستقيم DC والمستقيم SB؟

9. معطى متوازي مستطيلات $ABCDA'B'C'D'$.

أ. (1) سجّلوا نقطة ومستقيم يُمكن بواسطتهما تعريف مستوى القاعدة $ABCD$.

(2) سجّلوا مستقيمين متقاطعين يُمكن بواسطتهما تعريف مستوى القاعدة $ABCD$.

(3) سجّلوا مستقيمين متوازيين يُمكن بواسطتهما تعريف مستوى القاعدة $ABCD$.

ب. المستقيم 'BB هو مستقيم التقاطع بين المستويين _____.

ت. ما هو الوضع المتبادل:

(1) بين المستوى القاعدة ABCD والمستوى $B'C'CB$؟ إذا كانا متقاطعين، سجّلوا مستقيم التقاطع.

(2) بين المستويين ABCD و $A'B'C'D'$؟

(3) بين المستقيم AD والمستوى $AA'D'D$؟

(4) بين المستقيم 'AC والمستوى ABCD؟

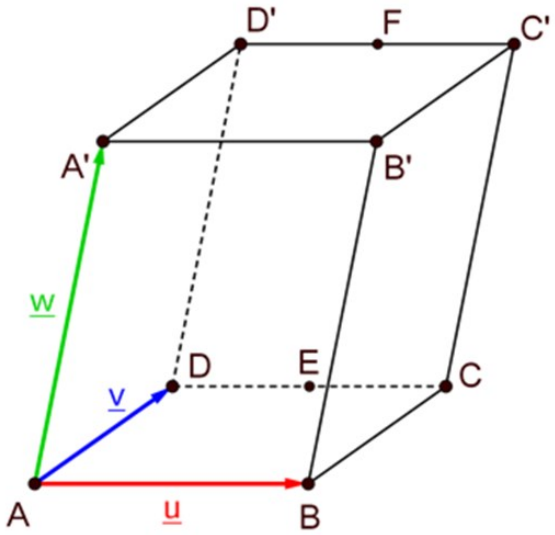
(5) بين المستقيم $A'D'$ والمستوى ABCD؟

(6) بين المستقيم AC والمستقيم $B'D'$؟

ث. (1) في أيّ مستويات تقع النقطة A؟

(2) في أيّ مستويات لا تقع النقطة A؟

10. معطى متوازي مستطيلات



$ABCDA'B'C'D'$.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$

أ. سجّلوا المتّجهات المساوية للمتّجه:

(1) $\underline{u}$ (2) $\underline{v}$ (3) $\underline{w}$ (4) $-\underline{v}$ (5) $-\underline{w}$.

ب. النقطتان E و F هما منتصفا الضلعين DC

و $D'C'$ على التلاؤم.

(1) سجّلوا كلّ المتّجهات المرتبطة خطيّا بالمتّجه $\overrightarrow{DE}$.

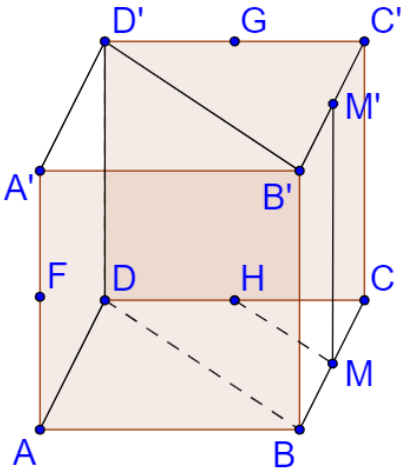
(2) سجّلوا كلّ المتّجهات المساوية للمتّجه $\overrightarrow{DE}$.

(3) سجّلوا كلّ المتّجهات المضادة للمتّجه $\overrightarrow{FE}$.

ت. (1) أيّ مستويات تُعرّف المتجهين $\underline{u}$ و $\underline{v}$ ؟

(2) ما هو الوضع المتبادل بين هذين المستويين؟

11. في المكعّب $ABCDA'B'C'D'$ النقاط MH , M' , F , G هي منتصفات القطع، كما هو مبيّن في الرسم أمامكم.



أ. سجّلوا كلّ المتّجهات المساوية للمتّجه $\overrightarrow{M'C'}$.

ب. (1) سجّلوا كلّ المتّجهات المرتبطة خطيّا بالمتّجه $\overrightarrow{AF}$.

(2) سجّلوا كلّ المتّجهات المساوية للمتّجه $\overrightarrow{AF}$.

ت. (1) سجّلوا كلّ المتّجهات المرتبطة خطيّا بالمتّجه $\overrightarrow{DH}$.

(2) سجّلوا كلّ المتّجهات المساوية للمتّجه $-\overrightarrow{DH}$.

ث. (1) سجّلوا كلّ المتّجهات المرتبطة خطيّا بالمتّجه $\overrightarrow{GH}$.

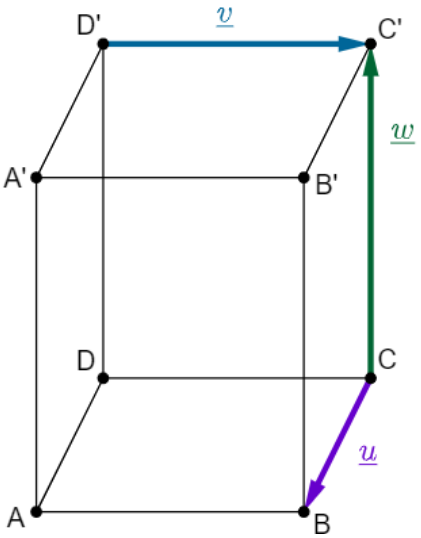
(2) سجّلوا كلّ المتّجهات التي المُضادة للمتّجه $\overrightarrow{GH}$.

ج. . (1) سجّلوا كلّ المتّجهات المرتبطة خطيّا بالمتّجه $\overrightarrow{HM}$.

(2) سجّلوا كلّ المتّجهات المساوية للمتّجه $-\overrightarrow{HM}$.

12. في الصندوق $ABCDA'B'C'D'$

نرمز: $\overrightarrow{CB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{CC'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{D'C'} = \underline{v}$,



أ. سجّلوا بواسطة الرؤوس كلّ المتّجهات المساوية للمتّجهات:

(1) $-\underline{u}$ (2) $\underline{v}$ (3) $-\underline{w}$.

ب. هل صحيح:

(1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$?

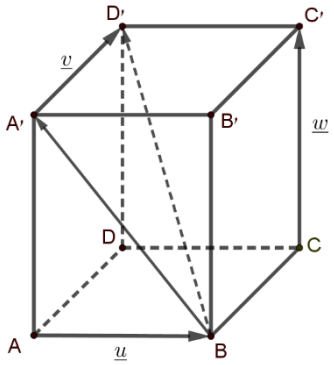
(2) $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$?

(3) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$?

ت. هل إجاباتكم للبنود السابقة ستتغير لو كان معطى متوازي مستطلات مكان صندوق؟

إضافة تمارين للبند 1.2

جمع وطرح متّجهات



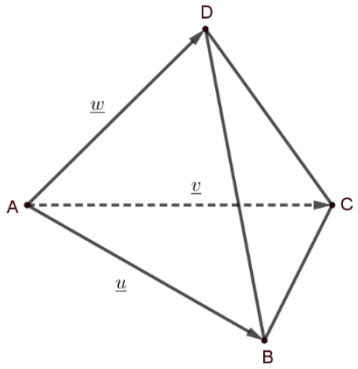
1. في الصندوق $ABCDA'B'C'D'$

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.$\overrightarrow{A'D'} = \underline{v}$, $\overrightarrow{CC'} = \underline{w}$,

عبّروا عن المتّجهات التالية بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

(1) $\overrightarrow{BA}$ (2) $\overrightarrow{BD'}$ (3) $\overrightarrow{AC}$ (4) $\overrightarrow{AC'}$

(5) $\overrightarrow{BC'}$ (6) $\overrightarrow{DB'}$



2. في الهرم الثلاثيّ $ABCD$:

$\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.$\overrightarrow{AD} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$,

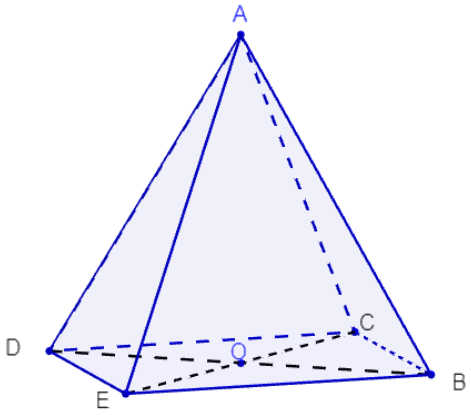
عبّروا عن المتّجهات التالية بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

(1) $\overrightarrow{BD}$ (2) $\overrightarrow{DB}$ (3) $\overrightarrow{CB}$ (4) $\overrightarrow{DC}$

3. (من אתגר 5)

قاعدة الهرم ABCDE هي متوازي أضلاع ABCD.

O نقطة التقاء قطريّ متوازي الأضلاع (أنظروا الرسم).



جدوا المتّجهات المساوية للمجموع المعطى في كلّ بند واكتبوها بمساعدة النقاط الموجودة في الرسم.

أ. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}$

ب. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED}$

ت. $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{CA}$

ث. $\left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DC}\right) + \overrightarrow{CA}$

ج. $\left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD}\right) + \overrightarrow{EA}$

ح. $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{EA}$

خ. $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{OB}$

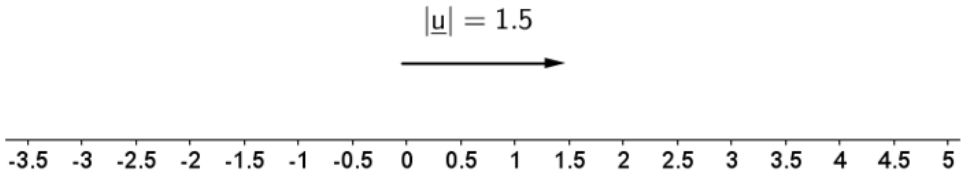
إضافة تمارين للبنود 1.3, 4.3

ضرب متّجه بسكلار (ثابت)

1. في الرسم أمامك معطى المتّجه $\underline{u}$.

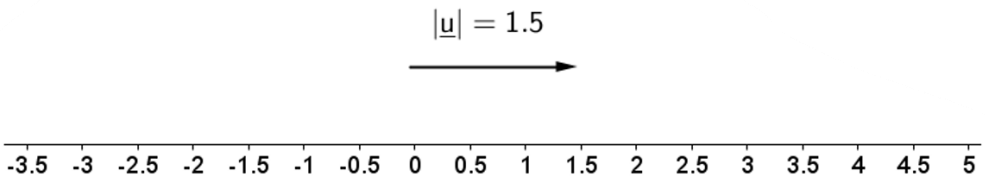
- ارسموا المتّجهات التالية:

$$5\frac{1}{3}\underline{u}\ ,\ 1\frac{1}{3}\underline{u}\ ,\ \frac{1}{3}\underline{u}\ ,\ 5\underline{u}\ ,\ 3\underline{u}$$



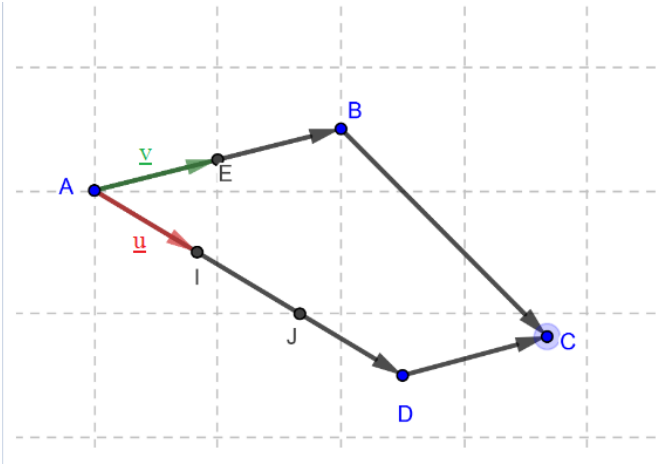
- ارسموا المتّجهات التالية:

$$-3\frac{1}{3}\underline{u}\ ,\ -1\frac{1}{3}\underline{u}\ ,\ -4\underline{u}\ ,\ -2\underline{u}$$



2. تمثيل لضرب متّجه بسكلار (ثابت) من אתגר 5.

3. (المصدر: الكامبوس)



في الشكل الرباعيّ ABCD:

E منتصف الضلع AB،

I, J نقطتان تقسمان الضلع AD لثلاثة قطع متساوية في الطول، أيّ: $AI = IJ = JD$.

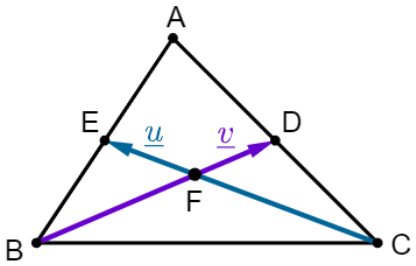
نرمز: $\overrightarrow{AE} = \underline{v}.\overrightarrow{AI} = \underline{u}$,

عبّروا عن المتّجهات التالية بدلالة $\underline{u}$: $\underline{v}$,

(1) $\overrightarrow{AB}$ (2) $\overrightarrow{AD}$ (3) $\overrightarrow{JD}$ (4) $\overrightarrow{AJ}$

(5) $\overrightarrow{IB}$ (6) ד (7) $\overrightarrow{DE}\overrightarrow{BE}$

4. في المثلّث ABC المتوسطان BD و CE يتقاطعان في النقطة F.



نرمز: $\overrightarrow{CE} = \underline{u}$.$\overrightarrow{BD} = \underline{v}$,

عبّروا بدلالة $\underline{vu}$, عن المتّجهات التالية:

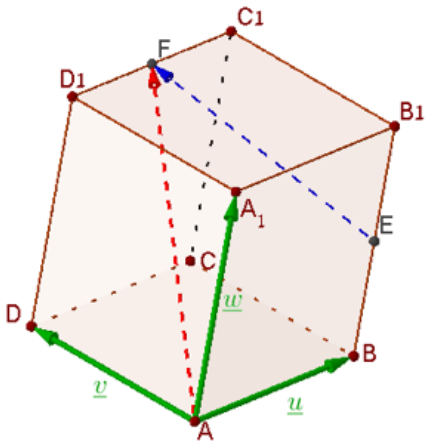
(1) $\overrightarrow{CF}$ (2) $\overrightarrow{FD}$ (3) $\overrightarrow{DC}$ (4) $\overrightarrow{BE}$ (5) $\overrightarrow{BA}$ (6) $\overrightarrow{BC}$

5. في متوازي المستطيلات $ABCDA_1B_1C_1D_1$ النقطتان E و F

هي منتصفات الأضلاع BB_1 و C_1D_1.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ،$\overrightarrow{AA_1} = \underline{w}$ $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$ ،

(انظروا الرسم).

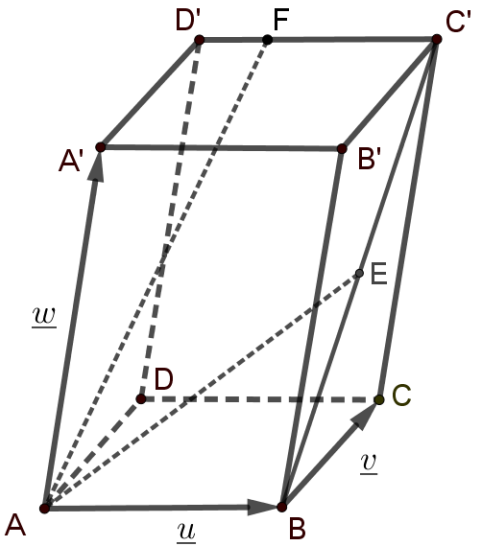


عبّروا بدلالة $\underline{vu}$ ، عن المتّجهات التالية:

(1) $\overrightarrow{EF}$ (2) $\overrightarrow{AF}$ (3) $\overrightarrow{FB}$

6. معطى متوازي مستطيلات $ABCDA'B'C'D'$

.



النقطة E هي نقطة ملتقى الوجه الجانبي $BB'C'C$.

النقطة F تقع على ضلع القاعدة العليا $D'C'$

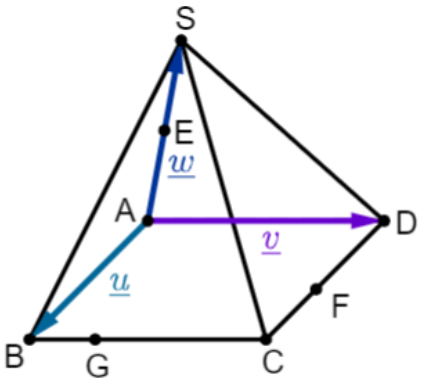
وتقسمه بنسبة $D'F:FC'=1:2$.

نرمز: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$. $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{BC}=\underline{v}$,

عبّروا عن المتّجهات $\overrightarrow{AFBE}$, $\overrightarrow{AE}$, و $\overrightarrow{FE}$

بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

7. (من אתגר 5)



في الهرم الثلاثيّ SABCD القاعدة ABCD هي متوازي أضلاع.

نرمز: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$. $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$,

النقطة E منتصف الضلع الجانبي AS.

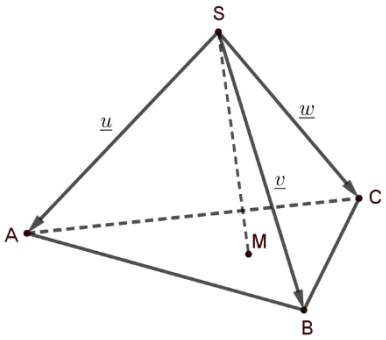
النقطة F تُحقّق: $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

النقطة G تُحقّق: $BC=4BG$.

عبّروا بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$ عن المتّجهات التالية:

(1) $\overrightarrow{CS}$ (2) $\overrightarrow{FG}$ (3) $\overrightarrow{EF}$ (4) $\overrightarrow{EG}$.

8. في الهرم ABCS، نرمز:

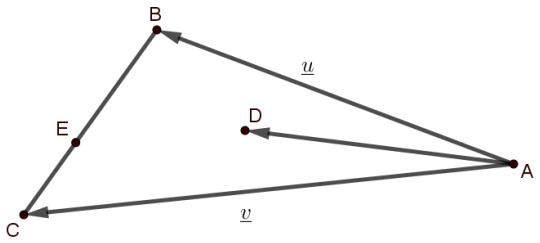


$\overrightarrow{SA}=\underline{u}$, $\overrightarrow{SB}=\underline{v}$, $\overrightarrow{SC}=\underline{w}$.

النقطة M هي نقطة التقاء متوسّطات المثلّث ABC.

عبّروا عن المتّجهات $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}\overrightarrow{AC}$, و $\overrightarrow{SM}$
بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

متجهات مرتبطة خطيا، تركيب خطي لمتجهين غير مرتبطين خطيًّا



9. في المثلّث ABC ، نرمز:

$\overrightarrow{AB} = \underline{u}.\overrightarrow{AC} = \underline{v}$,

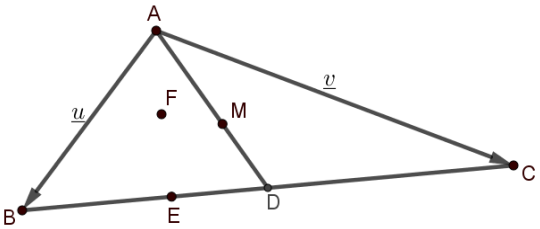
النقطة E تقع على الضلع BC وتُحقّق: $\frac{EC}{BC} = \frac{1}{3}$.

النقطة D تقع داخل المثلّث

ومعلوم أنّ $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v}$.

أ. عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{DE}$ بدلالة $\underline{u}$ و $\underline{v}$.

ب. هل $DE \parallel AC$؟ علّلوا.



10. في المثلّث ABC AD : متوسّط على الضلع BC،

M نقطة التقاء المتوسّطات.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}.\overrightarrow{AC} = \underline{v}$ ،

النقطة E تقع على الضلع BC و $BE:EC = 1:2$.

أ. عبّروا عن المتّجهات $\overrightarrow{AM}\overrightarrow{AD}$, ا- $\overrightarrow{BE}$ بدلالة $\underline{u}$ و $\underline{v}$.

