שאלון 471

# התפלגות נורמלית

Classit

info@classit.co - 073-3744093

## יחידה ראשונה

# ציוני תקן (ציוני z)

**ציוני תקן**

בפרק של סטטיסטיקה תיאורית למדנו להסתכל על ערכים של משתנה מסוים, למשל ציון במבחן, ולחשב לפי ערכי המשתנה מדדים שונים: שכיחות, ממוצע, חציון, סטית תקן ועוד. עם זאת, לפעמים, הערך הגולמי (האמיתי) של המשתנה לא אומר לנו הרבה.

למשל, סטודנט מסוים בטכניון קיבל ציון 65 במבחן קשה מאוד בכימיה אורגנית– האם זה אומר שהוא קיבל ציון נמוך? יתכן שכן, אבל לא בהכרח. למשל, אם יתברר שממוצע הציונים במבחן זה היה 53, והסטודנט קיבל את הציון הגבוה ביותר בכיתתו, אולי נחשוב אחרת על הציון 65.

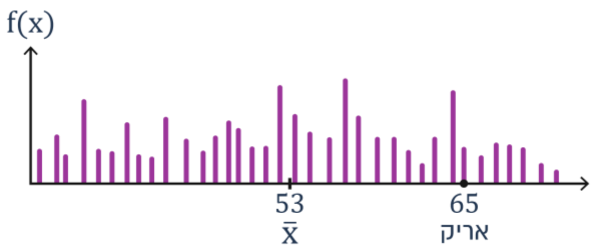
דוגמה זו ממחישה את הצורך שלנו להשוות את הערך שקיבלנו לשאר הערכים בהתפלגות, כדי לדעת אם הציון 65 הוא "טוב" או "גרוע". מהדוגמה שראינו ברור שחשוב להשוות את הערך שהתקבל לממוצע של הכיתה. אבל האם זה מספיק כדי לקבוע עד כמה הציון גבוה או נמוך?

נניח שאותו תלמיד קיבל גם במבחן בקורס בפיסיקה 65, ונניח שגם במבחן השני הממוצע של הכיתה היה 53.... האם במצב כזה נוכל לקבוע שבשני המבחנים הסטודנט שלנו, כעת כבר נקרא לו אריק, הצליח באותה המידה?

לא בטוח. אם סטית התקן במבחן הראשון מאוד קטנה, נניח S=2, וסטית התקן במבחן השני מאוד גדולה, נניח s=12, זה ישנה את המסקנות שלנו. בגרפים זה ייראה בערך כך:

**כימיה אורגנית**


**פיסיקה**




ניכר לעין שבכימיה אורגנית 1 אריק "בולט בנוף": הציון שלו מאוד גבוה יחסית לכיתתו.
בפיסיקה, הציון של אריק גם גבוה, אבל לא חריג עד כדי כך. במילים אחרות- באופן יחסי לשאר הכיתה, הציון של אריק בכימיה אורגנית הרבה יותר גבוה מאשר בפיסיקה.

מה למדנו? שכדי לדעת עד כמה ערך מסוים הוא בולט, או קיצוני, עלינו להשוות אותו לממוצע של ההתפלגות, וגם לפיזור של כל התצפיות מסביב לממוצע. ואיזה מזל שיש בשביל זה נוסחה:

$$Z = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$$

המרחק של **התצפית** מהממוצע

הפיזור של **כל התצפיות** מסביב לממוצע

בנוסחה אנחנו רואים מה שהדגמנו קודם: כדי לדעת עד כמה הציון של אריק בולט או שונה משאר הציונים, נבדוק כמה הוא רחוק מהממוצע (ואם הוא מעליו או מתחתיו). אחרי שנדע כמה הציון של אריק רחוק מהממוצע, נבדוק אם המרחק הזה גדול או קטן ביחס למרחק של שאר התצפיות מהממוצע.
(המדד לפיזור של כל התצפיות סביב הממוצע הוא כזכור - סטית התקן).

