

## אלגברה: סדרות (לפחות 20 שעות)

### מבוא

תוכנית הלימודים של חטיבת הביניים כוללת התייחסות ראשונית לנושא הסדרות. פרק זה יעסוק בסדרות מספריות עם חוקיות. הסדרה תוצג כקבוצה מסודרת של מספרים שבנויה באופן המאפשר להמשיך אותה ללא הגבלה בכיוון אחד. פרק זה יעסוק בסדרות חשבוניות והנדסיות (עם מספר סופי ואינסופי של איברים). התלמידים ילמדו את התכונות של הסדרות וירכשו מיומנויות שימוש בכלים מתמטיים בעבודה איתן. לימוד פרק זה מזמין דיון על נחיצותן של סדרות, יישומיות שלהן לפתרון שאלות מעשיות ובאמצעותן לחשיבות שימוש בכלים מתמטיים בחיי האדם.

### מטרות כלליות

1. ניתוח תכונות של סדרות חשבוניות והנדסיות.
2. פיתוח מיומנויות מתמטיות הנדרשות לצורך עבודה עם סדרות.
3. הכרת פונקציות של משתנה בדיד ותכונותיהן כגון עלייה, ירידה, חיוביות, שליליות וכד'.
4. פיתוח הבנה כי הסדרות הן כלי מתמטי שימושי לתיאור מצבים מחיי היום יום.

## פירוט התכנים/ נושאים מתמטיים עיקריים

### הקדמה לסדרות (2 שעות)

#### תכנים

1. ייצוגים שונים של סדרות:
  - ייצוג מילולי של סדרות
  - ייצוג סימבולי על ידי נוסחה לפי מקום או נוסחת נסיגה
  - ייצוג גרפי
2. שתי דרכים להגדרת סדרה:
  - באמצעות איבר כללי - כפונקציות המוגדרות על משתנה בדיד (מוגדרות מהמספרים הטבעיים אל המספרים הממשיים)
  - באמצעות כלל נסיגה - המתאר איך איברי סדרה מוגדרים באמצעות איברים אחרים בסדרה.

מומלץ להשתמש בטכנולוגיה כדי להציג סדרות באופן מספרי וגרפי, ולחקור באופן דינאמי את התנהגותן.

### סדרה חשבונית (לפחות 9 שעות)

#### תכנים

1. הגדרת סדרה חשבונית בייצוגים הבאים:
  - ייצוג מילולי
  - ייצוג מספרי – ייצוג באמצעות טבלת ערכים
  - ייצוג סימבולי לפי מקום (כפונקציה של משתנה בדיד):
$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$
או באמצעות כלל נסיגה:
$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases}$$
- ייצוג גרפי: הצגה גרפית של הסדרה כנקודות על גרף בדיד של פונקציה לינארית.

2. מעבר בין שני הייצוגים הסימבוליים: מכלל לפי מקום לכלל נסיגה ולהיפך.

3. תכונות הסדרה החשבונית:

- כל איבר בסדרה הוא ממוצע חשבוני של שני האיברים הנמצאים משני צדדיו (מכאן השם "סדרה חשבונית").
  - סדרה עולה / יורדת / קבועה
  - איברים חיוביים / שליליים
4. חישוב של סכום  $n$  האיברים הראשונים של סדרה חשבונית באמצעות הנוסחאות (בכמה דרכים):
- $$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} \quad \text{או} \quad S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$
5. הכרת הקשר בין איבר כללי בסדרה חשבונית לבין נוסחת הסכום של איברים ראשונים בסדרה:  $S_n - S_{n-1} = a_n$  לכל  $n \geq 2$ .
6. הוכחה שסדרה היא סדרה חשבונית בהינתן נוסחה של האיבר הכללי או כלל נסיגה או בהינתן נוסחה של סכום  $n$  איברים ראשונים.
7. תת סדרות שונות של הסדרה החשבונית המובילות לסדרה חשבונית, כגון: תת סדרה המורכבת מאיברים במקומות האי זוגיים ועוד.
8. פתרון שאלות המציגות תופעות מחיי היום יום, המתנהגות כסדרה חשבונית.