ب. بيّنوا أنّ $ME \parallel AB$.

ت. النقطة F تُحقّق: $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{6}\underline{v}$.

(1) عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{AE}$ بدلالة $\underline{u}$ و $\underline{v}$.

(2) هل النقاط A, F, E تقع على نفس المستقيم؟ علّلوا.

11. في شبه المنحرف $ABCD$ $AD||BC$ ،

معطى: $BC = 3AD$.

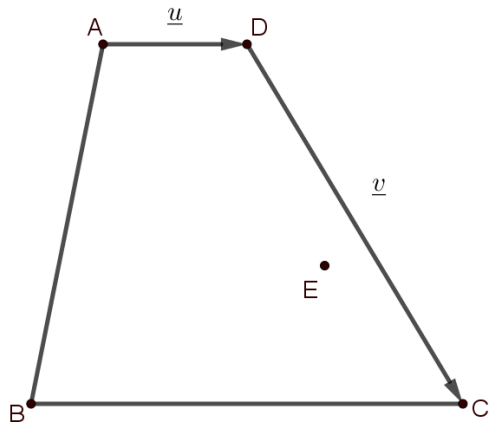
نرمز: $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$. $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$,

النقطة E تُحقّق: $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v}$.

أ. عبّروا بدلالة $\underline{u}$ و $\underline{v}$ عن المتّجهين

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EC}$.

ب. بيّنوا أنّ النقطة E تقع على القطر AC.



12. في المثلّث ABC، نرمز:

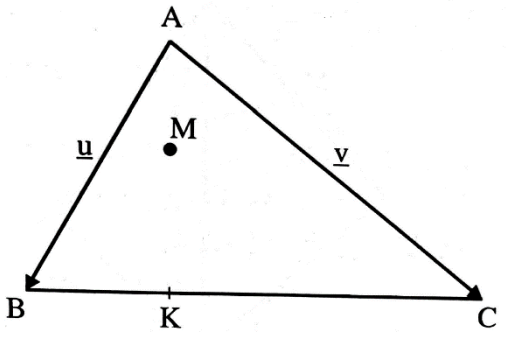
$\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$ ،

النقطة K تقسم BC بنسبة 1:3.

النقطة M تُحقّق: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{12}\underline{v}$.

أ. عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{AK}$ بدلالة $\underline{u}$ و $\underline{v}$.

ب. بيّنوا أن النقاط A, M, K تقع على مستقيم واحد.



13. في شبه المنحرف $BC \parallel AD$ (ABCD)، معطى: $AD = 2BC$

النقطة O تقسم القطر AC

بنسبة $OC : AO = 1 : 2$.

النقطتان M و N هما نقطتا منتصف للضلعين BC و AD

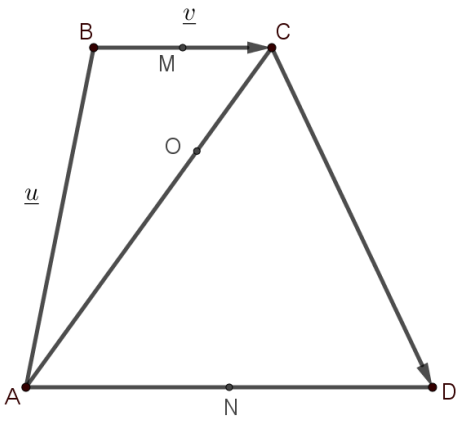
على التلاؤم.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$,

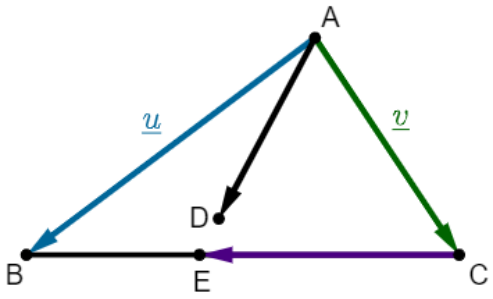
عبّروا عن المتّجهات $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{MN}$ ا- $\overrightarrow{CO}$

كتركيب خطي للمتّجهين $\underline{u}$ و- $\underline{v}$.

ب. بيّنوا أنّ النقاط M، O، N تقع على نفس المستقيم.



14. في المثلّث ABC، نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$



النقطة D تُحقّق: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

أ. إذا كانت النقطة E تُحقّق: $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ أجيبوا عن

الأسئلة التالية:

(1) عبّروا بدلالة $\underline{vu}$, عن المتّجه $\overrightarrow{DE}$.

(2) ماذا يمكن القول عن المتّجهين $\overrightarrow{DE}$ و $\overrightarrow{AB}$؟

(3) سجّلوا النسبة بين طولي القطعتين DE و AB.

ب. إذا كانت النقطة E هي منتصف الضلع BC أجيبوا عن الأسئلة التالية:

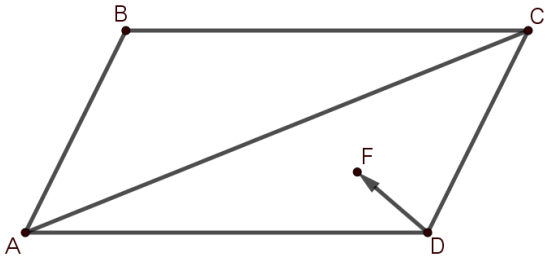
(1) عبّروا بدلالة $\underline{vu}$, عن المتّجه $\overrightarrow{DE}$.

(2) ماذا يمكن القول عن المتّجهين $\overrightarrow{DE}$ ا- $\overrightarrow{AC}$؟

(3) عبّروا عن $\overrightarrow{AC}$ بدلالة $\overrightarrow{DE}$.

15. في متوازي أضلاع ABCD نرمز:

$\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$.



النقطة F تُحقّق: $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{4}\underline{u} + \frac{3}{10}\underline{v}$.

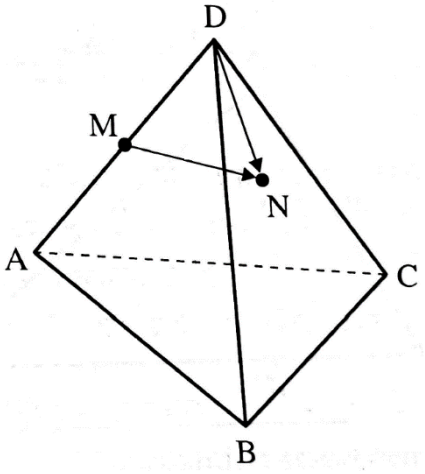
النقطة E تُحقّق: $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

أ. لماذا النقطة E تقع على AC؟

ب. عبّروا عن المتجهان $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{EF}$ كتركيب خطّي للمتّجهين $\underline{u}$ ا- $\underline{v}$.

ت. لماذا EF يوازي AB؟

ث. سجّلوا بكم مرّة طول الضلع AB أكبر من طول القطعة EF.



16. في الهرم الثلاثيّ $ABCD$:

$\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{w}$.

النقطة M تقسم AD بنسبة

$AM:MD = 3:1$.

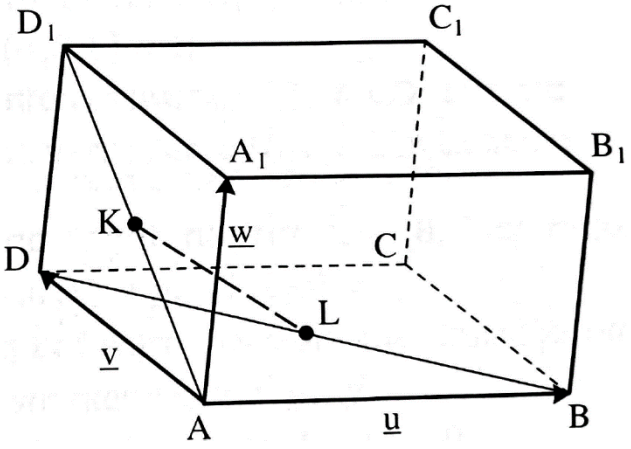
النقطة N تُحقّق: $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{8} \cdot (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$.

أ. في أيّ مستوى تقع النقطة N؟ علّلوا.

ب. عبّروا عن المتّجهات $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ بدلالة

$\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$.

ت. هل MN يوازي المستوى ABC؟ علّلوا.



17. في متوازي السطوح $ABCDA_1B_1C_1D_1$

نرمز: $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{w} = \overrightarrow{AA_1}$, $\underline{v} = \overrightarrow{AD}$,

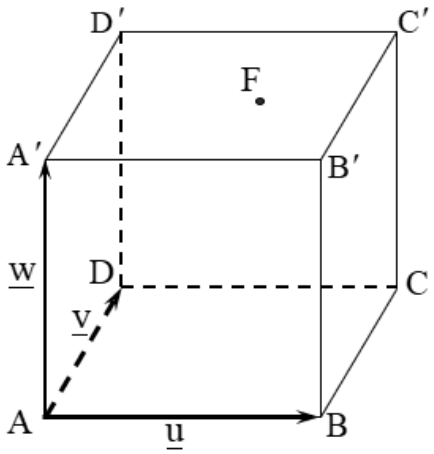
النقطة K هي منتصف القطر AD_1 ،

النقطة L هي منتصف القطر DB.

أ. عبّروا عن المتجهات $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{BL}$, $\overrightarrow{KL}$ -ا بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

ب. هل المستقيم KL يوازي مستوى الوجه الجانبي AA_1B_1B؟ علّلوا.

18. في الصندوق $ABCDA'B'C'D'$



نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$

النقطة F تُحقّق: $\overrightarrow{C'F} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C'B'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{C'D'}$.

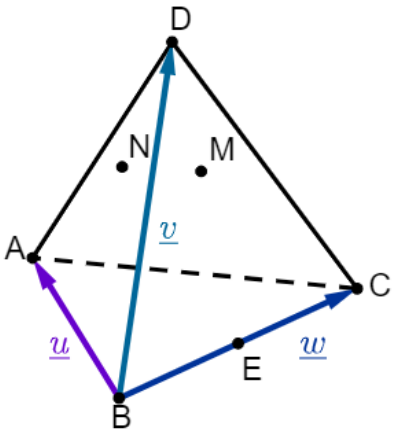
أ. في أيّ مستوى تقع النقطة F ؟ علّلوا.

ب. النقطة P تُحقّق: $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{FC'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DD'}$.

(1) عبروا عن المتّجهين $\overrightarrow{AC'}$ و- $\overrightarrow{AP}$ كتركيب خطّي للمتجهات $\underline{v}$, $\underline{u}$ و $\underline{w}$.

(2) هل النقطة P تقع على القطر AC'؟ علّلوا.

19. (من אתגר 5)



في الهرم الثلاثيّ ABCD النقطة E هي منتصف BC.

نرمز: $\overrightarrow{BA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{w}$, $\overrightarrow{BD} = \underline{v}$

النقطتان M و N تحقّقان: $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{6}\underline{w}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v}$

أ. حدّدوا على أيّ وجه جانبي تقع النقطة M. علّلوا.

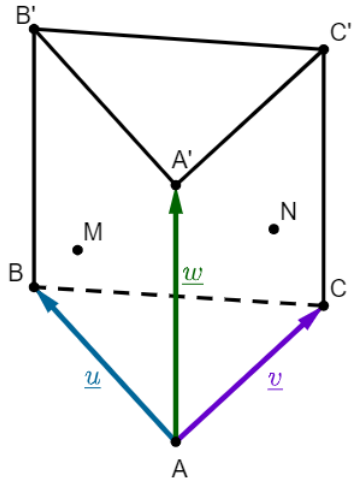
ب. حدّدوا على أيّ وجه جانبي تقع النقطة N. علّلوا.

ت. عبّروا بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$ عن المتجهات التالية:

(1) $\overrightarrow{DE}$ (2) $\overrightarrow{DM}$ (3) $\overrightarrow{EA}$ (4) $\overrightarrow{MN}$

ث. برهنوا أنّ النقاط M, ED , تقع على مستقيم واحد.

ج. برهنوا أنّ : $MN \parallel AE$.



20. في منشور ثلاثيّ $ABCDA'B'C'D'$

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$,

النقطة M تُحقّق: $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{w}$.

النقطة N تُحقّق N. $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$:

أ. (1) على أيّ وجه تقع النقطة M. علّلوا.

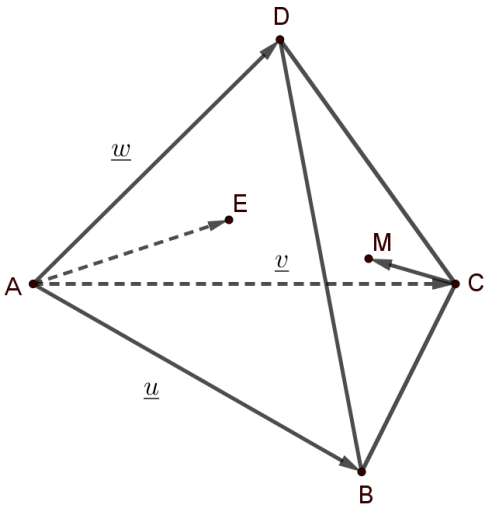
(2) على أيّ وجه تقع النقطة N. علّلوا.

ب. عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{MN}$ بدلالة $\underline{u}$. $\underline{w}$, $\underline{v}$,

ت. لماذا المستقيم MN يوازي المستوى ABC؟

ث. (1) عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{B'C'}$ بدلالة $\underline{u}$. $\underline{w}$, $\underline{v}$,

(2) هل المستقيمان MN و $B'C'$ متوازيان؟ علّلوا.



21. في الهرم الثلاثيّ $ABCD$ ، نرمز:

$\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{AD} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$,

M هي نقطة التقاء متوسطات الوجه الجانبي BDC.

أ. (1) عبّروا عن المتّجهات $\overrightarrow{DB}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CB}$, بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

(2) عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{CM}$ بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

ب. النقطة E تُحقّق: $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

(1) عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{EM}$ بدلالة $\underline{u}$. $\underline{w}$, $\underline{v}$,

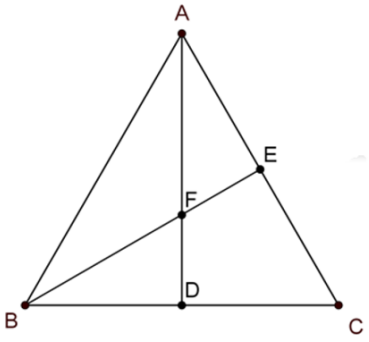
(2) هل المستقيم EM يوازي مستوى القاعدة ABC؟ علّلوا.

إضافة تمارين للبنود 5.1 – 5.2

زاوية بين متّجهين. الضرب السكلاريّ وخصائصه

1. في مثلّث متساوي الأضلاع ABC، يتقاطع الارتفاعان BE و AD - في النقطة F (انظروا الرسم).

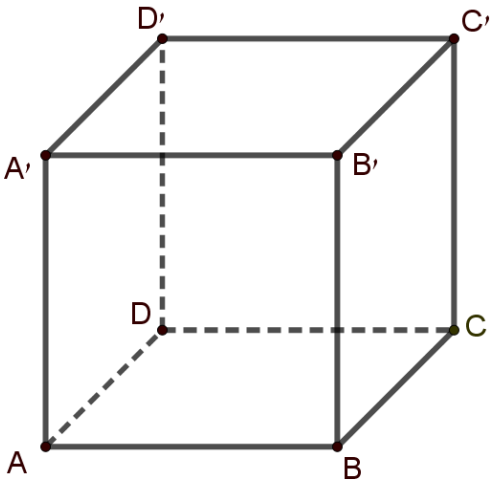
جدوا الزوايا بين المتّجهات التالية:



.$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$
.$\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{FE}$
.$\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{FD}$
.$\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$
.$\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AC}$
.$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$
.$\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BF}$

2. معطى مكعّب $ABCDA'B'C'D'$.

جدوا الزوايا بين المتّجهات التالية:



أ. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$

ب. $\overrightarrow{B'A'}$, $\overrightarrow{BC}$

ت. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$

ث. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'C'}$

ج. $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CC'}$

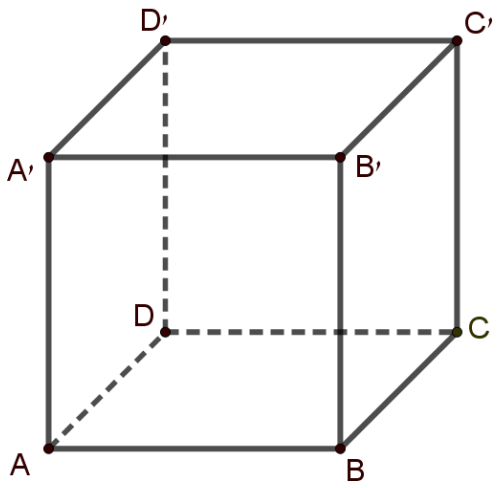
ح. $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$

خ. $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AB}$

د. $\overrightarrow{B'A'}$, $\overrightarrow{AB}$

ذ. $\overrightarrow{D'A'}$, $\overrightarrow{BB'}$

3. في المكعّب $ABCDA'B'C'D'$



طول الضلع يساوي 1.

جدوا قيمة حاصل الضرب السكالاريّ التالي:

أ. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'}$

ب. $\overrightarrow{B'A'} \cdot \overrightarrow{BC}$

ت. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$

ث. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'C'}$

ج. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$

ح. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$

خ. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CC'}$

د. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{D'C'}$

ذ. $\overrightarrow{D'B'} \cdot \overrightarrow{CD}$

4. معطى: $|\underline{v}| = 2|\underline{u}| = 3$, , الزاوية بين $\underline{u}$ و $\underline{v}$ هي $60°$.

أ. احسبوا طول المتّجه $\underline{w} = 3\underline{u} - 4\underline{v}$.

ب. احسبوا الزاوية بين $\underline{u}$ و $\underline{w}$.

ت. (1) احسبوا طولي المتّجهين: $\underline{u} + 3\underline{v}.2\underline{v} - \underline{u}$,

(2) احسبوا الزاوية بين المتّجهين: $\underline{u} + 3\underline{v}.2\underline{v} - \underline{u}$,

5. معطى: $|\underline{v}| = 2|\underline{u}| = 3$, . معطى أنّ المتّجهين $\underline{u} - \underline{v}u + 2\underline{v}$, مُتعامدان.

أ. احسبوا $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

ب. احسبوا الزاوية بين $\underline{u}$ و $\underline{v}$.

6. معطى: $|\underline{v}| = 2|\underline{u}| = 3$, . معلوم أنّ: $|\underline{u} - \underline{v}| = 1$.

أ. احسبوا $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

ب. احسبوا الزاوية بين $\underline{u}$ و $\underline{v}$.

7. معطى المتّجهين $\underline{vu}$, اللذين يُحقّقان: $|\underline{u}| = 1$.$|\underline{v}| = \sqrt{3}$,

الزاوية بين المتّجهين $\underline{vu}$, هي $30°$.

معطى المتّجهين $\underline{ba}$, اللذين يُحقّقان: $\underline{b} = \underline{v} + \underline{u}$.$\underline{a} = \underline{v} - \underline{u}$,

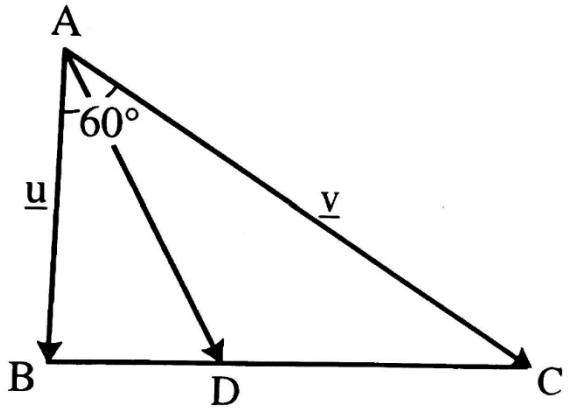
أ. احسبوا طولي المتّجهين: $\underline{a}$. $\underline{b}$,

ب. احسبوا الزاوية بين المتّجهين:$\underline{a}$. $\underline{b}$,

ت. احسبوا مساحة المثلّث الناتج بواسطة المتّجهين $\underline{a}$. $\underline{b}$,

إضافة تمارين للبند 5.3

استعمال الضرب السكالاريّ لحسابات في المستوى والفراغ



8. في المثلّث ABC نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.$\overrightarrow{AC} = \underline{v}$,

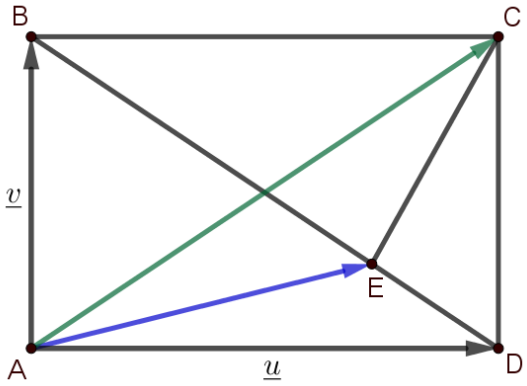
معطى: $|\underline{u}| = 1$.$|\underline{v}| = 2,\ \measuredangle BAC = 60°$,

النقطة D تقع على BC وتُحقّق: $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

أ. عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{AD}$ بدلالة $\underline{u}$ و $\underline{v}$.