**שימו לב**

הנוסחה מאפשרת לנו לבטא את המרחק של אריק מהממוצע ביחידות של סטיות תקן:

בקורס כימיה אורגנית (S=2) אריק רחוק 6 סטיות תקן מהממוצע!

ואילו בקורס פיסיקה (S=12) אריק רחוק סטית תקן אחת בלבד מהממוצע.

המרחק הזה, שאנחנו סופרים "בצעדים" של סטיות תקן, נקרא **ציון תקן**, והוא מסומן באות Z.

נחשב בעזרת הנוסחה את ציוני התקן של אריק:

ציון התקן של אריק בפיסיקה

$$Z=\frac{x_i-\bar{x}}{S}=\frac{65-53}{12}=\frac{12}{12}=1$$

ציון התקן של אריק בכימיה אורגנית

$$Z=\frac{x_i-\bar{x}}{S}=\frac{65-53}{2}=\frac{12}{2}=6$$

גם בנוסחה (וגם בגרף) אנחנו רואים שאריק קיבל ציון גבוה מהממוצע בשני המבחנים, אבל הציון שלו בכימיה אורגנית "גבוה" יותר יחסית לציון שלו בפיסיקה (למרות שבשניהם קיבל ציון זהה).

**דגשים**

- כאשר ציון התקן הוא **חיובי** – המשמעות היא שהתצפית נמצאת **מעל הממוצע**
  ככל שערכו של ציון התקן גדול יותר המשמעות היא שהתצפית רחוקה יותר מהממוצע.
- כאשר ציון התקן הוא **שלילי** – המשמעות היא שהתצפית נמצאת **מתחת לממוצע**
  ככל שערכו של ציון התקן קטן יותר (שלילי יותר) המשמעות היא שהתצפית רחוקה יותר מהממוצע, כלפי מטה.
- כאשר ציון התקן הוא **0** – המשמעות היא שהתצפית בדיוק **שווה לממוצע**.

**שינוי בערכים וציוני התקן**

עוד תופעה מעניינת ושימושית היא העובדה שאם נעשה טרנספורמציה לינארית על הערכים (זה אולי נשמע כמו שם של מחלה אבל זה לא - זה חיבור/חיסור/כפל/חילוק) ציון התקן של התצפית לא ישתנה.

ציון התקן של אריק בכימיה אורגנית הוא כזכור Z=6, אבל המרצה נתן בונוס של 10 נקודות לכל הציונים בגלל אחוז הנכשלים הגבוה. מה יהיה ציון התקן החדש של אריק?

ציון התקן של אריק לא ישתנה.

ואם המרצה היה מוסיף לכל הציונים בונוס של 10%? עדיין הציון של אריק היה נשמר. ואם המרצה היה מכפיל את כל הציונים פי 2? הבנתם את הרעיון.

אבל אם המרצה היה מוסיף נקודות רק לציונים שמתחת ל-55? זו כבר לא טרנספורמציה לינארית, זו מחלה אחרת. ולכן במקרה הזה ציון התקן של אריק היה משתנה.

**דגש אחרון**

בדוגמה שהבאנו ידענו מהו הציון של אריק $(x_1=65)$ הממוצע $(\bar{x}=53)$, וסטית התקן $(s=2)$, ומתוכם חישבנו את ציון התקן. לא תמיד זה יהיה המקרה, לפעמים נקבל גדלים אחרים בנוסחה, ונצטרך לחשב מתוכה את סטית התקן, או את הממוצע או את הציון עצמו.

## מתרגלים

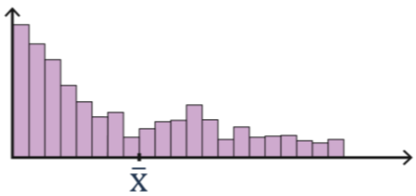
### א. הבנה של ציוני תקן בסיוע גרף

**1.** המורה חישב את ציוני התקן של ארבעה תלמידים בשני מבחנים.

בכל אחד מהסעיפים הבאים מתואר גרף התפלגות. סמנו על גבי הגרף את מיקומם של ארבעת הילדים בצורה משוערת.