#### דגשים:

- כדי להוכיח שסדרה היא סדרה חשבונית יש להוכיח זאת באופן כללי, ואין להסתפק בבדיקה של מקרים פרטיים.
- יש לדון בתפקיד הדוגמה הנגדית להפרכת טענה. אם נמצא מקרה אחד שבו ההפרש בין שני זוגות איברים עוקבים בסדרה אינו זהה, אז הסדרה אינה סדרה חשבונית.
- בנושא זה יש להימנע משאלות המובילות לחישובים אלגבריים מורכבים, כגון פתרון מערכות משוואות מורכבות וכדומה.

## סדרה הנדסית (לפחות 9 שעות)

### תכנים

1. הגדרת סדרה הנדסית בייצוגים הבאים:

- ייצוג מילולי
- ייצוג מספרי – ייצוג באמצעות טבלת ערכים
- ייצוג סימבולי לפי מקום (כפונקציה של משתנה בדיד):

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

או באמצעות כלל נסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$$

$$q \neq 0, a_1 \neq 0$$

- ייצוג גרפי: הצגה גרפית של הסדרה כנקודות על גרף בדיד של פונקציה מעריכית.
- 2. מעבר בין שני הייצוגים הסימבוליים: מכלל לפי מקום לכלל נסיגה ולהיפך.
- 3. תכונות הסדרה ההנדסית:
  - כל איבר בסדרה הוא ממוצע הנדסי של שני האיברים הנמצאים משני צדדיו (מכאן השם "סדרה הנדסית").
  - סדרה עולה / יורדת / קבועה
  - איברים חיוביים / שליליים / איברים עם סימנים מתחלפים
- 4. חישוב של סכום  $n$  איברים ראשונים של סדרה הנדסית באמצעות הנוסחה:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad q \neq 1$$

5. הכרת הקשר בין האיבר הכללי בסדרה הנדסית לבין נוסחת הסכום של האיברים

$$\text{הראשונים בסדרה: } S_n - S_{n-1} = a_n \text{ לכל } n \geq 2.$$

- 6. הוכחה שסדרה היא סדרה הנדסית בהינתן נוסחה של האיבר הכללי או כלל נסיגה או בהינתן נוסחה של סכום  $n$  איברים ראשונים.
- 7. תת סדרות שונות של הסדרה ההנדסית המובילות לסדרה הנדסית, כגון: תת סדרה המורכבת מאיברים במקומות האי זוגיים ועוד.
- 8. סכום סדרה הנדסית אינסופית שסכומה מתכנס:  $S = \frac{a_1}{1-q}$ , כאשר מנת הסדרה  $q$  שונה מ-0 ומקיימת  $-1 < q < 1$ .

9. פתרון שאלות המציגות תופעות מחיי היום יום, המתנהגות כסדרה הנדסית.

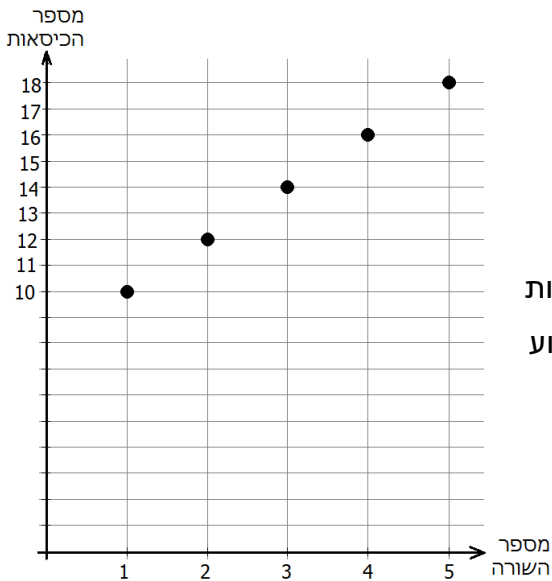
10. פתרון שאלות שמשלבות סדרה חשבונית וסדרה הנדסית.

דגשים:

- עיסוק בשאלות בסדרה הנדסית מצריך שליטה בטכניקה אלגברית של חזקות: חוקי חזקות, חזקה עם מעריך שלם חיובי/ שלילי.
- כדי להוכיח שסדרה היא סדרה הנדסית יש להוכיח זאת באופן כללי, ואין להסתפק בבדיקה של מקרים פרטיים.
- יש לדון בתפקיד הדוגמה הנגדית להפרכת טענה. אם נמצא מקרה אחד שבו היחס בין שני זוגות איברים עוקבים בסדרה אינו זהה, אז הסדרה אינה סדרה הנדסית.
- אין צורך בהוכחת נוסחת סכום סדרה הנדסית אינסופית שסכומה מתכנס ואין צורך בשימוש בגבולות.