ب. احسبوا طول المتّجه $\overrightarrow{AD}$.

ت. احسبوا الزاوية $\measuredangle BAD$.



9. في المستطيل $ABCD$ ، معطى: $AD = 6$, $AB = 4$.

النقطة E تقسم القطر BD

بنسبة $BE:ED = 3:1$.

نرمز: $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$.$\overrightarrow{AB} = \underline{v}$,

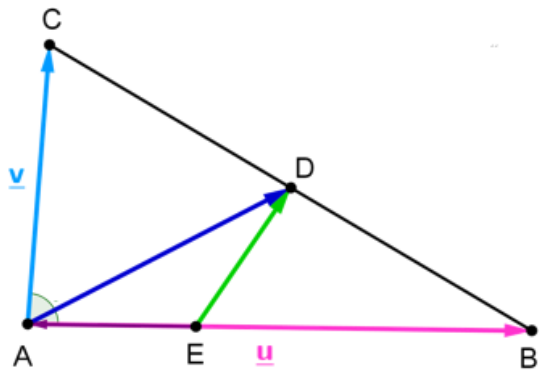
أ. عبّروا عن المتّجهين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}$

بدلالة $\underline{u}$ و $\underline{v}$.

ب. احسبوا طولي المتّجهين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}$.

ت. احسبوا مقدار الزاوية EAC.

ث. احسبوا مساحة المثلّث AEC.



10. النقطة D هي منتصف الضلع BC في المثلّث ABC.

النقطة E تقع على AB بحيث أنّ: $AE:EB = 1:2$.

معطى: $AB = 9$.$AC = 5$,

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.$\overrightarrow{AC} = \underline{v}$,

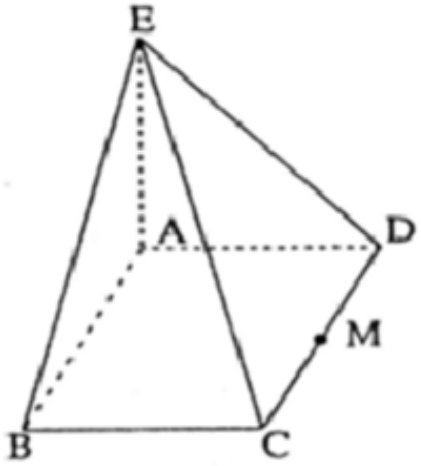
أ. عبّروا عن المتّجهين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{ED}$ بدلالة $\underline{u}$ و $\underline{v}$.

ب. معطى $\left|\overrightarrow{ED}\right| = 3$.

(1) احسبوا $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

(2) احسبوا مساحة المثلّث ABC.

11. معطى هرم رباعيّ $ABCDE$



الذي قاعدته مربّع (انظروا الرسم).

نرمز: $\overrightarrow{AE} = \underline{u}$. $\overrightarrow{AD} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$,

M هي منتصف ضلع القاعدة CD.

أ. عبّروا عن $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EM}$ بدلالة $\underline{u}$. $\underline{w}$, $\underline{v}$,

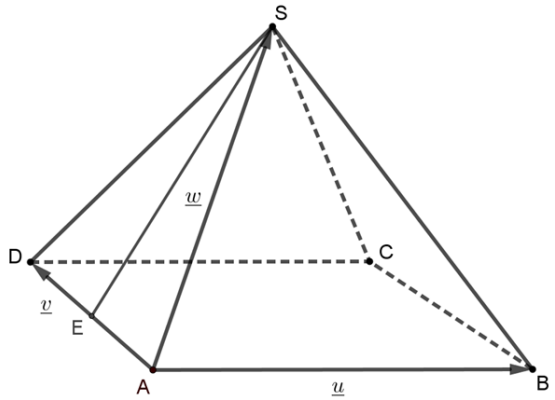
ب. معطى أنّ: $\underline{wu}$, $\underline{v}$, تُعامد بعضها البعض.

وأيضًا $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$.

(1) احسبوا الزاوية $\measuredangle MEB$.

(2) احسبوا مساحة المثلّث MEB.

12. معطى هرم قائم $SABCD$



الذي قاعدته ABCD مربّع (انظروا الرسم).

جميع الوجوه الجانبيّة للهرم

هي مثلّثات متساوية الأضلاع.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$,

النقطة E هي منتصف الضلع AD .

معطى: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 2$.

أ. احسبوا حاصل الضرب السكالاريّ:

$\underline{u} \cdot \underline{w}$, $\underline{v} \cdot \underline{w}$, $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

ب. عبّروا عن $\overrightarrow{SE}$ و $\overrightarrow{SB}$ بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

ت. (1) احسبوا مقدار الزاوية BSE .

(2) احسبوا مساحة المثلّث BSE .

13. في متوازي السطوح $ABCDA'B'C'D'$

$\measuredangle BAD = \measuredangle A'AD = \measuredangle A'AB = 60°$.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$,

معطى: $|\underline{u}| = 2$. $|\underline{w}| = 3$, $|\underline{v}| = 1$,

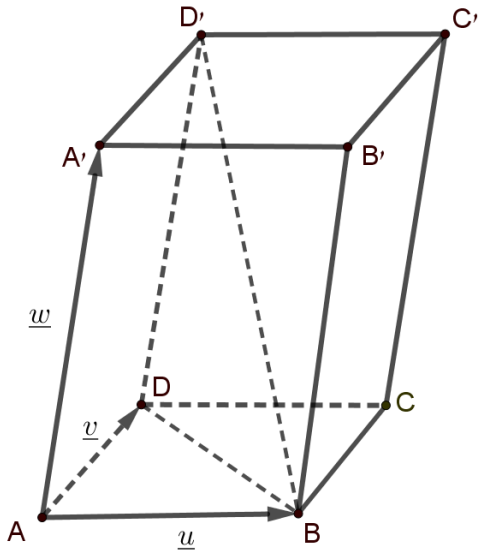
أ. احسبوا: $\underline{u} \cdot \underline{v}$. $\underline{u} \cdot \underline{w}$, $\underline{v} \cdot \underline{w}$,

ب. (1) عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{DB}$ بدلالة $\underline{u}$ و $\underline{v}$.

(2) احسبوا طول المتّجه $\overrightarrow{DB}$.

ت. (1) احسبوا مقدار الزاوية BDD'.

(2) احسبوا مساحة المثلّث BDD' .



14. في الصندوق $ABCDA'B'C'D'$

نرمز: $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$. $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DD'} = \underline{w}$.

معطى: $|\underline{u}| = 3$. $|\underline{w}| = |\underline{v}| = 6$,

أ. عبّروا عن المتّجهات $\overrightarrow{DC'}\overrightarrow{DA'}$, و $\overrightarrow{BD'}$

بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

ب. احسبوا $\left|\overrightarrow{DC'}\right|\left|\overrightarrow{DA'}\right|$, و $\left|\overrightarrow{BD'}\right|$.

ت. (1) احسبوا الزاوية $\measuredangle A'DC'$.

(2) احسبوا مساحة المثلّث $A'DC'$.

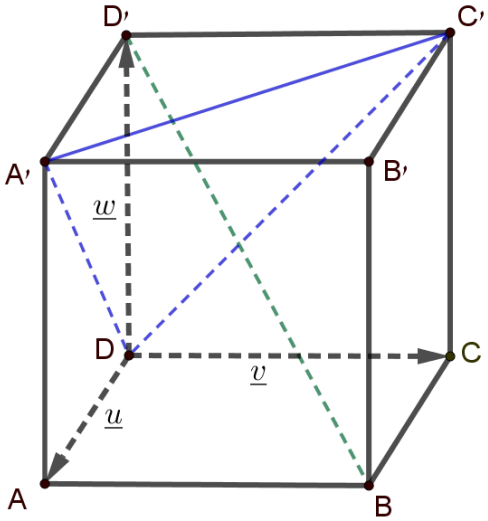
ث. النقطة F تُحقّق: $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC'}$.

(1) لماذا النقطة F تقع في مستوى المثلّث $A'DC'$ ؟

(2) عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{BF}$ بدلالة $\underline{vu}$, او $\underline{w}$.

(3) هل النقطة F تقع على القطر BD'؟ علّلوا.

(4) احسبوا طول القطعة BF.



15. في المكعّب في الرسم طول كلّ ضلع 1.

K منتصف الضلع $D'C'$,

L ملتقى قطريّ الوجه الجانبي $BB'C'C$.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$,

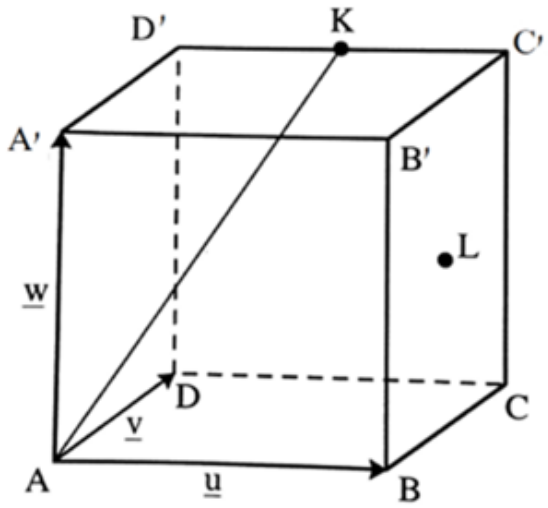
أ. عبّروا عن المتّجهات $\overrightarrow{AK}$ $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{BC'}$,

بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

ب. احسبوا طولي المتّجهين $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AL}$,

ت. (1) احسبوا الزاوية $\measuredangle KAL$.

(2) احسبوا مساحة المثلّث KAL .



16. حلّوا التمرين السابق (رقم 15) بشرط أنّ النقطة K تقسم الضلع $D'C'$ بنسبة $D'K:KC' = 2:3$.

17. (من الكامبوس)

في الصندوق $ABCDA'B'C'D'$

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{CC'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$,

معطى: $|\underline{u}| = 2\sqrt{3}$. $|\underline{w}| = 2\sqrt{2}$, $|\underline{v}| = 4$,

F هي نقطة على الضلع $B'C'$ بحيث أنّ:

$\overrightarrow{B'F} = t\underline{v}$.

أ. عبّروا عن المتّجهين $\overrightarrow{BD'}$ $\overrightarrow{BF}$, بدلالة

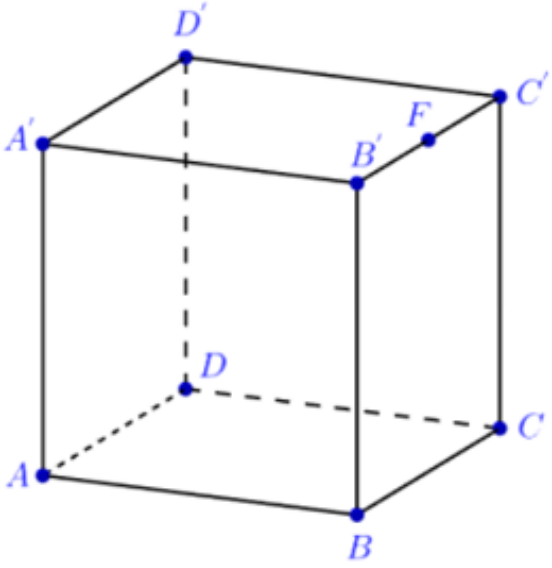
$\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, t.

معطى: $t = \frac{1}{4}$.

ب. سجّلوا في أيّ نسبة تقسم النقطة F الضلع $B'C'$.

ت احسبوا : $\left|\overrightarrow{BF}\right|.\left|\overrightarrow{BD'}\right|$,

ث. احسبوا الزاوية $\measuredangle FBD'$.



18. في الصندوق $ABCDA'B'C'D'$

$AB = 2$. $AA' = 3$, $BC = 1$,

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$,

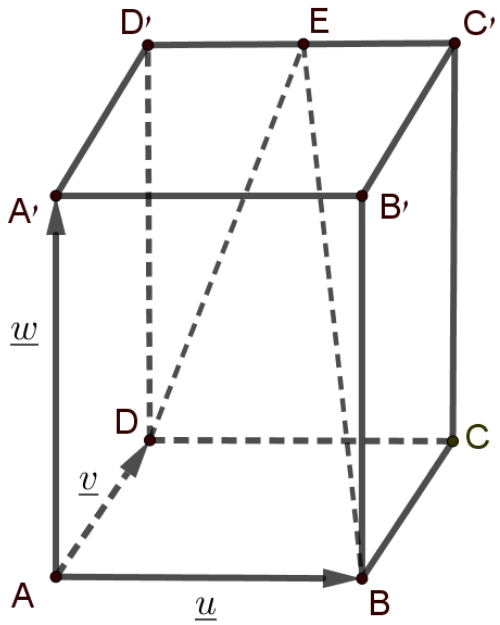
النقطة E تُحقّق: $\overrightarrow{D'E} = \frac{5}{8}\overrightarrow{D'C'}$.

أ. عبّروا عن المتّجهين $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EB}$ بدلالة

$\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$.

ب. برهنوا أنّ المثلّث DEB متساوي الساقين.

ت. احسبوا زوايا المثلّث EBD.



19. في الصندوق $ABCDA'B'C'D'$ النقطة E

هي منتصف القطر $A'D$.

النقطة F تُحقّق: $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$,

معطى: $|\underline{u}| = 1 . |\underline{v}| = |\underline{w}| = 2$,

أ. عبّروا عن المتّجهات $\overrightarrow{AE}$ $\overrightarrow{EF}$ $\overrightarrow{AF}$,

بدلالة $\underline{u} . \underline{w}$, $\underline{v}$,

ب. هل الادّعاءات التالية صحيحة؟ علّلوا إجاباتكم.

(1) المستقيم AB يُعامد المستقيم AE.

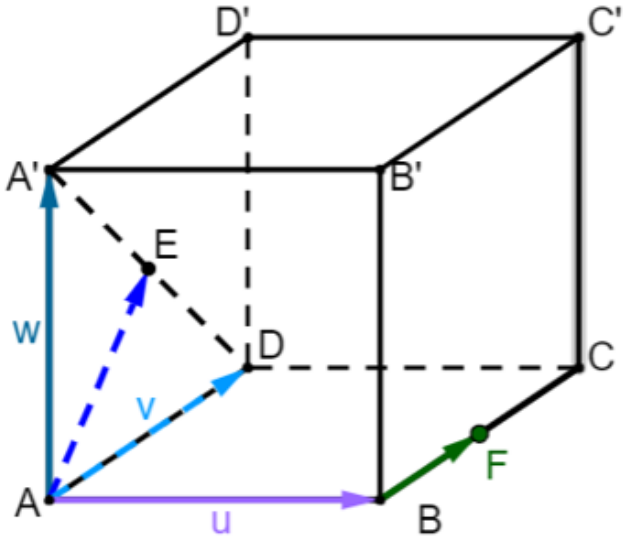
(2) المستقيم EF يُعامد المستقيم AE.

(3) المستقيم EF يوازي مستوى الوجه الجانبي $AA'B'B$؟

ت. احسبوا طولي القطعتين $AE . AF$,

ث. (1) احسبوا الزاوية $\measuredangle EAF$.

(2) احسبوا مساحة المثلّث EAF.



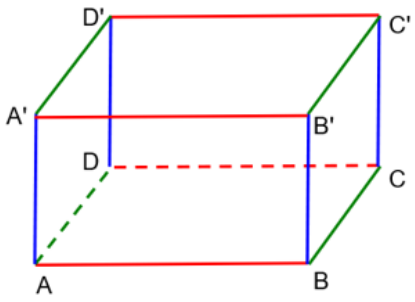
مستقيم مُعامد للمستوى. منشور قائم.

استعمال الضرب السكالاري لحسابات في الفراغ.

تعاريف: مستقيم مُعامد للمستوى، متّجه مُعامد للمستوى.

التّعرّف على المنشور القائم، خواص المنشور القائم.

الشرط الكافي للتعامد بين مستقيم ومستوى والتعامد بين متّجه ومستوى.



20.معطى منشور قائم $ABCDA'B'C'D'$

قاعدته ABCD متوازي أضلاع.

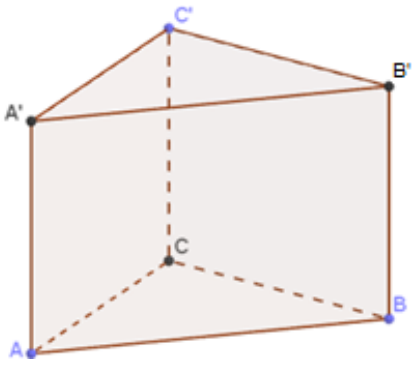
أ.سجّلوا أمثلة لستة أزواج من المتّجهات المُعامدة لبعضها البعض

(يُمكن استخدام الأضلاع والأقطار للأوجه والقواعد).

ب. سجّلوا أمثلة لستة مثلّثات قائمة الزاوية مختلفة

(يُمكن استخدام الأضلاع والأقطار للأوجه والقواعد، أقطار المنشور).

21. معطى منشور قائم ثلاثيّ $ABCA'B'C'$



أ. أجيبوا عن البنود التالية، إذا كان معطى أنّ قاعدة المنشورABC هو مثلّث متساوي الأضلاع.

(1) سجّلوا أمثلة لستة أزواج متّجهات مُتعامدة لبعضها البعض

(مسموح استعمال الأضلاع, قطع خاصة في مثلّثات القاعدة، مثل متوسط، ارتفاع، إلخ...)

(2) سجّلوا أمثلة لستة مثلّثات قائمة الزاوية مختلفة

(مسموح استعمال أضلاع ، أقطار الأوجه، قطع خاصة في مثلّثات القاعدة، مثل متوسط، ارتفاع، إلخ...)

ب. أجيبوا عن الأسئلة للبند "أ"، إذا أعطي أن قاعدة المنشور ABC هي مثلّث قائم الزاوية

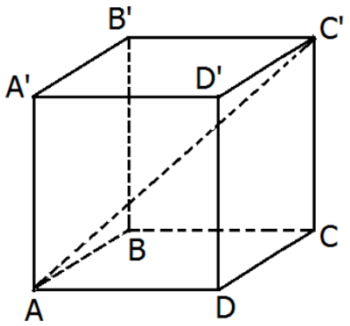
$(\measuredangle ACB = 90°)$.

22. في الصندوق 'ABCDA'B'C'D

معطى: $AD = 12$. $CC' = 14$, $DC = 8$,

أ. احسبوا طول قطر القاعدة AC.

ب احسبوا طول قطر الصندوق AC'.



23. في منشور قائم ثلاثيّ $ABCA'B'C'$ كلّ أضلاعه

مساوية لـ 2.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$,

النقطتان M و N هما منتصفا AB و $B'C'$ بالتلاؤم.