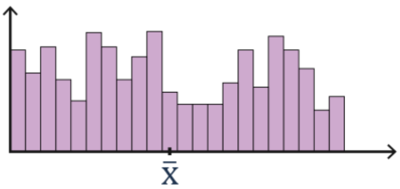
**א.**

| התלמיד | ציון התקן |
|---|---|
| אורי | 2.5 |
| בני | -1.5 |
| גלעד | 0 |
| דוד | -0.5 |




**ב.**

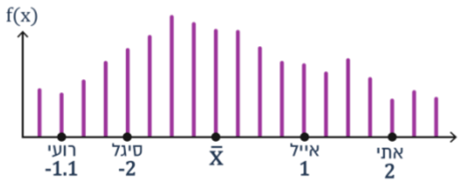
| התלמיד | ציון התקן |
|---|---|
| אורי | 1.2 |
| בני | 3 |
| גלעד | -2.4 |
| דוד | -1 |




**2.** בגרפים הבאים מופיעים ילדים וציוני התקן שלהם.

בחלקם נפלה טעות בציוני התקן, סמנו את הטעות והסבירו.

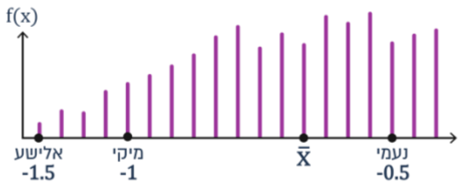
**א.**




הסבר_______________________________________________

___________________________________________________

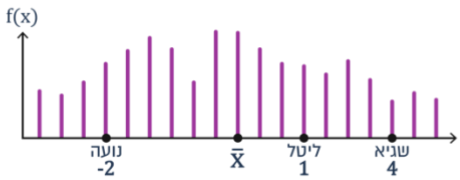
**ב.**




הסבר_______________________________________________

___________________________________________________

**ג.**



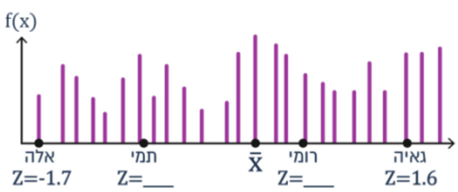

הסבר_______________________________________________

___________________________________________________

**3.** בגרף הבא מופיעים ילדים וציוני התקן שלהם.

ציוני התקן של תמי ורומי נשמטו.

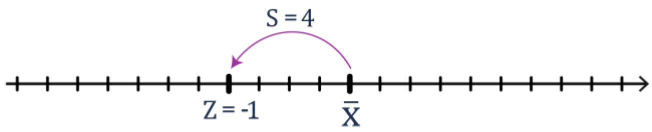
הציעו ערך אפשרי לציון התקן שלהן.



**4.** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתון גרף.
סמנו נקודות מתאימות על גבי השרטוט לפי ההוראות בכל סעיף.