## נספח – דוגמאות לפרק סדרות

**דוגמה** (סדרה חשבונית המיוצגת באופן גרפי – שימוש בנוסחת הסכום)



הגרף הבא מתאר את מספר הכיסאות באולם קולנוע, בכל אחת מחמש השורות הראשונות באולם.

א. בהנחה שההפרש בין מספר הכיסאות בשורות סמוכות נשאר קבוע, מצאו מהו מספר השורות באולם אם ידוע כי באולם הקולנוע יש 400 מקומות ישיבה.

ב. כמה צופים יכולים לשבת בשורות הזוגיות באולם הקולנוע?

**דוגמה** (סדרה חשבונית – שאלה מחיי היום יום)

באולם יש שני אגפים: אגף א' ואגף ב'. בשני האגפים סידרו כסאות בשורות. באגף א' יש בשורה הראשונה כיסא אחד, ובכל שורה נוספת יש כיסא אחד יותר מאשר בשורה הקודמת.

באגף ב' יש בשורה הראשונה 3 כיסאות, ובכל שורה נוספת יש כיסא אחד יותר מאשר בשורה הקודמת.

מספר השורות באגף ב' גדול ב- 32 ממספר השורות באגף א', ומספר הכיסאות באגף ב' גדול פי 25 ממספר הכיסאות באגף א'. מצאו את מספר השורות באגף א'.

**דוגמה** (סדרה חשבונית – שאלה מחיי היום יום)

סך התשלום עבור טלוויזיה מחולק ל- 12 תשלומים חודשיים.

התשלומים החודשיים מהווים סדרה חשבונית.

סך התשלום עבור הטלוויזיה גדול פי 1.52 מסך 6 התשלומים הראשונים, והוא גדול ב- 1,900 שקל מהסכום של שני התשלומים האמצעיים.

מצאו את:

א. ההפרש של הסדרה החשבונית.

ב. סך התשלום עבור הטלוויזיה.



דוגמה (סדרה חשבונית – שאלה יישומית, שינוי בסדרה)

עדי מתאמנת לקראת מרוץ של 42 ק"מ.

לפי תוכנית האימונים, בשבוע הראשון תרוץ עדי 6 ק"מ, בכל שבוע תרוץ 1.5 ק"מ יותר מאשר בשבוע שקדם לו, ובשבוע האחרון תרוץ 42 ק"מ.

א. כמה שבועות תימשך תוכנית האימונים של עדי?

ב. כמה קילומטרים תרוץ עדי בשבוע ה-20 לאימונים?

לאחר שעדי רצה 20 שבועות התברר לה כי המרוץ המתוכנן הוקדם בשבועיים, ולכן שינתה את תוכנית האימונים:

אחרי השבוע ה-20 היא תרוץ בכל שבוע 2 ק"מ יותר מאשר בשבוע שקדם לו.

ג. האם לפי התוכנית לאחר השינוי עדי תרוץ 42 ק"מ בשבוע האחרון? נמק.

ד. כמה קילומטרים סך הכול תרוץ עדי במהלך כל האימונים?

דוגמה (סדרה חשבונית – מספר איברים בסדרה, איברים חיוביים/שליליים, יצירת סדרה חדשה, סכום סדרה)

נתונה סדרה חשבונית:  $-70, \dots, 82, 86$ .

א. מצאו את מספר האיברים בסדרה.

ב. (1) כמה איברים חיוביים יש בסדרה?

(2) מהו האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה?

(3) חשבו את סכום האיברים החיוביים.

בסדרה הנתונה החליפו את הסימנים של כל איברי הסדרה.

באופן זה התקבלה סדרה חדשה:  $70, \dots, -78, -82, -86$ .

ג. חשבו את סכום הסדרה החדשה.

דוגמה (סדרה חשבונית – כלל נסיגה, סכום תת סדרה)

סדרה מוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא

$$, \text{ לכל } n \text{ טבעי. } \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 5 \\ a_1 = 4 \end{cases}$$

א. הסבירו מדוע הסדרה היא סדרה חשבונית ומצאו את נוסחת האיבר הכללי  $a_n$  שלה.

ב. מצאו כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהאיבר הראשון) כדי שסכומם יהיה 9,090.