أ. عبّروا عن المتّجهات $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CN}$ و $\overrightarrow{MN}$

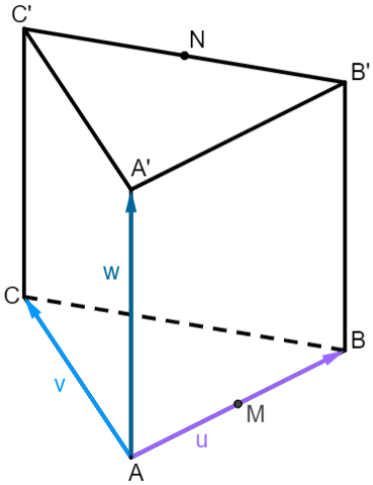
بدلالة $\underline{u}$, $\underline{v}$ و $\underline{w}$.

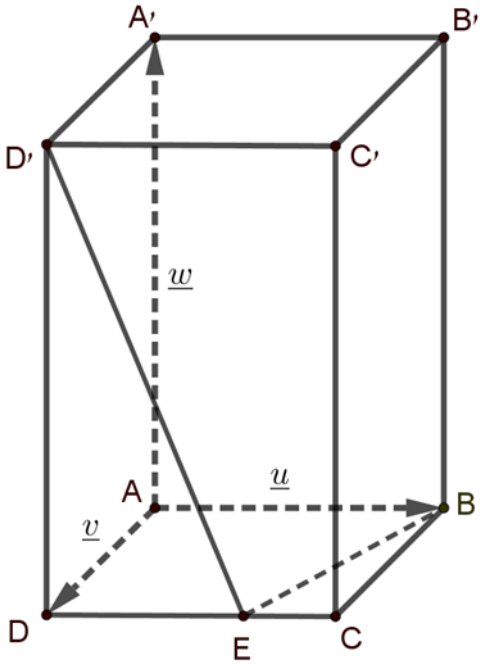
ب. احسبوا حاصل الضرب السكالاري:

(1) $\underline{u} \cdot \underline{v}$ (2) $\underline{u} \cdot \underline{w}$ (3) $\underline{v} \cdot \underline{w}$.

ت. احسبوا الزاوية $\measuredangle CMN$.

ث. احسبوا مساحة المثلّث CMN.





26. معطى منشور قائم $ABCDA'B'C'D'$.

$ABCD$ متوازي أضلاع.

معطى: $AB = 2$, $AD = 1$, $AA' = 4$,

$\measuredangle BAD = 60°$.

النقطة E تقع على الضلع DC وتقسمه بنسبة $DE:EC = 2:1$.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$,

أ. عبّروا عن المتّجهين $\overrightarrow{ED'}$ و $\overrightarrow{EB}$ بدلالة

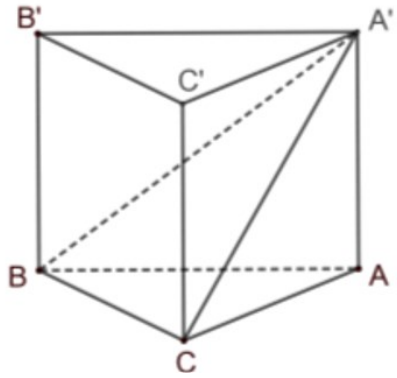
$\underline{u}$, $\underline{v}$ و $\underline{w}$.

ب. (1) احسبوا $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

(2) جدوا طول المتّجه $\overrightarrow{EB}$.

ت. (1) احسبوا مقدار الزاوية $D'EB$.

(2) احسبوا مساحة المثلّث $D'EB$.



27. في منشور قائم $ABCA'B'C'$ ، القاعدتين ABC و $A'B'C'$ هما مثلّثان متساويا الأضلاع لهما ضلع طوله 3.

طول الضلع الجانبيّ 4.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$,

أ. عبّروا عن المتّجهين $\overrightarrow{A'C}$ ا- $\overrightarrow{A'B}$ بدلالة $\underline{w}, \underline{v}, \underline{u}$.

ب. احسبوا طوليّ $A'C$ و $A'B$.

ت. احسبوا:

(1) حاصل الضرب السكالاري: $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

(2) الزاوية $\measuredangle BA'C$.

(3) مساحة المثلّث $BA'C$.

ث. هل المثلّث $BA'C$ قائم الزاوية؟ علّلوا.

28. في منشور قائم $ABCDA'B'C'D'$

القاعدة $ABCD$ هي متوازي أضلاع.

النقطة E هي منتصف الضلع $D'C'$.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$,

معطى: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 8$, $|\underline{w}| = 5$, $\left|\overrightarrow{AE}\right| = 11$,

أ. عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{AE}$ بدلالة $\underline{u}$, $\underline{v}$ و $\underline{w}$.

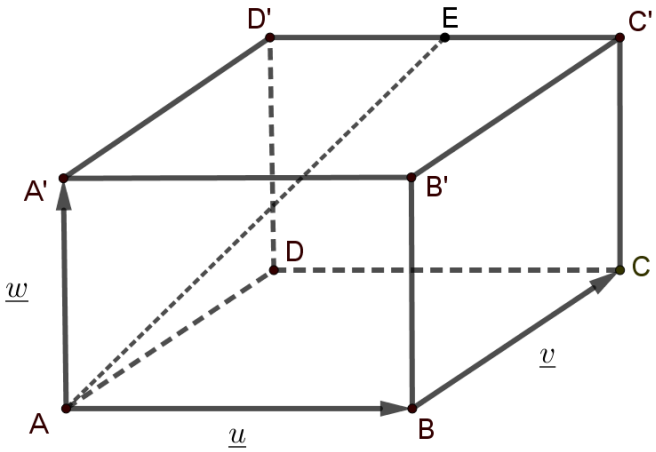
ب. احسبوا $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

ت. احسبوا الزاوية $\measuredangle BAD$.

ث. (1) احسبوا مساحة قاعدة المنشور ABCD.

(2) احسبوا حجم المنشور.

ج. هل $\measuredangle AD'E = 90°$؟ علّلوا.



29. معطى منشور قائم $ABCDA'B'C'D'$.

النقطة F هي منتصف الضلع CC' ،

النقطة E هي التقاء قطريّ الوجه الجانبي $AA'D'D$.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$,

أ. (1) سجّلوا المتّجهين $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{EF}$.

كتركيب خطي بدلالة $\underline{w}, \underline{v}, \underline{u}$.

(2) لماذا EF يوازي المستوى $ABCD$ ؟

(3) هل EF موازٍ لـ AB ؟

النقطة M هي منتصف الضلع BC .

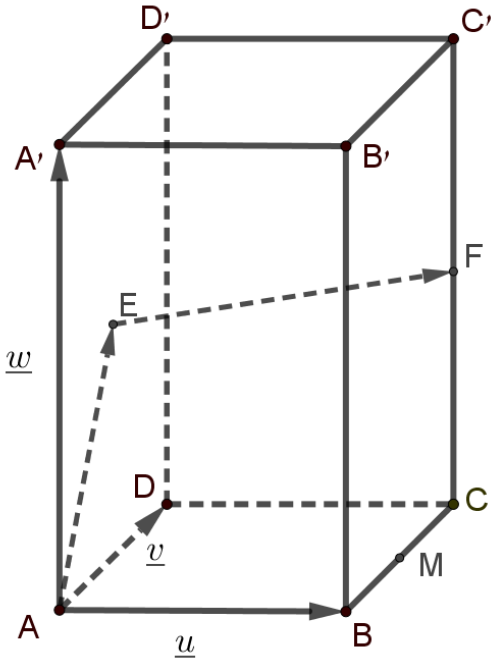
ب. برهنوا أنّ الشكل الرباعيّ $AEFM$ متوازي أضلاع.

معطى: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 2$, $\measuredangle BAD = 45°$, $|\underline{w}| = 4$,

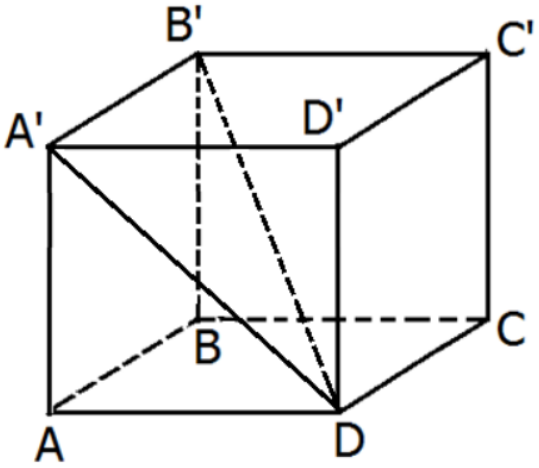
ت. (1) احسبوا $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

(2) احسبوا مقدار الزاوية EAM .

(3) احسبوا مساحة متوازي الأضلاع $AEFM$.



30. في الصندوق
$ABCDA'B'C'D'$



نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$

معطى: $|\underline{u}| = 10$, $|\underline{w}| = 8.|\underline{u}| = 10$, $|\underline{v}| = 12$

أ. عبّروا عن المتّجهين $\overrightarrow{A'D}$ و $\overrightarrow{B'D}$

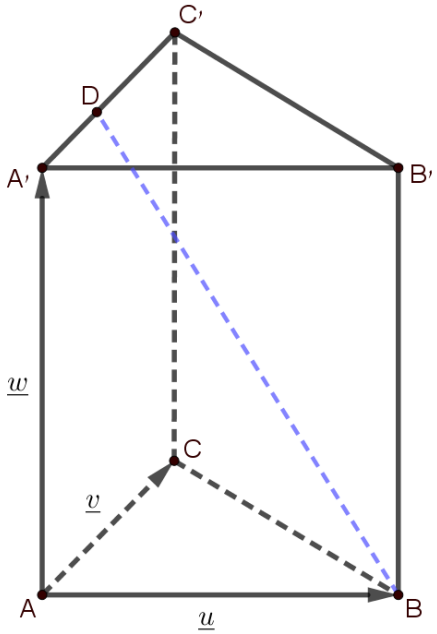
بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

ب. لماذا $\overrightarrow{A'B'}$ مُعامد لمستوى الوجه الجانبي $AA'D'D$ ؟

ت. هل $\overrightarrow{A'B'}$ مُعامد لـ $\overrightarrow{A'D}$ ؟ علّلوا.

ث. احسبوا زاويا المثلّث $A'B'D$.

31. معطى منشور قائم $ABCA'B'C'$ قاعدتيه ABC و $A'B'C'$ هما مثلّثين قائمي الزاوية ومتساوي الساقين.
$(\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C' = 90°)$.



معطى: $AA' = 12AB = 10$., النقطة D تقع على الضلع $A'C'$ وتقسمه بنسبة $A'D:DC' = 2:3$.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$,

أ. (1) عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{BD}$ بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

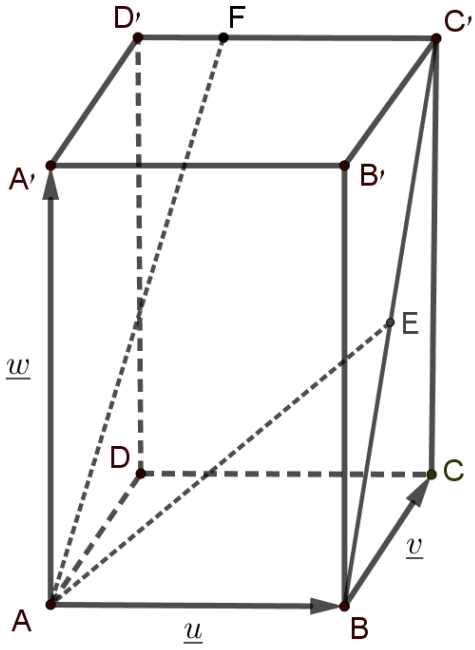
(2) احسبوا طول المتّجه $\overrightarrow{BD}$.

ب. (1) احسبوا الزاوية $\measuredangle ABD$.

(2) احسبوا مساحة المثلّث ABD .

ت. بيّنوا أنّ المثلّث ABD هو قائم الزاوية.

32. معطى منشور قائم $ABCDA'B'C'D'$.



قاعدة المنشور $ABCD$ هي مربّع طول ضلعه 6.

طول الضلع الجانبيّ للمنشور هي 12.

النقطة E التقاء قطريّ الوجه الجانبي $BB'C'C$.

النقطة F تقع على الضلع $D'C'$ وتقسمه بنسبة $D'F:FC'=1:2$.

نرمز: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{BC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$,

أ. عبّروا عن المتّجهات $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{AF}$

بدلالة $\underline{u}$, $\underline{v}$ و $\underline{w}$.

ب. (1) بيّنوا أنّ $\measuredangle ABE=90°$.

(2) احسبوا طول المتّجه $\overrightarrow{BE}$.

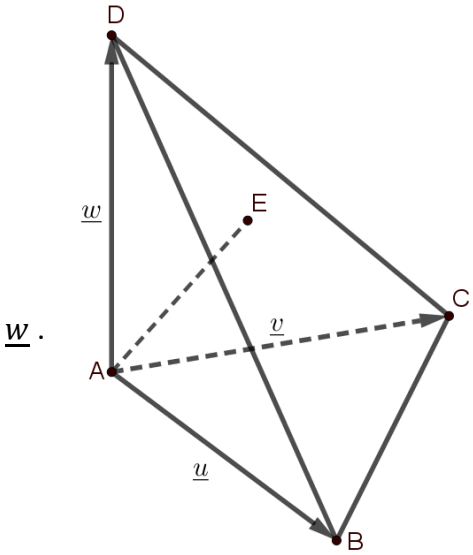
ت. (1) احسبوا طوليّ المتّجهين $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AF}$.

(2) احسبوا مقدار الزاوية EAF.

(3) احسبوا مساحة المثلّث EAF .

33. في هرم ثلاثيّ $ABCD$ الأضلاع

AD، AB و AC مُعامدة لبعضها البعض.



النقطة E تقع على الوجه الجانبي BDC وتُحقّق: $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{9}\underline{u}+\frac{4}{9}\underline{v}+\frac{4}{9}\underline{w}$

نرمز: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$، $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{w}$.

معطى: $|\underline{u}|=2$. $|\underline{v}|=|\underline{w}|=1$.

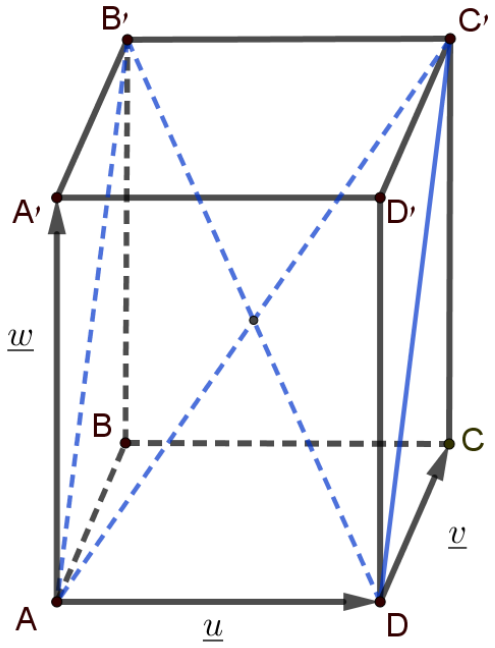
أ. (1) عبّروا عن المتّجهين $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{BC}$ بدلالة $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$.

(2) بيّنوا أنّ المتّجه $\overrightarrow{AE}$ مُعامد لمستوى الوجه الجانبي BDC.

ب. احسبوا $\left|\overrightarrow{AE}\right|$.

ت. (1) لماذا المثلّث ADE قائم الزاوية؟

(2) احسبوا مساحة المثلّث ADE



34. في منشور قائم $ABCDA'B'C'D'$

القاعدة $ABCD$ هي مربّع.

معطى: $AD = 3$, $AA' = 4$.

نرمز: $\underline{u} = \overrightarrow{AD}$, $\underline{w} = \overrightarrow{AA'}$, $\underline{v} = \overrightarrow{DC}$

أ. عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{B'D}$, $\overrightarrow{C'D}$ و $\overrightarrow{AC'}$

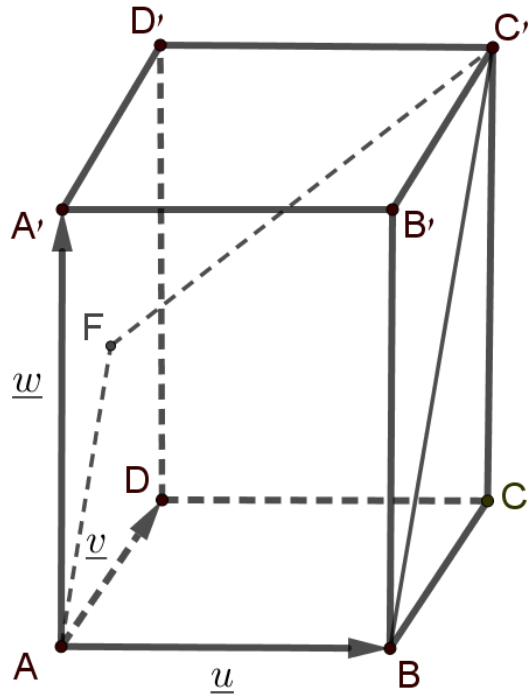
بدلالة $\underline{u}$, $\underline{v}$ و $\underline{w}$.

ب. (1) بيّنوا أنّ $\overrightarrow{C'B'} \perp \overrightarrow{C'D}$.

(2) هل الشكل الرباعيّ $AB'C'D$ مستطيل؟ علّلوا.

ت. O نقطة التقاء قطريّ الشكل الرباعيّ $AB'C'D$.

احسبوا مقدار الزاوية DOC' بين قطريّ الشكل الرباعيّ $AB'C'D$.



35. في الصندوق
$ABCDA'B'C'D'$

نرمز: $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{w} = \overrightarrow{AA'}$, $\underline{v} = \overrightarrow{AD}$

F نقطة التقاء قطريّ الوجه الجانبي $AA'D'D$

معطى: $AB = 6$, $AA' = 8$, $BC = 8$

أ. عبّروا عن المتّجهات $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BC'}$, $\overrightarrow{FC'}$ -ا

كتركيب خطي $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ -ا.

ب. (1) لماذا الشكل الرباعيّ $AFC'B$ شبه منحرف؟

(2) بيّنوا أنّ: $\measuredangle ABC' = 90°$.

ت. احسبوا مساحة شبه المنحرف $AFC'B$.

ث. (1) عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{A'F}$ بدلالة

$\underline{u}$, $\underline{v}$ و $\underline{w}$.

(2) هل المتّجه $\overrightarrow{A'F}$ مُعامد لمستوى شبه المنحرف $AFC'B$ ؟ علّلوا.

36. في الهرم القائم ABCDS القاعدة ABCD

هي مستطيل. SO هو ارتفاع الهرم.

معطى: SO =4 =5, BC=3, AB.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{OS} = \underline{w}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$,

أ. عبّروا عن المتّجهات $\overrightarrow{OB}$ $\overrightarrow{SB}$ $\overrightarrow{OC}$,

و $\overrightarrow{SC}$ بدلالة $\underline{w}, \underline{v}, \underline{u}$.

ب. (1) احسبوا الزاوية $\measuredangle BOC$.

(2) احسبوا الزاوية $\measuredangle BSC$.

ت. احسبوا بكم مرّة مساحة الوجه SBC أكبر من مساحة المثلّث BOC .

ث. احسبوا بكم مرّة حجم الهرم $SABCD$ أكبر من حجم الهرم $SOBC$.

37. في الهرم $SABCD$

القاعدة $ABCD$ هي مربّع طول ضلعه 6.

نرمز: $\overrightarrow{BA} = \underline{u}$. $\overrightarrow{BS} = \underline{w}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$,

معطى: $|\underline{w}| = 6\sqrt{2}$, $\underline{u} \cdot \underline{w} = 12$,

$\underline{v} \cdot \underline{w} = 12$.

النقطة M تُحقّق: $\underline{w} - \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{u}$ $= \overrightarrow{SM}$.

أ. (1) عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{BM}$ بدلالة

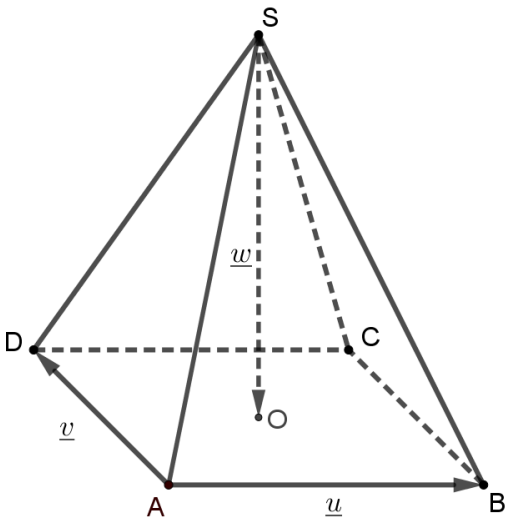
$\underline{u}$, $\underline{v}$ و $\underline{w}$.