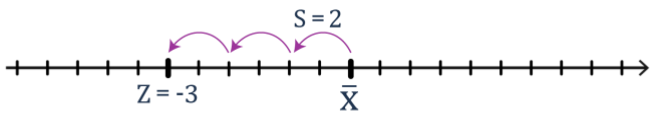
**א.** סמנו את ציוני התקן

$z = 1 \quad z = 1.5 \quad z = -2$




**ב.** סמנו את ציוני התקן

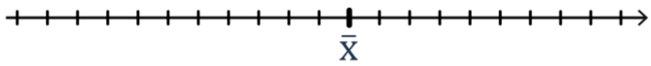
$z = 1.5 \quad z = 3 \quad z = -5$




**ג.** ידוע כי סטיית התקן היא 1.5.

סמנו את ציוני התקן

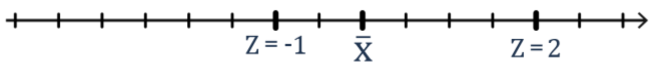
$z = -2 \quad z = 3 \quad z = -5$




**ד.** (1) חשבו את סטיית התקן

(2) הוסיפו את ציוני התקן

$z = 1.5 \quad z = 3$




## ב. חישוב ציוני תקן בעזרת הנוסחה: $Z = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$

**5.** המורה ערכה שני מבחנים בכיתה, במתמטיקה ובאנגלית, וחישבה את הממוצע ואת סטית התקן בכל מבחן.
חשבו בעזרת הנתונים את ציוני התקן של התלמידות הבאות:

| **מבחן במתמטיקה**<br>ממוצע 75 וסטית התקן 5 | **מבחן באנגלית**<br>הממוצע 82 וסטית התקן 2 |
|---|---|
| **רונה** קיבלה 88, ציון התקן שלה: ______ | **רונה** קיבלה 88, ציון התקן שלה:______ |
| **אליה** קיבלה 75, ציון התקן שלה:______ | **אליה** קיבלה 80, ציון התקן שלה:______ |
| **גאיה** קיבלה 90, ציון התקן שלה: ______ | **גאיה** קיבלה 90, ציון התקן שלה:______ |
| **נעמה** קיבלה 65, ציון התקן שלה:______ | **נעמה** קיבלה 65, ציון התקן שלה:______ |

השוו את ציוני התקן של כל תלמידה בשני המקצועות, וקבעו עבור כל תלמידה אם היא טובה יותר באנגלית או במתמטיקה:

**רונה** טובה יותר ב-______________ **גאיה** טובה יותר ב-______________

**אליה** טובה יותר ב-______________ **נעמה** טובה יותר ב-______________

**6.** ידוע כי יעל קיבלה 86 בכל המבחנים שניגשה אליהם.

**א.** קבעו על פי נתוני המבחנים הבאים מהם ציוני התקן של יעל בכל מבחן.

**מבחן בלשון:** הממוצע 81 וסטית התקן 1 ציון התקן של יעל ________

**מבחן בספרות:** הממוצע 92 וסטית התקן 3 ציון התקן של יעל ________

**מבחן ביהדות:** הממוצע 80 וסטית התקן 1.5 ציון התקן של יעל ________

**מבחן בפיסיקה:** הממוצע 76 וסטית התקן 4 ציון התקן של יעל ________

**מבחן בחינוך גופני:** הממוצע 95 וסטית התקן 1.2 ציון התקן של יעל ________

**ב.** באיזה מבחן יעל הצליחה במידה הרבה ביותר? ______________________

באיזה מבחן יעל הצליחה במידה המועטה ביותר? ____________________

## ג. חישוב ממוצע, סטיית תקן, ציון אמיתי וציון תקן בעזרת הנוסחה

**7.** להלן נתונים הנוגעים למשקל החבילות שנשלחות בדואר.

בכל שורה מופיעים 3 נתונים מבין ממוצע, סטית תקן, ציון גלם וציון תקן, ויש להשלים את הנתון החסר באמצעות הנוסחה.

| | $\bar{x}$ ממוצע | $s$ סטית תקן | $x_1$ ציון גלם (אמיתי) | $z$ ציון תקן |
|---|---|---|---|---|
| **א.** | 21 | 4 | 24 | |
| **ב.** | 31.5 | 6 | | -2.25 |
| **ג.** | | 1.5 | 14.1 | 1.4 |
| **ד.** | 8 | | 3.5 | -2 |
| **ה.** | 40 | 2 | 37.4 | |
| **ו.** | 22 | | 12 | -2.5 |
| **ז.** | 16 | 0.8 | | 2.5 |
| **ח.** | | 3 | 3.9 | -0.2 |

## יחידה שניה
# התפלגויות רציפות

### משתנה בדיד ורציף

עד כה עסקנו בעיקר משתנים בדידים, למשל: מספר ילדים במשפחה, מספר מרפסות בדירה, מספר מכוניות ברחוב וכו. אולם משתנים רבים בעולם הם רציפים – למשל משקל, גובה, טמפרטורה, ועוד.