ג. בסדרה יש 80 איברים. מהו סכום 20 האיברים האחרונים?



דוגמה (כלל נסיגה וסדרה חשבונית, תת סדרה של סדרה חשבונית)

$$\begin{cases} a_1 = 12 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2 \end{cases} \quad \text{סדרה מוגדרת לכל } n \text{ טבעי על ידי כלל הנסיגה:}$$

א. חשבו את  $a_2$  ו-  $a_3$ .

ב. נתונים המספרים:  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 4$ ,  $a_3 = x$ .

(1) מצאו את ערכו של  $x$  עבורו שלושת המספרים הם שלושה איברים ראשונים בסדרה

חשבונית.

(2) בסדרה החשבונית יש 40 איברים. חשבו את סכום האיברים במקומות הזוגיים.

דוגמה (סדרה הנדסית – שימוש בנוסחת האיבר הכללי)

בסדרה הנדסית האיבר השלישי בסדרה גדול ב- 2 מהאיבר השני, והאיבר הרביעי גדול פי 2 מהאיבר השלישי. מצאו את האיבר הראשון בסדרה.

דוגמה (סדרה הנדסית - הוכחת סדרה הנדסית, סכום סדרה, יצירה של סדרה הנדסית חדשה)

נתונה סדרה המוגדרת לכל  $n$  טבעי על ידי הכלל:  $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

א. הוכיחו כי הסדרה היא הנדסית ומצאו את מנת הסדרה.

ב. הביעו באמצעות  $n$  את הסכום:  $S_n = 2 + 6 + 18 + \dots + 2 \cdot 3^{n-1}$ .

ג. מהסדרה הנתונה  $b_n$  יוצרים סדרה חדשה, באמצעות שינוי הסימן של האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

מצאו את הסכום של 36 האיברים הראשונים בסדרה החדשה.

דוגמה (סדרה הנדסית – שאלה יישומית)

מכל מים מתמלא ב- 5 שעות.

היחס בין כמות המים הזורמת למכל כל שעה ובין כמות המים שזרמה אליו בשעה הקודמת הוא  $q$ .

במשך 2 השעות הראשונות זרמו למכל 48 מ"ק מים, ובמשך 4 השעות הראשונות זרמה

למכל כמות מים הגדולה פי 2 מכמות המים שזרמה למכל במשך 4 השעות האחרונות.

מצאו את נפח המכל.

דוגמה (סדרה הנדסית – שאלה מחיי היום יום)

סרטון הועלה לאתר האינטרנט של העירייה ביום ראשון. כל יום היה מספר הצופים בו גדול פי מספר קבוע ממספר הצופים ביום הקודם. ביום רביעי מספר הצופים בסרטון היה גדול פי 8 ממספר הצופים ביום ראשון. ביום שישי היה מספר הצופים בסרטון גדול ב- 480 ממספר הצופים ביום שלפניו.

א. (1) פי כמה גדל מספר הצופים בכל יום?

ב. (2) כמה צופים היו לסרטון ביום ראשון?

כדי לעודד קניות בעיר, העיריה החליטה לממן קופון הנחות לכל הצופים בסרטון בשבוע זה. שווי הקופון הוא 50 שקלים.

ג. כמה עלו לעירייה כל הקופונים שחילקה לצופים בסרטון בשבעת הימים?

ד. העירייה מעוניינת להמשיך לחלק את קופוני ההנחות לצופים בסרטון גם אחרי שבעת הימים הראשונים. התקציב הכולל של העירייה למימון כל הקופונים (החל מהיום הראשון של העלאת הסרטון) הוא 766,500 שקלים.

ה. לכמה ימים נוספים (אחרי שבעת הימים הראשונים) יספיק תקציב העירייה למימון הקופונים?

דוגמה ( סדרה הנדסית אינסופית – סכום, יצירה של סדרה הנדסית חדשה)

בסדרה הנדסית אינסופית, סכום האיבר הראשון והאיבר החמישי הוא 5,440.

האיבר הראשון גדול מהאיבר הרביעי פי 8.

מצאו את:

א. סכום הסדרה.

ב. סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה.