(2) لماذا النقطة M تقع على مستوى القاعدة $ABCD$ ؟

ب. بيّنوا أنّ $\overrightarrow{SM}$ مُعامد لمستوى القاعدة $ABCD$.

ت. (1) احسبوا طول المتّجه $\overrightarrow{SM}$.

(2) احسبوا حجم الهرم.



38. في هرم قائم $SABCD$ القاعدة $ABCD$ هي مربّع.

SO هو ارتفاع للهرم طوله يساوي 6 .

معطى أنّ حجم الهرم يساوي 32.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{SO} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$,

أ. احسبوا طول ضلع قاعدة الهرم.

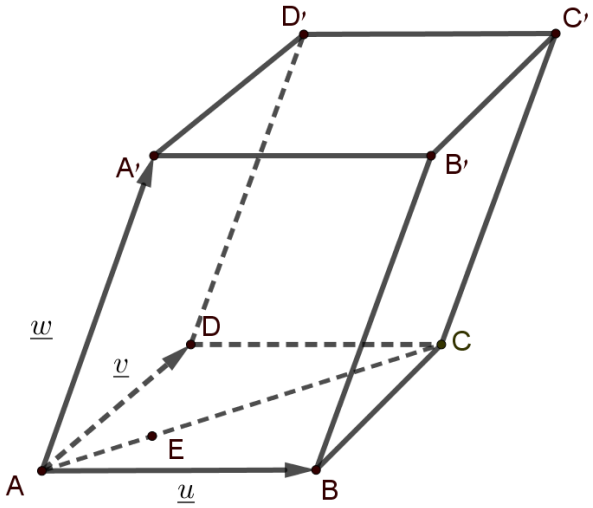
ب. عبّروا عن المتّجهين $\overrightarrow{SA}$ و $\overrightarrow{SB}$ بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

ت. (1) احسبوا طوليّ المتّجهين $\overrightarrow{SA}$ و $\overrightarrow{SB}$.

(2) احسبوا مقدار الزاوية ASB.

ث. (1) احسبوا مساحة المثلّث ASB .

(2) احسبوا مساحة غلاف الهرم.



39. في متوازي السطوح $ABCDA'B'C'D'$

القاعدة $ABCD$ هي معيّن.طول ضلع المعين يساوي 1.

معطى: $\measuredangle BAD = \measuredangle A'AB = \measuredangle A'AD = 60°$,

$AA' = 1.2$.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$,

أ. احسبوا حاصل الضرب السكالاري:

(1) $\underline{u} \cdot \underline{v}$ (2) $\underline{u} \cdot \underline{w}$ (3) $\underline{v} \cdot \underline{w}$.

النقطة E تقع على القطر AC

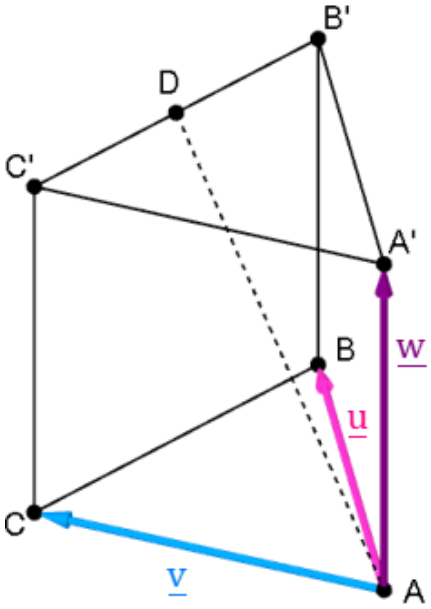
وتقسمه بنسبة $AE:EC = 2:3$.

ب. عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{A'E}$ بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

ت. بيّنوا أنّ $\overrightarrow{A'E}$ مُعامد لمستوى القاعدة $ABCD$.

ث. (1) احسبوا $\left|\overrightarrow{A'E}\right|$.

(2) احسبوا حجم متوازي السطوح.



40. في منشور قائم $ABCA'B'C'$ القاعدتين ABC و $A'B'C'$ هما مثلّثين متساويا الأضلاع.

معطى: $AB = 2$. $AA' = 3$,

النقطة D هي منتصف الضلع $B'C'$.

نرمز: $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$. $\underline{w} = \overrightarrow{AA'}$, $\underline{v} = \overrightarrow{AC}$,

1. احسبوا قيمة حاصل الضرب السكلاري التالي:
2. $\underline{u} \cdot \underline{v}$, $\underline{u} \cdot \underline{w}$, $\underline{v} \cdot \underline{w}$. احسبوا:

ب. (1) عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{AD}$ بدلالة $\underline{u}$, $\underline{v}$ و $\underline{w}$.

(2) احسبوا $\left|\overrightarrow{AD}\right|$.

ت. معطى أنّ النقطة E تُحقّق: $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

(1) على أيّ مستقيم تقع النقطة E؟

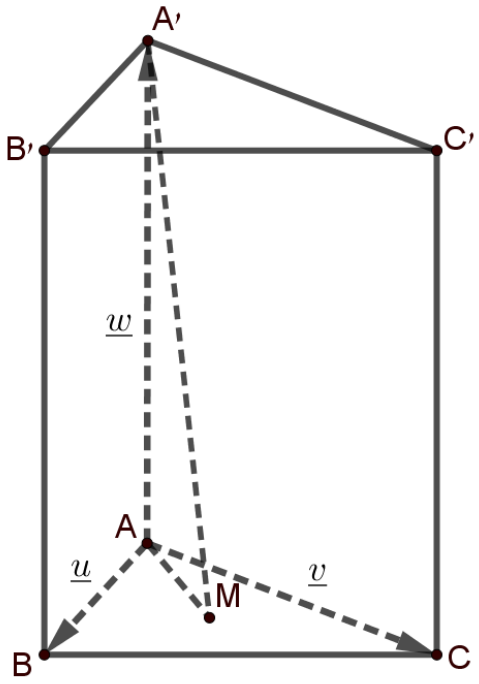
(2) عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{CE}$ بدلالة $\underline{w}.\underline{u}$, $\underline{v}$,

(3) لماذا AD و CE مُتعامدان؟

ث. (1) احسبوا طول المتّجه $\overrightarrow{CE}$

(2) احسبوا مساحة المثلّث ACD.

تمارين من امتحانات البجروت بموضوع المتّجه بتمثيل هندسيّ



1. في منشور قائم $ABCA'B'C'$

القاعدتين هما مثلّثين متساويا الأضلاع .

النقطة M هي التقاء متوسطات المثلّث ABC .

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$,

أ. عبّروا عن المتّجهين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{A'M}$ بدلالة $\underline{u}$,

$\underline{v}$ و $\underline{w}$.

ب. حدّدوا أيّ الادّعاءات التالية صحيحة؟ علّلوا.

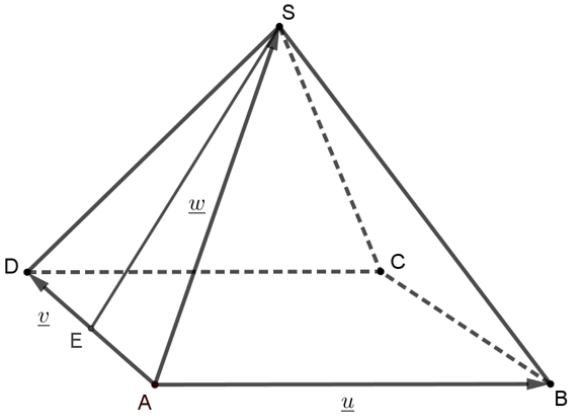
(1) $\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$.

(2) $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$.

(3) $\underline{w} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

ت. معطى: $|\underline{u}| = 1$. $|\underline{w}| = 2$,

احسبوا مقدار الزاوية AMA'.



2. معطى هرم قائم $SABCD$

قاعدته ABCD مربّع (انظروا الرسم).

كلّ الأوجه الجانبيّة للهرم

هي مثلّثات متساوية الأضلاع.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$,

النقطة E هي منتصف الضلع AD .

معطى: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$.

أ. احسبوا حاصل الضرب السكلاري:

$\underline{u} \cdot \underline{w}$, $\underline{v} \cdot \underline{w}$, $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

ب. عبّروا عن المتّجهين $\overrightarrow{SE}$ و $\overrightarrow{SB}$ بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

ت. (1) احسبوا مقدار الزاوية BSE .

(2) احسبوا مساحة المثلّث BSE.

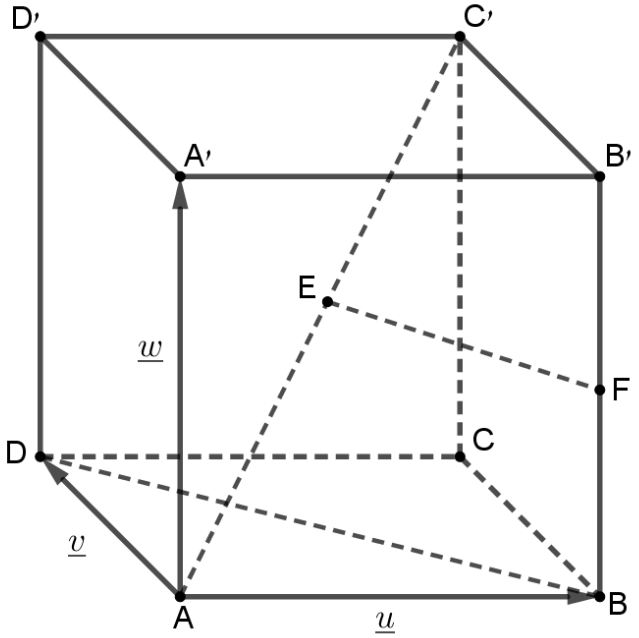
النقطة F هي منتصف الضلع SB .

ث. (1) عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{DF}$ بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

(2) هل المتّجهان $\overrightarrow{DF}$ و $\overrightarrow{SB}$ مّعامدان لبعضهما البعض؟ علّلوا.

3. معطى مكعّب $ABCDA'B'C'D'$

.



النقطة F هي منتصف الضلع
BB' ,

النقطة E هي منتصف القطر AC'.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$,

معطى: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$.

أ. عبّروا عن المتّجهين $\overrightarrow{DB}$ $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AC'}$,

و $\overrightarrow{DE}$ بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

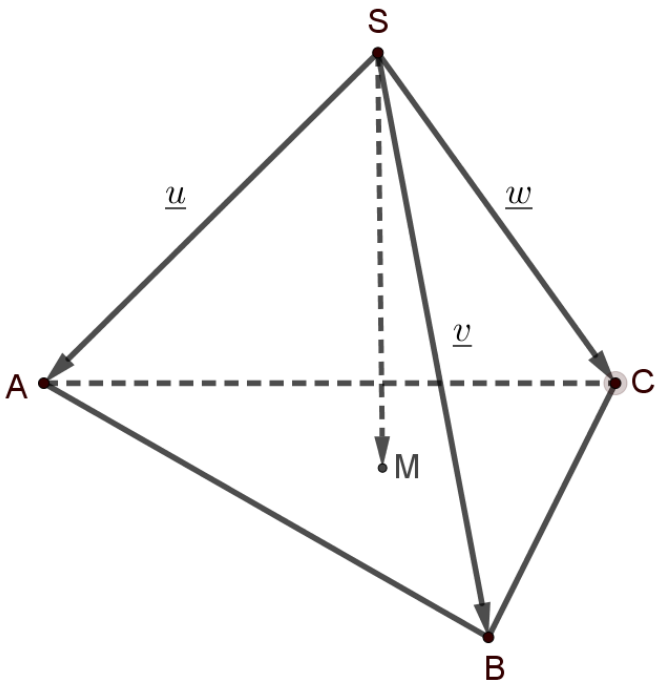
ب. (1) احسبوا طوليّ المتّجهين $\overrightarrow{DE}$ و $\overrightarrow{DB}$.

(2) احسبوا مقدار الزاوية EDB.

ت. (1) فسّروا لماذا المتّجه $\overrightarrow{EF}$ يوازي مستوى القاعدة $ABCD$؟

(2) فسّروا لماذا $EF \parallel DB$ ؟

ث. احسبوا زوايا شبه المنحرف $EDBF$.



4. معطى هرم قائم $SABC$ قاعدته مثلّث ABC (انظروا الرسم).

طول الضلع الجانبيّ للهرم هو 3.

معطى: $\measuredangle ASB = \measuredangle BSC = \measuredangle ASC = 30°$.

نرمز: $\overrightarrow{SA} = \underline{u}$. $\overrightarrow{SB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{SC} = \underline{w}$,

النقطة M تقع في المستوى ABC.

معلوم أنّ: $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$.

أ. احسبوا حاصل الضرب السكالاري:

$\underline{u} \cdot \underline{v}$, $\underline{v} \cdot \underline{w}$, $\underline{u} \cdot \underline{w}$.

ب. (1) عبّروا عن المتّجهين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

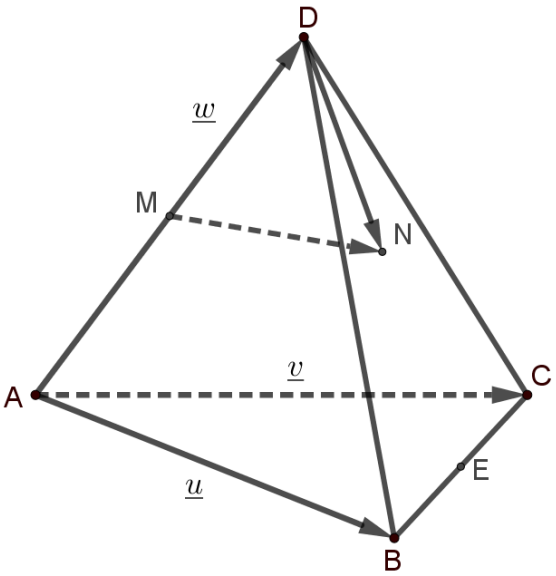
(2) احسبوا طوليّ المتّجهين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

(3) احسبوا مقدار الزاوية BAC .

ت. بيّنوا أنّ $\overrightarrow{SM}$ مُعامد لمستوى ABC.

نرمز: $\left|\overrightarrow{SM}\right| = m$.

ث. عبّروا عن حجم الهرم $SABC$ بدلالة m.



5. في هرم ثلاثيّ $ABCD$:

$\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{w}$.

النقطة M هي منتصف الضلع AD ,

النقطة N تقع على الوجه الجانبي BDC

وتُحقّق: $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{4} \cdot (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$.

أ. (1) عبّروا عن المتّجه $\overrightarrow{MN}$ بدلالة

$\underline{u}$, $\underline{v}$ و $\underline{w}$.

(2) لماذا MN يوازي المستوى ABC؟

(3) هل MN يوازي المستوى AB؟

ب. النقطة E هي منتصف الضلع המקצוע BC.

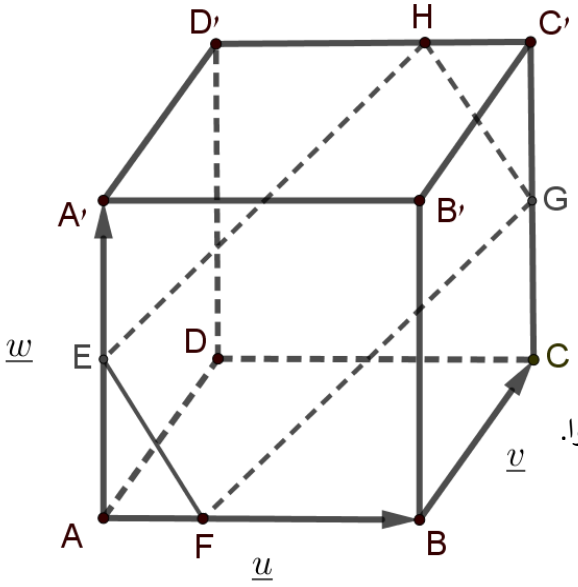
(1) برهنوا أنّ AE و MN متوازيين.

(2) سجّلوا نسبة الطولين $\frac{AE}{MN}$.

ت. معطى: $|\underline{u}||\underline{v}|$ = . بيّنوا أنّ: $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{MN}$ مُتعامدين.

6. معطى مكعّب $ABCDA'B'C'D'$ (انظروا الرسم).

النقطتين E و G هما منتصفا الضلعين AA' و CC' بالتلاؤم.



النقطة F تُحقّق: $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

النقطة H تُحقّق: $\overrightarrow{D'H} = \frac{3}{4}\overrightarrow{D'C'}$.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$,

أ. (1) عبّروا عن المتّجهات $\overrightarrow{HG}\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FG}$, و $\overrightarrow{EH}$

بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

(2) هل الشكل الرباعيّ $EFGH$ هو متوازي أضلاع؟ علّلوا.

حجم المكعّب هو 512.

ب. (1) جدوا طول ضلع المكعّب.

(2) جدوا أطوال المتّجهين $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{EH}$.

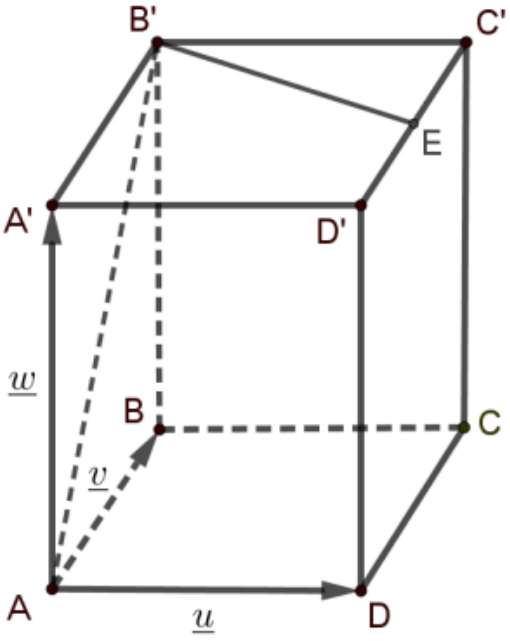
ت. (1) احسبوا مقدار الزاوية HEF.

(2) احسبوا مساحة الشكل الرباعيّ $EFGH$.

7. في منشور ثلاثيّ $ABCDA'B'C'D'$ ، القاعدة $ABCD$ هي معين.

معطى: طول الضلع المعين هو 2، $\measuredangle BAD = 60°$,حجم المنشور هو $8\sqrt{3}$.

النقطة E هي منتصف الضلع $C'D'$.



نرمز: $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$,

أ. عبّروا عن المتّجهات $\overrightarrow{B'A}\overrightarrow{B'E}$, بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$.

ب. أمامكم ثلاثة ادّعاءات (1 – 3) .حدّدوا أيّها صحيحة.

علّلوا.

(1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$

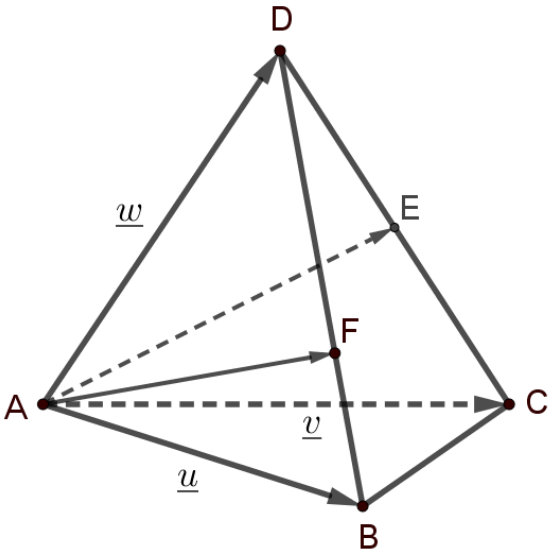
(2) $\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$

(3) $\overrightarrow{B'A}$ يتعامد $\overrightarrow{B'E}$.

ت احسبوا طول ارتفاع المنشور.