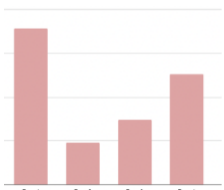
**משתנה בדיד** משתנה שבין כל שני ערכים סמוכים שלו (ילד אחד, שני ילדים) אין ערכים נוספים.
**משתנה רציף** משתנה שבין כל שני ערכים שלו (1.70 ס"מ, 1.71 ס"מ) יש אינסוף ערכים נוספים אפשריים.
את המשתנה הבדיד קל מאוד למדוד, ולספור את ערכי המשתנה: ילד אחד, שני ילדים, שלושה ילדים...
אבל במשתנה רציף זה מסובך יותר.
למשל, אחות בית הספר מדדה את גובהם של כל ילדי כיתה ט' בתיכון בנתניה, ורשמה את הנתונים במחברתה, בין היתר כתבה שם: יונית – 163 ס"מ.
האם הגובה של יונית הוא 163 ס"מ? בדיוק? או שאולי היא בעצם 163.001 ס"מ? או 163.00138627 ס"מ?
קשה להיות בטוחים מהו הערך המדויק של גובהה של יונית. והאמת היא, שזה בעיקר תלוי עד כמה מכשיר המדידה של האחות הוא מדויק.
אבל יונית היא רק דוגמה שמשקפת בעיה רחבה יותר - למעשה קשה ואף בלתי אפשרי למדוד בצורה מדויקת משתנה רציף, כי תמיד אפשר לדייק את המדידה עוד ועוד עד אינסוף.
כדי לפתור את הבעיה הזו <u>לא נתייחס לערכים נקודתיים במשתנים רציפים, אלא אך ורק לטווח של ערכים</u>.
בדוגמה שלפנינו, נאמר שהגובה של יונית נמצא <u>בטווח שבין 162.5 ס"מ ל-163.5 ס"מ</u>.

### ייצוג גרפי של משתנה רציף

כשעסקנו במשתנה בדיד, תיארנו את השכיחות שלו בטבלת שכיחויות, ועל פיה בנינו דיאגרמת עמודות. ניתן לראות שבין העמודות בטבלה יש מרווחים – כי אין למשתנה רציפות.
מאידך, כאשר נעבור לתאר משתנה רציף - לא יהיו יותר רווחים בין הערכים.... כי המשתנה רציף!
כדי לייצג את המשתנה ראשית נבנה את <u>הטווחים</u> בטבלה, ואז נציג אותם בייצוג גרפי שנקרא היסטוגרמה:

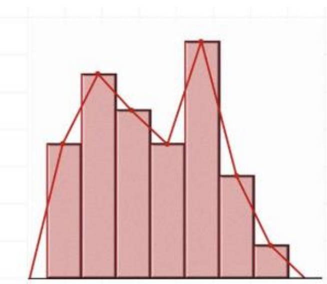
**משתנה בדיד**

| ערך המשתנה | שכיחות |
|---|---|
| 1 | 40 |
| 2 | 10 |
| 3 | 20 |
| 4 | 30 |



**משתנה רציף**

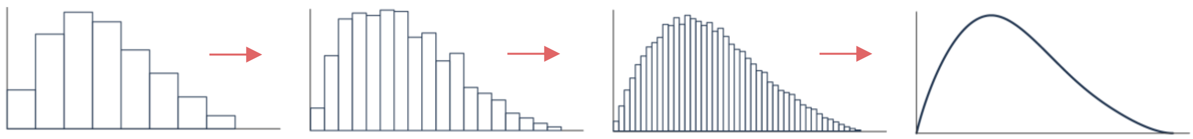
| ערכי המשתנה | שכיחות |
|---|---|
| 0.5-1.5 | 40 |
| 1.5-2.5 | 60 |
| 2.5-3.5 | 50 |
| 3.5-4.5 | 42 |
| 4.5-5.5 | 75 |
| 5.5-6.5 | 35 |
| 6.5-7.5 | 12 |



ניתן לראות בגרפים, שבדיאגרמת עמודות יש "מרחקים" בין עמודה לעמודה, אבל בהיסטוגרמה העמודות צמודות זו לזו. וזה גם הגיוני – במשתנה הרציף, אין רווחים בין ערך לערך- יש רציפות.