דוגמה (שילוב כלל נסיגה עם סדרה הנדסית סופית / אינסופית)

סדרה מוגדרת לכל  $n$  טבעי ע"י כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_5 = 8 \\ a_{n+1} = 4a_n - 3 \cdot n \end{cases}$$

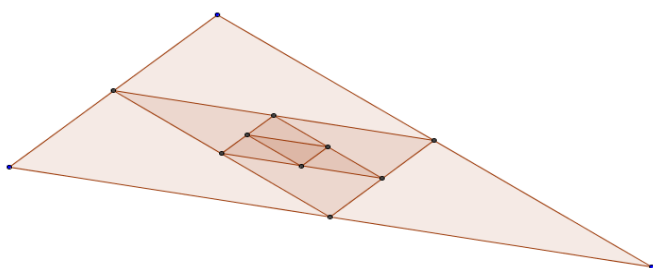
א. (1) מצאו את  $a_4, a_6$ .

(2) האם הסדרה  $a_n$  הנדסית?

ב. מגדירים סדרה הנדסית אינסופית:  $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$ .

שני האיברים הראשונים שלה מקיימים:  $b_1 = a_5, b_2 = a_4$ .

חשבו את סכום הסדרה ההנדסית האינסופית.



דוגמה (סדרה הנדסית אינסופית – שילוב עם גאומטריה)

במשולש הנתון בונים את שלושת קטעי

האמצעים. במשולש הנוצר על ידיהם, שוב בונים

את שלושת קטעי האמצעים, וכך הלאה:

נסמן ב- $S$  את שטח המשולש הנתון.

א. הביעו באמצעות  $S$  את שטח המשולש הנוצר על ידי קטעי האמצעים של המשולש הנתון.

ב. נתבונן בסדרה הבאה  $a_n$ : האיבר הראשון בה שווה ל- $S$ , האיבר השני שווה לשטחו של

המשולש השני הנוצר על ידי קטעי האמצעים של המשולש הנתון, האיבר השלישי שווה

לשטחו של המשולש הנוצר על ידי קטעי האמצעים של המשולש השני וכן הלאה.

הסבירו מדוע הסדרה  $a_n$  היא הנדסית ומצאו את המנה של הסדרה.

ג. נמשיך את תהליך בניית המשולשים באופן שמוגדר בסעיף הקודם. הביעו באמצעות  $S$  את

סכום שטחי כל המשולשים.

ד. חשבו פי כמה גדול שטח המשולש הראשון בסדרה מסכום שטחי שאר המשולשים

בסדרה.

דוגמה (סדרה חשבונית וסדרה הנדסית – שאלה יישומית)

דנה יוצאת מביתה לריצה.

היא מתחילה לרוץ מהבית שלה, ובדקה הראשונה עוברת מרחק של 80 מטר. בכל דקה נוספת דנה עוברת מרחק גדול פי 1.02 מן המרחק שעברה בדקה הקודמת. אחרי 20 דקות של ריצה דנה עוצרת, מסתובבת וחוזרת באותה דרך. הפעם בדקה הראשונה היא עוברת מרחק של 100 מטר, ובכל דקה נוספת היא עוברת 5 מטר יותר מן המרחק שעברה בדקה הקודמת. דנה מסיימת את הריצה כאשר היא מגיעה לביתה.

האם תספיק דנה לעבור את הדרך חזרה הביתה ב- 10 דקות? נמקו.

דוגמה (סדרה חשבונית וסדרה הנדסית – שאלה יישומית)

במפעל אלקטרוניקה החלו לייצר מחשבים.

בכל שבוע כמות המחשבים שייצרו הייתה גדולה במספר קבוע מכמות המחשבים שייצרו בשבוע שלפניו. בשבוע הראשון ייצרו 900 מחשבים.

הייצור נמשך 50 שבועות. בתקופה זו ייצרו 167,500 מחשבים סך הכול.

**א.** בכמה הייתה גדולה כמות המחשבים שייצרו בכל שבוע מן הכמות שייצרו בשבוע שלפניו?

בגמר הייצור מכר המפעל את המחשבים במשך כמה חודשים.

כמות המחשבים שנמכרו בכל חודש הייתה גדולה פי  $q$  מכמות המחשבים שנמכרו בחודש שלפניו.

בחודש ה־4 נמכרו 160 מחשבים. בחודש ה־7 נמכרו 1,280 מחשבים.

**ב.** כמה מחשבים נמכרו בחודש הראשון?

החודש ה־7 היה החודש האמצעי של חודשי המכירה.

**ג.** כמה חודשים נמשכה המכירה?

**ד.** כמה מן המחשבים שייצרו במפעל לא נמכרו?