ث. (1) احسبوا طول المتّجه $\overrightarrow{B'E}$.

(2) احسبوا مساحة المثلّث $AB'E$.



8. في هرم ثلاثيّ $ABCD$ ،

الوجهين الجانبيين ABD و ACD

هما مثلّثين متساويا الأضلاع (انظروا الرسم).

النقطة E هي منتصف الضلع الجانبي CD.

النقطة F هي منتصف الضلع الجانبي BD

وتقسمه بنسبة $BF:FD = 1:2$.

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. $\overrightarrow{AD} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$,

معطى: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 6$. $\measuredangle BAC = 45°$,

أ. احسبوا حاصل ضرب السكالاري أمامكم:

$\underline{u} \cdot \underline{v}$, $\underline{u} \cdot \underline{w}$, $\underline{v} \cdot \underline{w}$.

ب.(1) عبّروا عن المتّجهين $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{BD}$ بدلالة $\underline{vu}$, , و $\underline{w}$ (إن كانت هناك حاجة).

(2) عبّروا عن المتّجهين $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AF}$ بدلالة $\underline{vu}$, و $\underline{w}$ ((إن كانت هناك حاجة).

ت. أمامكم ثلاثة ادّعاءات (1 – 3) .حدّدوا أيّ منها صحيح وأيّ منها غير صحيح. علّلوا..

(1) $\overrightarrow{CD}$ يُعامد لـ $\overrightarrow{AE}$.

(2) $\overrightarrow{CD}$ يُعامد لـ $\overrightarrow{AF}$.

(3) $\overrightarrow{CD}$ يُعامد المستوى EAF.

إضافة تمارين للبنود 3.2, 4.3

المتّجه بتمثيل جبريّ

مواضيع:

هيئة محاور في الفراغ.

إحداثيات نقطة في الفراغ.

تمثيل جبريّ للمتّجه.

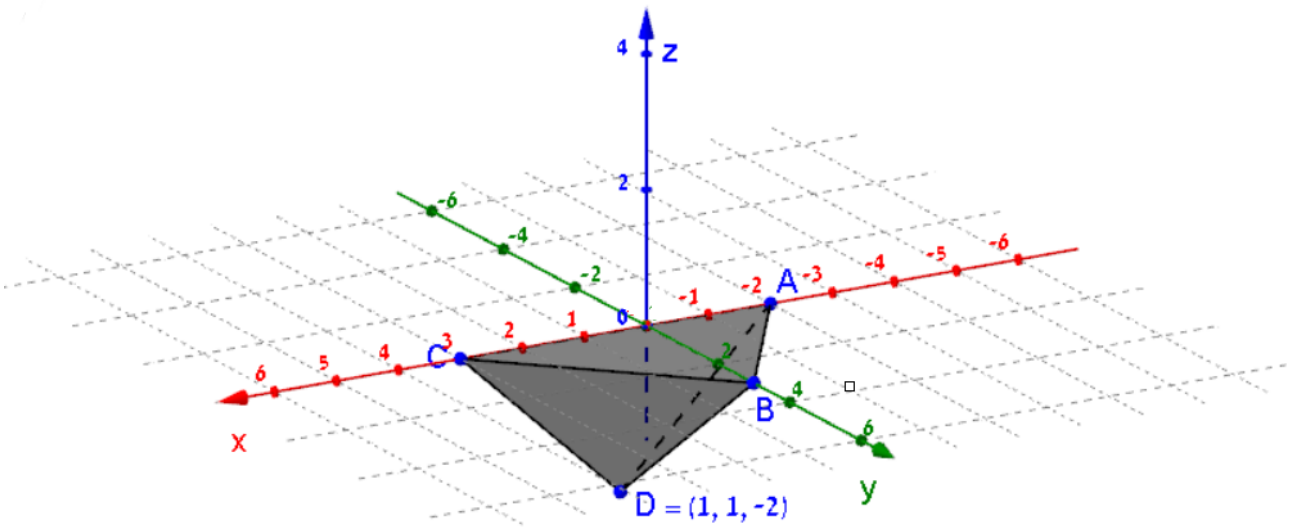
عمليّات في المتّجهات بتمثيل جبريّ (جمع، طرح ضرب بسكالار).

1.(من אתגר 5) معطى هرم ثلاثيّ ABCD .

أ. سجّلوا إحداثيات باقي رؤوس الهرم A, B, C في الرسم.

ب. (1) احسبوا مساحة قاعدة الهرم ABC.

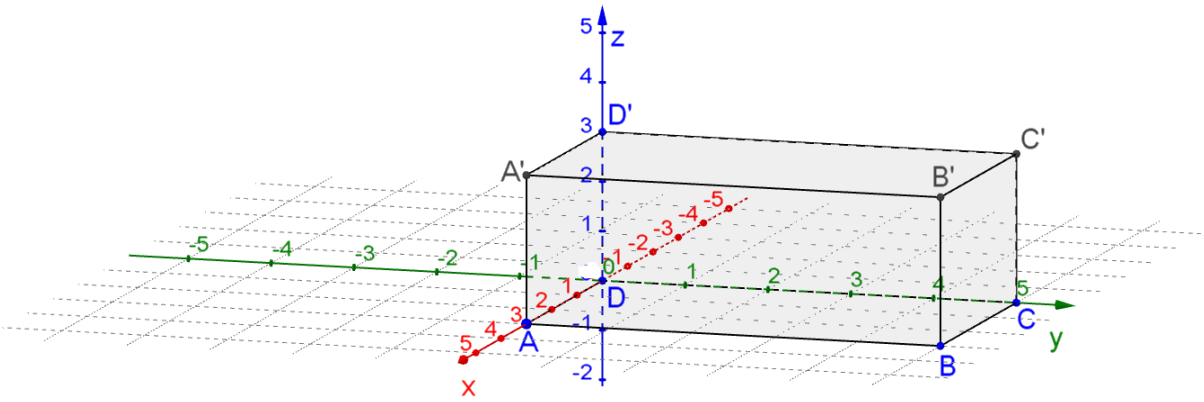
(2) احسبوا حجم الهرم.



2. أ. معطى صندوق $ABCDA'B'C'D'$. الرؤوس A, B, C, D تقع في المستوى xy (انظروا الرسم).

سجّلوا إحداثيات رؤوس الصندوق في الرسم.

ب. احسبوا حجم الصندوق.

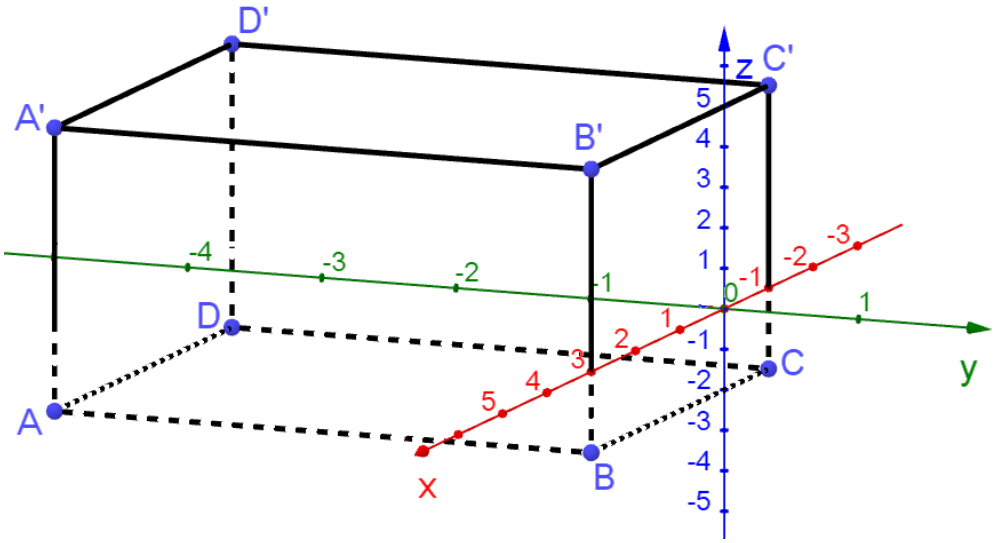


3. في صندوق $ABCDA'B'C'D'$ ، معطاة إحداثيات الرؤوس :

A(3,-4,-2), B(3,0,-2), C(-1,0,-2), A (4,5-,3)′A(3,-4,-2), B(3,0,-2), C(-1,0,-2), A . الوجه BB′C′C يقع في المستوى xz (انظروا الرسم).

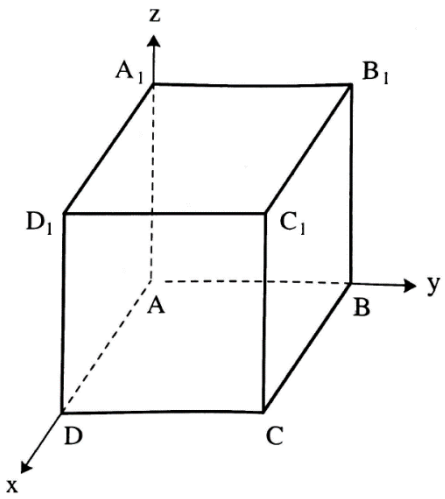
أ. جدوا إحداثيات باقي رؤوس الصندوق.

ب. احسبوا حجم الصندوق.



4. معطى صندوق التمرين 2.

سجّلوا التمثيل الجبريّ للمتّجهات التالية: $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{D'B'}$, $\overrightarrow{DB'}$,



5. حجم المكعّب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ يساوي 8.

A هي أصل المحاور.

أ. احسبوا إحداثيات رؤوس المكعّب.

ب. جدوا التمثيل الجبريّ للمتّجهات التالية:

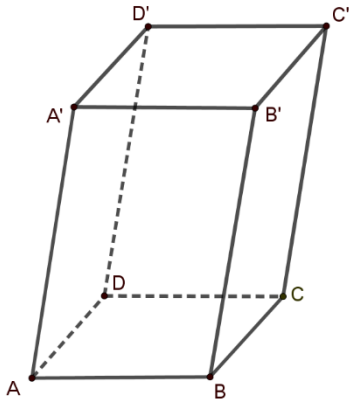
$\overrightarrow{AC_1},\ \overrightarrow{BD_1},\ \overrightarrow{CA_1},\ \overrightarrow{DB_1}$.

6. في الشكل الرباعيّ $ABCD$, $A(2,-7,-5)$:
$B(3,11,0),\ C(5,-1,7),\ D(4,-19,2)$

برهنوا أنّ الشكل الرباعيّ هو متوازي أضلاع.

7. في متوازي أضلاع $ABCD$. $B(2,-3,0)$, $C(3,-1,1),\ D(5,-3,7)$:

احسبوا إحداثيات الرأس A.



8. أ. في متوازي السطوح $ABCDA'B'C'D'$:

$A(3,2,4)$, $B(2,4,3),\ C(5,0,2)$, $B'(6,-1,3)$.

جدوا إحداثيات باقي رؤوس متوازي السطوح.

ب. في متوازي السطوح $ABCDA'B'C'D'$:

$A(1,-3,0)$, $A'(0,4,-2), B'(-4,2,-1),\ D(-1,-2,2)$.

جدوا إحداثيات باقي رؤوس متوازي السطوح.

9. استمارة محوسبة من אתגר 5.

10. معطاة النقاط: $A(-3,1,5)$. $B(2,4,1)$

جدوا إحداثيات النقطة P التي تقع على المستقيم AB وتُحقّق:

أ. $AP:PB=2:1$ ب. $AP:PB=1:3$ ت. $\overrightarrow{AP}=-3\overrightarrow{BP}$ ث. $\frac{AP}{PB}=4$

ج. $AP:AB=\frac{1}{6}$ ح. $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}$.

11. معطاة النقاط: $A(0,1,-2)$, $P(-1,2,3)$. النقطتان B و C تقع على المستقيم AP.

أ. معلوم أنّ P تقسم القطعة AB بنسبة $AP:PB=3:2$. جدوا إحداثيات النقطة B.

ب. معلوم أنّ النقطة A تقع على القطعة PC و $AP=2AC$. جدوا إحداثيات النقطة C.

12. في المثلّث في الرسم، معطى:

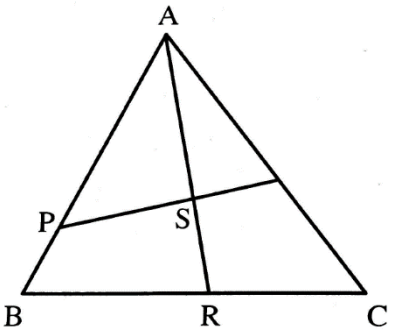
$R(3,5,1)$. $A(8,0,16)$, $B(12,8,4)$,

S يقسم AR بنسبة $AS:SR=3:2$,

P يقسم AB بنسبة $AP:PB=3:1$,

النقطة R تُحقّق: $BR:RC=3:5$.

جدوا إحداثيات النقاط P,S,C .



14. في المثلّث ABC : $A(-3,12,4)$, $B(3,4,7)$, $C(6,5,10)$.

CD هو متوسط للضلع AB.

M نقطة التقاء متوسطات المثلّث ABC.

أ. جدوا إحداثيات النقطة D.

ب. جدوا إحداثيات النقطة M.

15. في المثلّث ABC , AD هو متوسط للضلع BC,

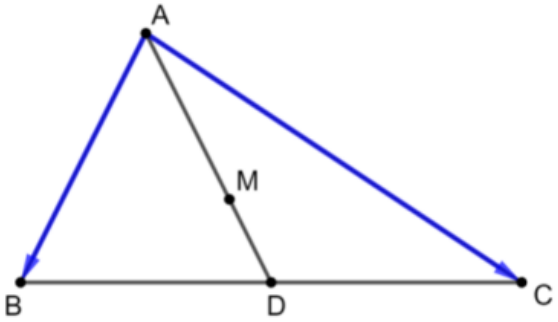
M نقطة التقاء متوسطات المثلّث ABC.

نرمز: $\underline{u}=\overrightarrow{AB}$. $\underline{v}=\overrightarrow{AC}$,

أ. عبّروا عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\underline{u}$. $\underline{v}$,

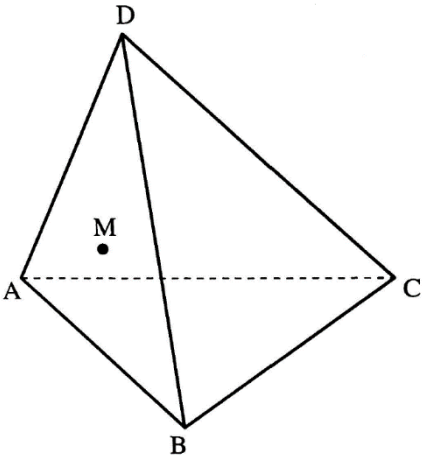
معطى: $A(2,3,4)$. $C(2,4,0)$, $B(5,-1,2)$,

ب. جدوا التمثيل الجبريّ للمتّجه $\overrightarrow{AM}$.



ت. جدوا إحداثيات النقطة M.

16. في الهرم الثلاثيّ ABCD النقطة M هي التقاء المتوسطات في الوجه ABD.



معطى: $A(1,-1,3)$, $B(2,2,-4)$

$C(1,0,-1)$, $\overrightarrow{CM} = (1,0,2)$.

أ. جدوا إحداثيات النقطة M.

ب. النقطة E هي منتصف الضلع AB.

(1) جدوا التمثيل الجبريّ للمتّجه $\overrightarrow{ME}$.

(2) جدوا التمثيل الجبريّ للمتّجه $\overrightarrow{DE}$.

ت. جدوا إحداثيات الرأس D.

17. افحصوا هل المتّجهين $\underline{u}$ و $\underline{v}$ مرتبطين خطيا.

أ. $\underline{u} = (7,3,-1)$, $\underline{v} = (14,6,2)$

ب. $\underline{u} = (2,-3,0)$, $\underline{v} = (-2,3,0)$

ت. $\underline{u} = (12,-3,15)$, $\underline{v} = (4,-1,5)$

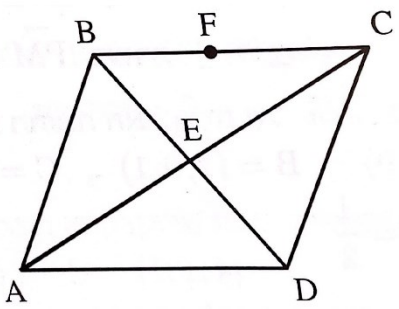
ث. $\underline{u} = (4,-2,-6)$, $\underline{v} = (-6,3,9)$

ج. $\underline{u} = (12,-1,3)$, $\underline{v} = (16,-4,4)$

ح. $\underline{u} = (6,-2,10)$, $\underline{v} = (-3,1,0)$

خ. $\underline{u} = (0,3,0)$, $\underline{v} = (0,8,0)$

د. $\underline{u} = (12,-1.5,3)$, $\underline{v} = (8,-1,2)$



18. في متوازي الأضلاع ABCD:

$A(1,2,3)$, $B(0,-1,1)$, $C(1,0,0)$.

أ. جدوا إحداثيات نقطة التقاء لقطرين E.

ب. النقطة F تقسم القطعة BC بنسبة $BF:FC=3:4$.

جدوا التمثيل الجبريّ للمتّجه $\overrightarrow{EF}$.

ت. هل المتّجهات $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا ؟ علّلوا.

19. معطاة النقاط C,B,A . حدد هل تقع على مستقيم واحد؟

أ. $A(0,0,0)$, $B(1,2,3)$, $C(-2,1,4)$,

ب. $A(1,1,-1)$, $B(2,0,3)$, $C(-1,3,-9)$,

ت $A(-2,1,4)$, $B(3,-4,5)$, $C(-3,-4,5)$,

ث. $A(-2,1,3)$, $B(0,-1,2)$, $C(2,-3,1)$,

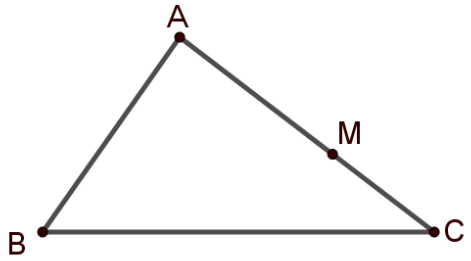
20. النقاط المعطاة: A(1,-2,6), B(3,-1,4), C(9,2,-2), D(5,-3,8).

أ. بيّنوا أنّ النقاط A، B، C تقع على مستقيم واحد.

ب. بيّنوا أنّ النقطة D لا تقع على المستقيم AB.

ت. DM هو متوسط على الضلع AC في المثلّث ACD.

جدوا التمثيل الجبريّ للمتّجه $\overrightarrow{DM}$.



21. في المثلّث ABC: $C(0,1,1)$ ، $A(1,1,0)$

النقطة P تُحقّق: $\overrightarrow{BP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$, $P\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},1\right)$.

أ. على أيّ ضلع من المثلّث تقع النقطة P؟ علّلوا.

ب. جدوا إحداثيات الرأس B.

النقطة M تقع على AC و تُحقّق:

$\overrightarrow{PM}=(0,\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$.

ت. هل $PM \parallel AB$ ؟ علّلوا.

22. في الصندوق $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ، معطى:

$A(4,0,-8)$, $A_1(12,4,-4)$

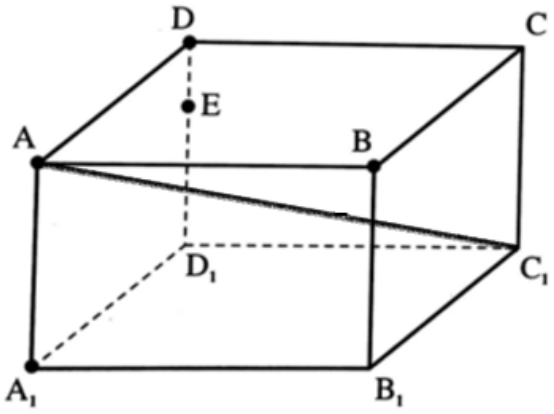
$B(-4,4,4)$, $D(8,-16,0)$

النقطة E تقسم الضلع DD_1

بنسبة $DE:ED_1 = 1:3$

أ. جدوا إحداثيات النقطة E.

ب. احسبوا إحداثيات النقطتين C . C_1 ,



النقطة F تُحقّق : $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC_1}$.

ت. (1) على أيّ مستقيم تقع النقطة F؟ علّلوا.

(2) جدوا التمثيل الجبريّ لـ $\overrightarrow{FE}$.

(3) هل $FE \parallel BD$ ؟ علّلوا.

23. صندوق $ABCDA'B'C'D'$ موضوع على

هيئة المحاور، الرأس D يقع في أصل المحاور والرؤوس الثلاثة الأخرى A', C, D', تقع على الأجزاء الموجبة للمحور x، للمحور y والمحور z بالتلاؤم.

(انظروا الرسم).

معطى: $AD = 5$, $DD' = 10$, $DC = 7$

أ. سجّلوا إحداثيات كلّ رؤوس الصندوق.

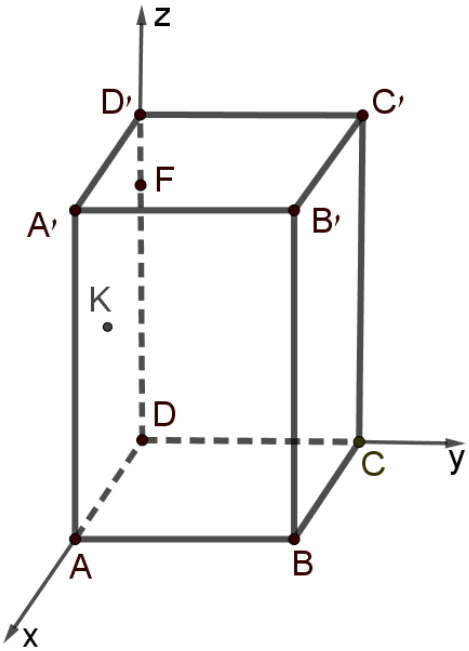
النقطة E تُحقّق: $\overrightarrow{CE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CC'}$.

النقطة K هي نقطة تقاطع قطريّ الوجه الجانبي $AA'D'D$.

النقطة F تقسم الضلع DD' بنسبة $DF:FD' = 4:1$.

ب. (1) على أيّ مستقيم تقع النقطة E؟ علّلوا.

(2) جدوا إحداثيات E.



ت. جدوا التمثيل االجبريّ لـ $\overrightarrow{KF}$.

ث. (1) هل $KF \parallel BE$ ؟ علّلوا.

(2) هل $BK \parallel EF$؟ علّلوا.

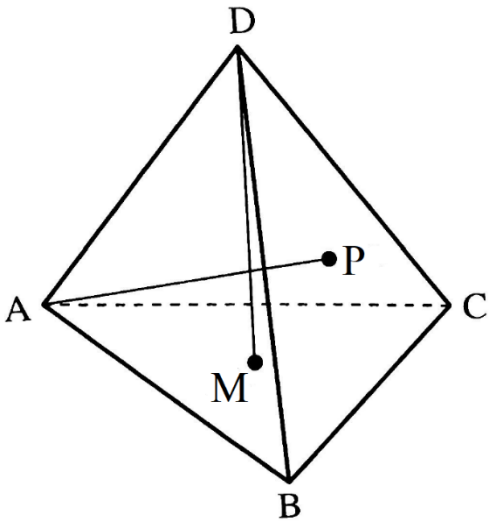
(3) ما هو نوع الشكل الرباعيّ BKFE ؟

24. في الهرم ABCD: $A(-2,1,0),\ B(3,0,1),\ C(-1,1,2), D(0,-3,0)$.

M هي نقطة التقاء متوسطيّ الوجه الجانبي BDC,

P هي نقطة التقاء متوسطيّ قاعدة الهرم ABC.

E هي منتصف الضلع BC.



أ. (1) جدوا إحداثيات النقطة E.

(2) جدوا إحداثيات النقطة M.

(3) جدوا إحداثيات النقطة P.

ب. (1) برهنوا أنّ: $PM \parallel AD$.

(2) احسبوا النسبة $\frac{PM}{AD}$.

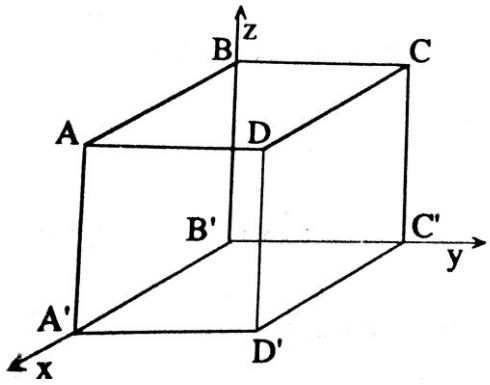
ت. معطاة النقطة $N(0,-\frac{1}{4},\frac{3}{4})$.

(1) بيّنوا أنّ النقاط A, N, P تقع على نفس المستقيم.

(2)) بيّنوا أنّ النقاط D, N, M تقع على نفس المستقيم.

(3) ماذا يُمكن أن نستنتج عن الوضع المتبادل بين المستقيمين AP و DM؟

25. مكعّب 'ABCDA'B'C'D موضوع



في هيئة المحاور، حيث أنّ الرأس 'B يقع في أصل المحاور والرؤوس الثلاثة الأخرى A', C, B تقع على المحاور كما هو موصوف في الرسم .

معلوم أنّ: A'(2,0,0).

أ. احسبوا حجم المكعّب.

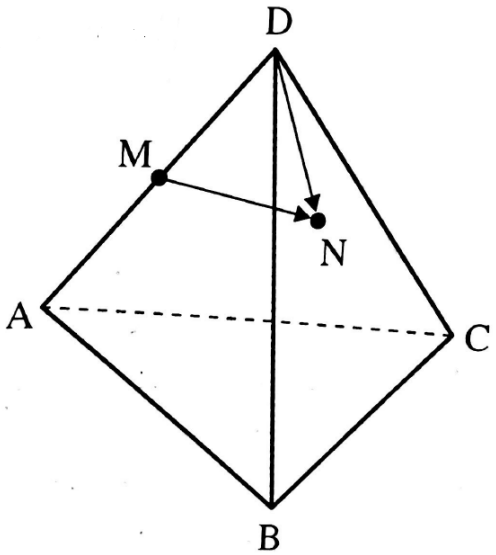
معطى: نقطة M تقع في منتصف الضلع AD، نقطة N تقع في منتصف الضلع DD', نقطة P تقع في منتصف الضلع D'C'، نقطة Q تقع في منتصف الضلع C'B'.

معطاة النقطة F(2, 3, 0).

ب. (1) بيّنوا أنّ النقطة F تقع على المستقيم MN ، وأيضًا تقع على المستقيم PQ.

(2) بأيّ نسبة تقسم النقطة P القطعة QF، و بأيّ نسبة تقسم النقطة N القطعة MF؟

26. في الهرم الثلاثيّ في الرسم، معطى:



$A(-2,1,0)$, $B(3,0,1)$, $C(-1,1,2)$,

$D(0,-3,0)$.

النقطة M هي منتصف الضلع AD.

N هي نقطة على الوجه الجانبي BCD التي تُحقّق

$\overrightarrow{DN} = (\frac{1}{2}, \frac{7}{4}, \frac{3}{4})$.

أ. جدوا التمثيل الجبريّ للمتّجهات:

(1) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$.

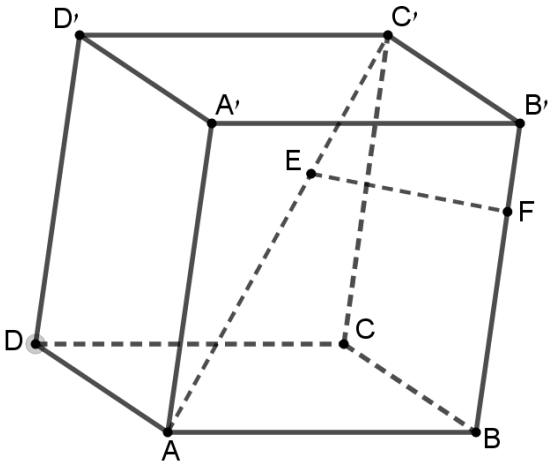
(2) $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MN}$.

ب. (1) بيّنوا أنّ: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

(2) فسّروا لماذا المستقيم MN يوازي المستوى ABC.

27. في متوازي السطوح $ABCDA'B'C'D'$ معطى:

$A(1,2,0)$, $B(3,0,-6)$, $D(2,2,8)$, $C'(4,-4,9)$.



أ. جدوا إحداثيات الرؤوس C , B'.

النقطة E تقع على القطر AC'

وتُحقّق $AE:EC' = 2:1$.

النقطة F تقع على الضلع BB'

وتُحقّق $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$.

ب. جدوا إحداثيات النقطتين E و F.

ت. **(1)** بيّنوا أنّ: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

(2) لماذا المتّجه $\overrightarrow{EF}$ يوازي المستوى $ABCD$ ؟

إضافة تمارين للبند 5.4

استعمالات الضرب السكالاري بتمثيل جبري

1. في المثلّث ABC معطى: $A(1,0,5)$. $B(6,2,1)$, $C(-4,0,10)$,

النقطة M تقسم الضلع AC بنسبة $AM:MC=2:3$.

أ. احسبوا طول المتجه $\overrightarrow{BM}$.

ب.(1) احسبوا الزاوية $\measuredangle ABM$.

(2) احسبوا مساحة المثلّث ABM.

2. في المثلّث ABC: $A(-5,1,13)$, $B(1,1,1)$, $C(9,-9,5)$.

أ. برهنوا أنّ المثلّث قائم الزاوية.

ب. برهنوا أنّ المثلّث متساوي الساقين.

ت. احسبوا الزوايا الحادة في المثلّث.

3. مُعطاة النقاط: A(1,-2,6) , B(9,2,-2) , C (3,8-,5).

أ. بيّنوا أنّ النقطة C لا تقع على المستقيم AB.

ب. CM هو متوسّط للضلع AB في المثلّث ABC.

(1) احسبوا طول المتوسّط CM.

(2) هل المتوسّط CM هو أيضًا مُنصّف الزاوية ACB؟ علّلوا.

(3) احسبوا الزاوية ACB.

(4) احسبوا مساحة المثلّث ABC.

4. في الشكل الرباعيّ $ABCD$. $A(1,0,-1)$, $B(2,1,3)$, $C(1,2,5)$, $D(0,1,1)$:

أ. برهنوا أنّ الشكل الرباعيّ متوازي أضلاع.

ب. احسبوا الزاوية $\measuredangle BAD$.

ت. احسبوا مساحة متوازي الأضلاع.

5. في الشكل الرباعيّ .. ABCD $A(4,-7,9):$, $B(8,-9,14)$, $C(7,-1,9)$, $D(3,1,4)$

أ. (1) برهنوا أنّ الشكل الرباعيّ هو متوازي أضلاع.

M (2) هي نقطة تقاطع أقطار الشكل الرباعيّ. جدوا إحداثيات M.

ب. احسبوا الزاوية الحادة بين قطريّ الشكل الرباعيّ.

6. في متوازي الأضلاع . ABCD $A(1,-10,7):$, ($B(0,-6,6$, $C(1,-6,5)$.

أ. جدوا إحداثيات الرأس D.

ب. برهنوا أنّ الشكل الرباعيّ ABCD هو مستطيل.

ت. احسبوا مساحة المستطيل.

ث. O هي نقطة التقاء قطريّ المستطيل.

(1) جدوا إحداثيات النقطة O.

(2) احسبوا الزاوية $\measuredangle BOC$ (الزاوية بين قطريّ المستطيل).

7. في الشكل الرباعيّ . ABCD $A(-2,4,1):$, $B(1,5,0)$, $C(2,4,3)$, $D(-1,3,4)$.

أ. برهنوا أنّ الشكل الرباعيّ هو معين.

ب. هل ABCD هم مربّع؟

ت. احسبوا زوايا المعين.

ث. احسبوا مساحة المعين.

8. في الشكل الرباعيّ . ABCD$A(0,-1,4):$, $B(-2,0.5,4.5)$, $C(-3,1,2)$, $D(1,-2,1)$.

أ. برهنوا أنّ الشكل الرباعيّ هو شبه منحرف.

ب هل شبه المنحرف هو متساوي الساقين؟

ت. احسبوا زوايا شبه المنحرف.

9. في الشكل الرباعيّ ABCD $A(3,0,1)$: , $B(3,1,-1)$, $C(-2,-1,-7)$, $D(-2,-4,-1)$.

أ. لماذا $AB \parallel CD$؟

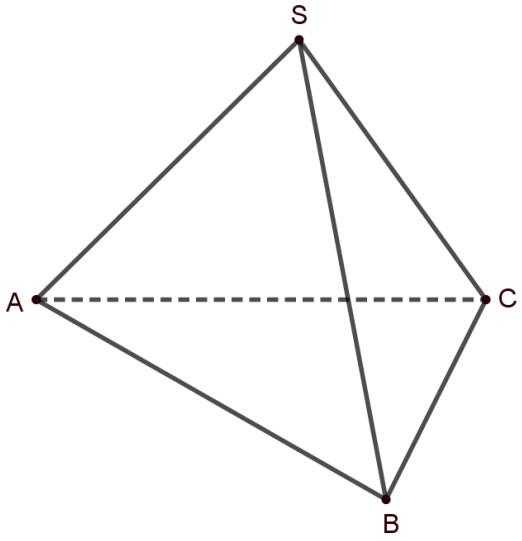
ب. بيّنوا أنّ اشكل الرباعيّ ABCD هو شبه منحرف قائم الزاوية.

ت. احسبوا محيط شبه المنحرف ABCD.

ث. احسبوا مساحة شبه المنحرف ABCD.

10. في الهرم الثلاثيّ $SABC$:

, $B(0,2,0)$, $C(2,3,0)$, $S(1,1,4)$. $A(3,0,1)$



أ. (1) احسبوا الزاوية $\measuredangle BAC$.

(2) احسبوا مساحة المثلّث ABC.

ب. (1) احسبوا الزاوية $\measuredangle SAB$.

(2) احسبوا مساحة الوجه الجانبي SAB.

ت. (1) احسبوا الزاوية $\measuredangle SAC$.

(2) احسبوا مساحة الوجه الجانبي SAC.

ث. (1) احسبوا الزاوية $\measuredangle SBC$.

(2) احسبوا مساحة الوجه الجانبي SBC.

ج. احسبوا مساحة أوجه الهرم (مجموع مساحات الأوجه والقاعدة).

11. في متوازي السطوح $ABCDA'B'C'D'$: $A(-3,4,-6)$,

$B'(1,0,-5)$, $\overrightarrow{BC} = (2,-4,4)$. $C(2,-9,1)$

النقطة E تقسم الضلع $A'B'$ بنسبة $A'E:EB' = 1:2$ ،

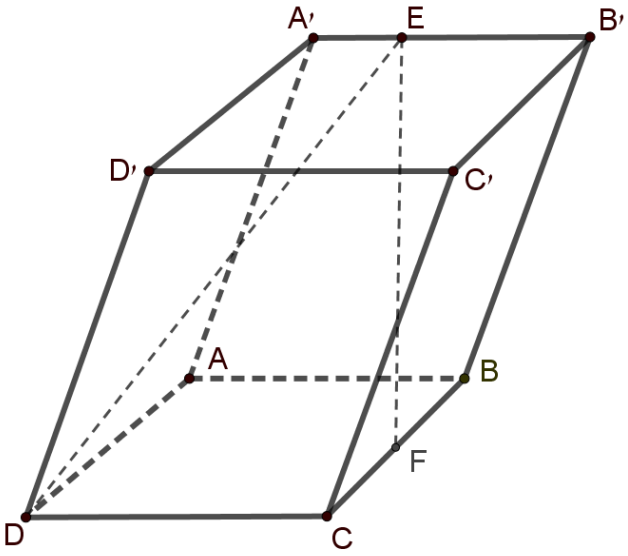
النقطة F هي منتصف الضلع BC.

أ. (1) جدوا إحداثيات النقاط $A'.B$, D,

(2) جدوا إحداثيات النقطتين E, F.

ب. (1) احسبوا الزاوية $\measuredangle DEF$.

(2) احسبوا مساحة المثلّث DEF.



12. معطاة النقاط: $A(8,9,-1)$. $C(5,3,-1)$, $B(1,5,1)$,

أ. لماذا لا تقع النقاط على مستقيم واحد؟

ب. بيّنوا أنّ المثلّث ABC قائم الزاوية.

ت. احسبوا مساحة المثلّث.

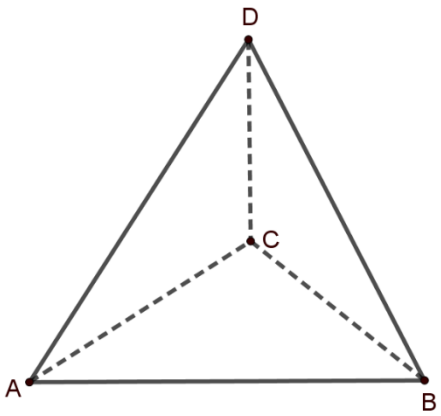
النقاط A, B, C, D هي رؤوس هرم قاعدته مثلّث ABC.

معطى: $D(7,2,4)$.

ث. بيّنوا أنّ الضلع DC يعامد مستوى القاعدة ABC.

ج. هل الهرم قائم؟

ح. احسبوا حجم الهرم.



13. في الهرم $ABCDE$ القاعدة $ABCD$

هي متوازي أضلاع.

معطى: $A(2,-4,3)$, $B(4,-8,-3)$,

$C(1,-3,-2)$, $E(15,4,2)$.

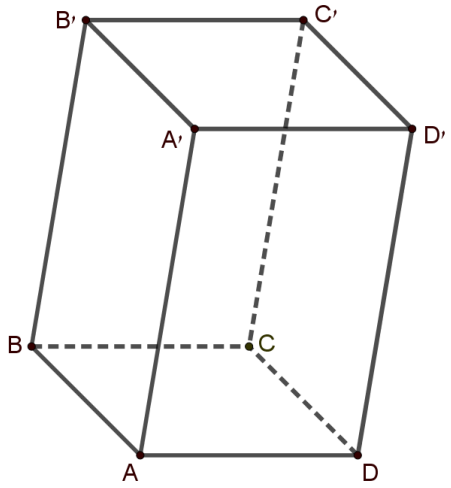
أ. جدوا إحداثيات النقطة D.

ب. (1) احسبوا الزاوية $\measuredangle ABC$.

(2) احسبوا مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$.

ت. برهنوا أنّ AE مُعامد لمستوى القاعدة $ABCD$.

ث. احسبوا حجم الهرم.



14. في متوازي السطوح $ABCDA'B'C'D'$:

$A(0,1,-1)$, $D(1,1,0)$, $C(3,-1,-2)$,

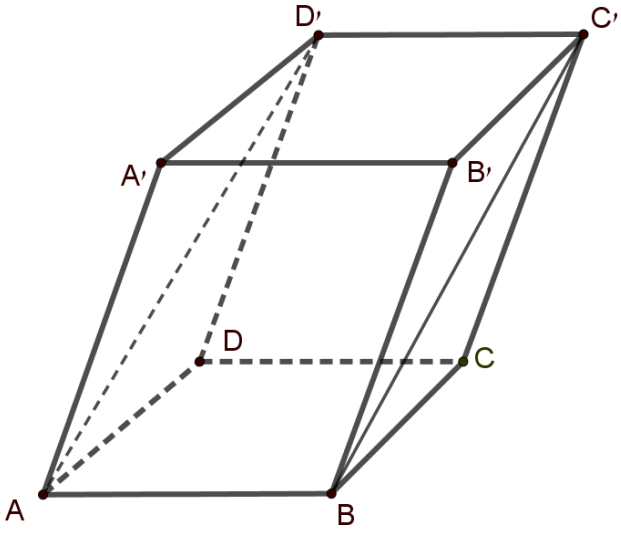
$B'(8,11,-9)$.

أ. جدوا إحداثيات الرأس B.

ب. برهنوا أنّ متوازي السطوح هو صندوق.

ت. احسبوا حجم الصندوق.

ث. احسبوا حجم الهرم $C'BCD$.



15. في متوازي السطوح $ABCDA'B'C'D'$:

$A(1,-1,-2)$, $D(4,-1,1)$, $B(0,-6,-1)$,

$B'(1,-2,0)$.

أ. برهنوا أنّ الشكل الرباعيّ ABCD هو مستطيل.

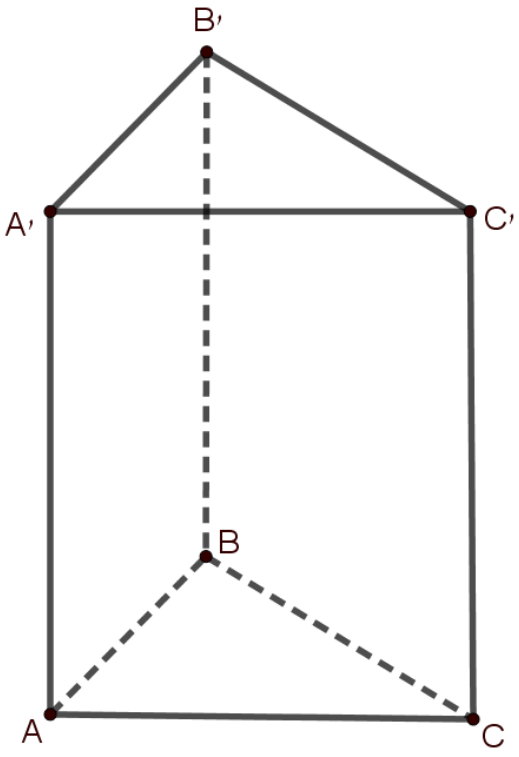
ب. هل متوازي السطوح هو صندوق؟ علّلوا.

ت. لماذا الشكل الرباعيّ $ABC'D'$ هو متوازي أضلاع؟

ث. احسبوا طول المتجه $\overrightarrow{AD'}$.

ج. (1) احسبوا الزاوية $\measuredangle D'AB$.

(2) احسبوا مساحة متوازي الأضلاع $ABC'D'$.



16. في منشور ثلاثيّ $ABCA'B'C'$:

$A(-8,10,2)$, $B(4,4,2)$, $C(2,0,8)$,

$C'(-4,-12,-2)$.

ا. برهنوا أنّ قاعدة المنشور ABC هي مثلّث قائم الزاوية

ب. برهنوا أنّ المنشور قائم.

ت. احسبوا حجم المنشور.

ث. النقطة E تُحقّق: $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$.

(1) على أيّ ضلع تقع النقطة E؟

(2) جدوا إحداثيات النقطة E.

(3) هل الزاوية $\measuredangle AEC$ قائمة؟

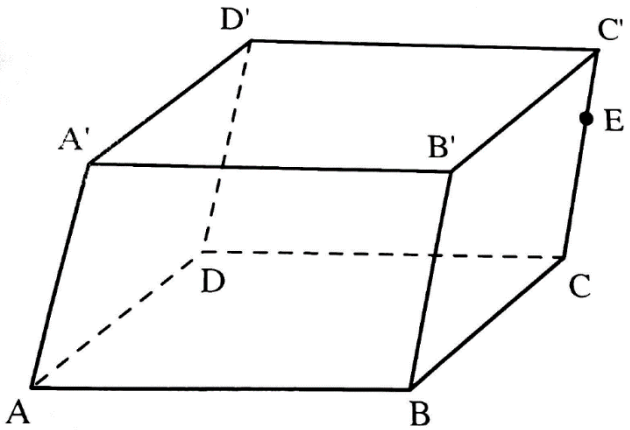
71. في متوازي السطوح $ABCDA'B'C'D'$:

$A(1,-2,4)$, $B(0,-1,2)$, $D(1,0,5)$,

$A'(-4,-3,6)$.

النقطة E تقسم الضلع CC'

بنسبة $C'E:EC = 1:2$.



أ. برهنوا أنّ متوازي السطوح هو صندوق.

ب. احسبوا حجم الصندوق.

ت. احسبوا طول القطر BD' في الصندوق.

ث. النقطة O هي منتصف القطر BD'.

(1) احسبوا طول المتجه $\overrightarrow{OE}$.

(2) احسبوا الزاوية $\measuredangle D'OE$

(3) احسبوا مساحة المثلّث $D'OE$.

18. في منشور ثلاثيّ $ABCA'B'C'$:

$A(1,2,3)$. $A'(5,-2,3)$, $C(4,1,0)$, $B(4,5,6)$,

أ. هل الادّعاءات التالية صحيحة؟ علّلوا..

(1) $\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{AB}$.

(2) $\overrightarrow{AA'}$ مُعامد لمستوى القاعدة ABC.

(3) المنشور $ABCA'B'C'$ قائم.

ب. معطى أنّ حجم المنشور هو 48.

(1) احسبوا الزاوية $\measuredangle BAC$.

(2) احسبوا طول ارتفاع المنشور.

ت. النقطة D هي نقطة التقاء قطريّ الوجه الجانبي $AA'B'B$,

النقطة E هي نقطة التقاء قطريّ الوجه الجانبي $AA'C'C$.

(1) جدوا إحداثيات النقاط $E.D$,

(2) هل $DE \parallel BC$؟ علّلوا.

19. في الشكل الرباعيّ $ABCD$:

$A(7,4,5)$, $B(7,5,3)$, $C(2,3,-3)$,

$D(2,0,3)$.

أ. (1) لماذا $DC \parallel AB$.؟

(2) برهنوا أنّ الشكل الرباعيّ هو شبه منحرف قائم الزاوية.

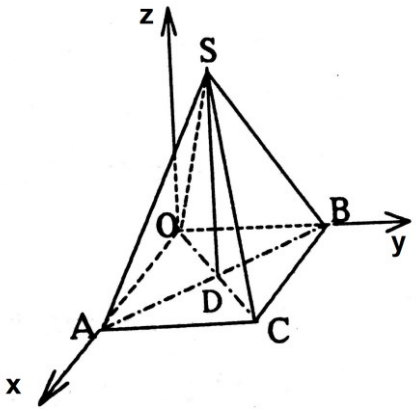
ب. احسبوا مساحة شبه المنحرف.

ت. في الهرم $ABCDE$

معطى الرأس $E(-2,4,5)$.

(1) برهنوا أنّ: الضلع DE في الهرم ABCDE مُعامد لمستوى القاعدة ABCD.

(2) جدوا حجم الهرم.



OACBS.20 هرم رباعيّ وقائم قاعدته مستطيل. SD مُعامد لمستوى القاعدة.

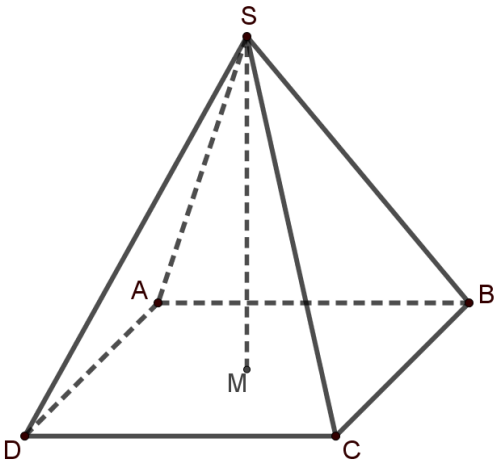
معطى: A(4,0,0)، B(0,8,0) . كذلك معلوم أنّ طول SD يساوي 12.

أ. احسبوا حجم الهرم.

ب. جدوا إحداثيات الرأس S.

ت. احسبوا الزوايا SOA و SOB.

ث. احسبوا مساحة غلاف الهرم (مجموع مساحات الأوجه الجانبيّة) .



21. في هرم رباعيّ قاعدته شكل رباعي $SABCD$ احداثيات الرأس هو $S(-2,3,3)$ ورؤوس القاعدة هي

$A(-3,2,1)$ $B(-3,4,1)$, $C(-1,4,1)$, $D(-1,2,1)$

أ. برهنوا أنّ قاعدة الهرم $ABCD$ هي مربّع.

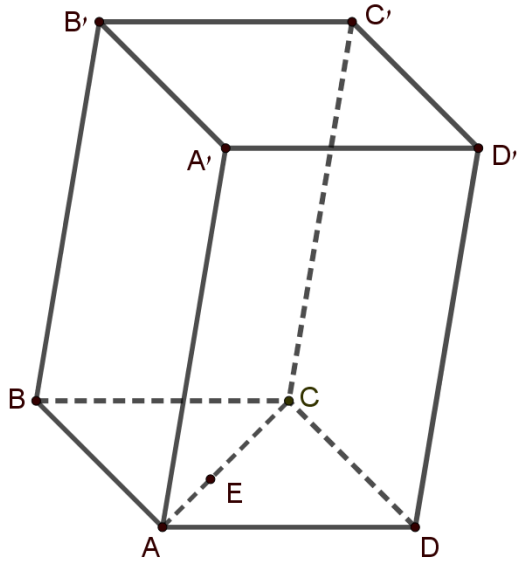
ب. بيّنوا أنّ الهرم قائم.

ت. SM هو ارتفاع الهرم.

(1) احسبوا إحداثيات النقطة M.

(2) احسبوا حجم الهرم ومقدار الزاوية SBM .

22. معطى المنشور $ABCDA'B'C'D'$.



قاعدة المنشور $ABCD$ هي متوازي أضلاع.

معطى: $A(-1,0,2)$, $B(5,-3,11)$,

$D(2,6,-7)$, $\overrightarrow{AA'} = (9,-17,-10)$.

أ. (1) برهنوا أنّ الشكل الرباعيّ $ABCD$ هو معين.

(2) احسبوا مساحة المعين.

ب. النقطة E تقع على AC .

معطى: $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$.

جدوا إحداثيات النقطة E.

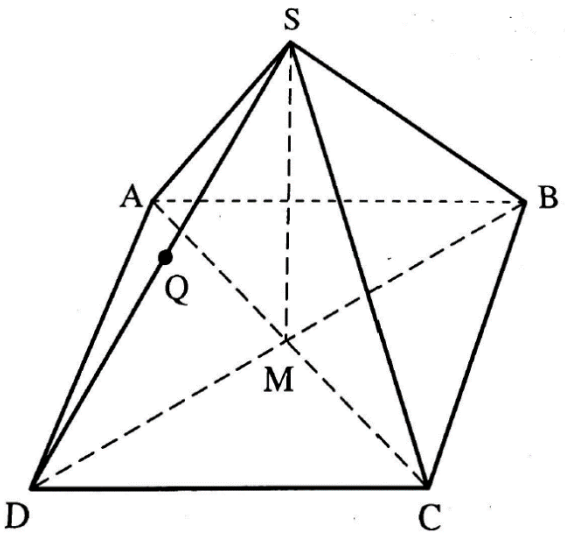
ت. (1) بيّنوا أنّ $A'E$ مُعامد لمستوى القاعدة $ABCD$.

(2) احسبوا حجم المنشور $ABCDA'B'C'D'$.

ث. (1) لماذا المثلّث $AA'E$ قائم الزاوية؟

(2) احسبوا مقدار الزاوية $A'AE$.

23. في الهرم $SABCD$ القاعدة $ABCD$ هي متوازي أضلاع.



معطى: A هي نقطة أصل المحاور، $B(-3,4,0)$,

$S(1,2,2)$, M$D(5,0,0)$, نقطة تقاطع قطريّ القاعدة $ABCD$.

أ. جدوا إحداثيات النقطتين C, M.

ب. هل الهرم قائم؟ علّلوا.

ت. برهنوا أنّ الشكل الرباعي $ABCD$ هو معين.

ث. احسبوا مساحة المعين ABCD.

ج. (1) برهنوا أنّ المتجه $\overrightarrow{SM}$ مُعامد لمستوى القاعدة ABCD.

(2) احسبوا حجم الهرم.

ح. Q هي منتصف الضلع SD.

هل $MQ \parallel BS$ ؟ علّلوا.

24. معطى هرم ثلاثيّ ABCD، رؤوسه هي:

D(8, 0, 3), C(4,-1,2), B(3,0,4), A(2,5,-2) .

أ. بيّنوا أنّ الأضلاع الثلاث التي تمرّ عبر الرأس C مُعامدة لبعضها البعض.

ب. احسبوا حجم الهرم.

ت. احسبوا مساحة أوجه الهرم.

25. معطى هرم SABC ورؤوس قاعدته: (C , B(0,0,0), A(6,0,0),0,4,0).

رأس S يقع على محور z.

أ. (1) لماذا المثلّث ABC قائم الزاوية؟

(2) لماذا الضلع SB هو أيضًا ارتفاع في الهرم؟

ب. معلوم أنّ حجم الهرم يساوي 12. جدوا إحداثيات الرأس S.

ت. احسبوا مساحة أوجه الهرم.

26.معطاة النقاط:

S , B(1,0,-2), A(2,1,1), 10,2-,4) . النقطة O أصل المحاور.

أ. (1) بيّنوا أنّ SO مُعامد للمستوى ABO.

(2) هل الهرم SABO قائم؟

ب. احسبوا حجم الهرم SABO.

ت. نقطة D هي منتصف القطعة ؟، نقطة E هي منتصف القطعة AO، نقطة F هي منتصف القطعة OB.

احسبوا بكم ضعف يكبر حجم الهرم SABO عن حجم الهرم DEFO.

27. معطى الصندوق ABCDA'B'C'D'. أربعة من رؤوسه هي:

A(2,3,1), C(5,1,2), D(3,3,0), B'(10,13,9).

أ. جدوا حجم الصندوق.

ب. (1) لماذا المثلّث B'BD قائم الزاوية؟

(2) احسبوا الزوايا الحادة في المثلّث B'BD.

أسئلة من امتحانات البجروت في موضوع المتجه بتمثيل جبريّ

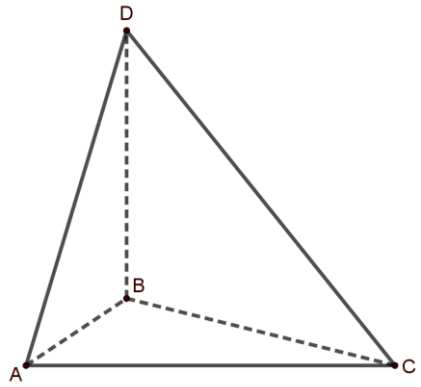
1. معطاة ثلاث نقاط:

$A(1,0,7)$. $B(3,2,1)$, $C(3,-2\ -2)$,

أ. بيّنوا أنّ النقاط الثلاث لا تقع على مستقيم واحد.

ب. (1) احسبوا مقدار الزاوية BAC.

(2) احسبوا مساحة المثلّث ABC .



معطاة النقطة $D(-12,5,-3)$.

ت. (1) برهنوا أن المتجه $\overrightarrow{BD}$ مُعامد للمستوى ABC .

(2) احسبوا حجم الهرم الثلاثيّ ABCD .

2. معطى المنشور $ABCDA'B'C'D'$.

قاعدة المنشور $ABCD$ هي متوازي أضلاع.

معطى: $A(0,1,-1)$, $C(3,-1,-2)$,

$B'(8,11,-9)$.$D(1,1,0)$,

أ. جدوا إحداثيات النقطة B .

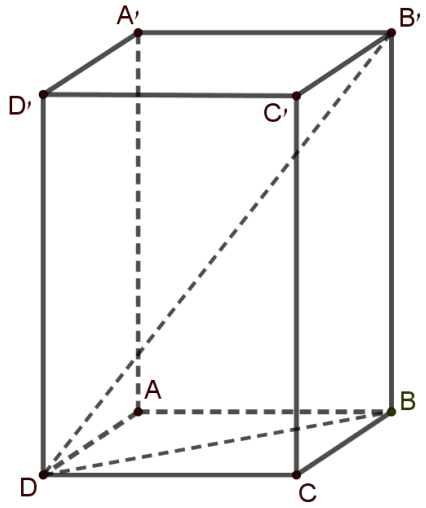
ب. (1) بيّنوا أنّ قاعدة المنشور هي مستطيل.

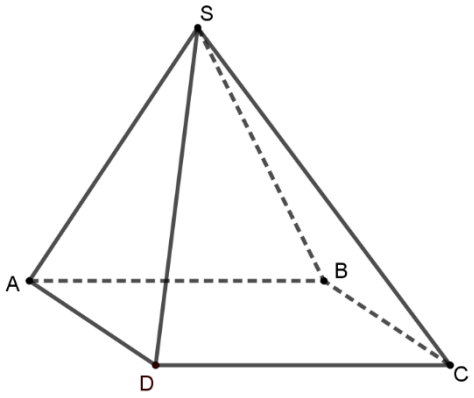
(2) برهنوا أنّ المنشور هو صندوق.

(3) احسبوا حجم الصندوق.

ت. احسبوا الزاوية بين قطر الصندوق DB'

وبين قطر القاعدة DB .





3. في الهرم الثلاثيّ $SABCD$ ، مُعطاة الرؤوس:

$A(3,-5,9)$, $B(6,1,0)$, $C(0,4,-9)$

$D(-3,-2,0)$, $S(6,-19,-10)$.

أ.(1) برهنوا أنّ الشكل الرباعيّ $ABCD$ هو متوازي أضلاع.

(2) احسبوا مقدار الزاوية الحادة في متوازي الأضلاع.

(3) احسبوا مساحة متوازي الأضلاع.

معطى أنّ النقطة K تُحقّق: $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.

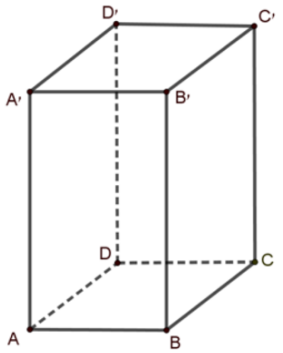
ب.(1) فسّروا لماذا النقطة K تقع على القطر DB .

(2) جدوا إحداثيات النقطة K.

معطى أنّ SK مُعامد لمستوى القاعدة $ABCD$.

ت. احسبوا حجم الهرم الثلاثيّ $SABCD$.

4.في المنشور ABCDA'B'C'D'، معطاة الرؤوس:



$A(-2,4,7)$, $B(0,5,4)$, $C(1,3,1)$, $D(-1,2,4)$,
$D'(-10,5,-1)$.

أ. برهنوا أنّ الشكل الرباعيّ ABCD عبارة عن معين.

ب. احسبوا زوايا المعين ABCD.

ت. (1) بيّنوا أنّ المنشور قائم.

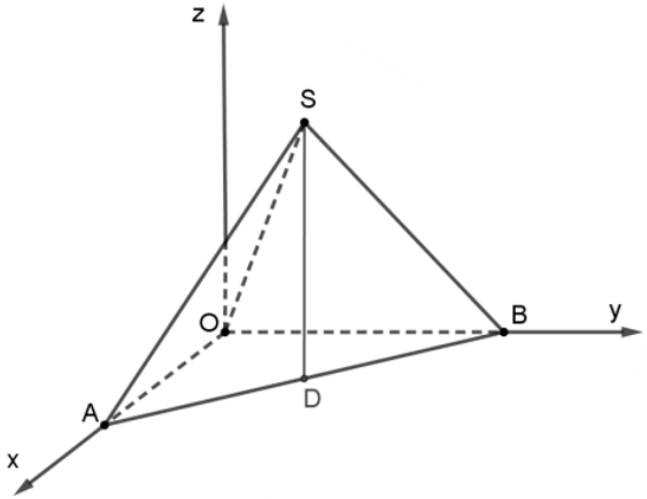
(2) احسبوا حجم المنشور.

النقطة E تُحقّق: $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DD'}$.

ث. (1) اشرحوا لماذا تقع النقطة E على الضلع DD'.

(2) احسبوا حجم الهرم ABCDE .

5. في الهرم الثلاثيّ SABO



يقع الرأسان A و B على الجزء الموجب للمحور x

والمحور y بالتلاؤم (انظروا الرسم).

النقطة 0 هي أصل المحاور.

معطى: 0BO=4,A =2.

إحداثيات النقطة S هما (3,2,1).

أ. (1) سجّلوا إحداثيات الرأسين A وB.

(2) برهنوا أنّ الهرم الثلاثيّ SABO قائم.

النقطة D هي منتصف الضلع AB.

ب. (1) بيّنوا أنّ المتجه DS يُعامد مستوى قاعدة الهرم ABO.

(2) احسبوا حجم الهرم .

ت. احسبوا مقدار الزاوية SOD.