#### מהיסטוגרמה לעקומה רציפה (עקומה חלקה)

היסטוגרמה היא צורת הצגה שמתאימה בעיקר למדגמים קטנים. אבל אם נרצה לתאר אוכלוסיות בצורה כללית יותר, כלומר כאשר נרצה כיצד נראית ההתפלגות הכללית של האוכלוסיה, עלינו למצוא את הפונקציה הכללית של התפלגות האוכלוסיה. כדי לתאר פונקציה זו יש להקטין עוד ועוד את רוחב העמודות – ככל שנקטין אותן נקבל התפלגות עם פחות "קפיצות", עד שנקבל התפלגות חלקה לגמרי, כלומר עקומה רציפה.



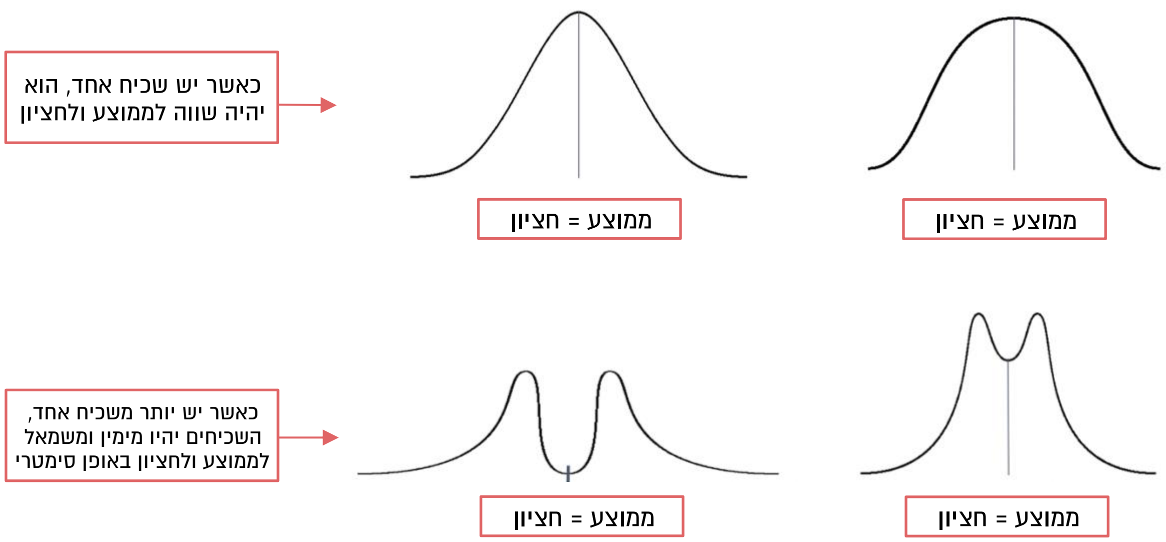
ההתפלגות שתתקבל בסוף היא למעשה פונקציה, אשר מתארת את ריכוז הערכים בכל אזור בגרף.

#### דגשים

1. התפלגויות רציפות נקראות "התפלגות צפיפות" או "התפלגות הסתברות" והן מתארות את צורת הפיזור של ערכי המשתנה באוכלוסיה. במילים פשוטות יותר, הן מעין "רנטגן" של האוכלוסיה כולה: בעזרתן ניתן למשל לקבוע כמה אחוז מהאוכלוסיה נמצאים בין גובה 1.70 לגובה 1.72, או איזה אחוז מהאוכלוסיה צפוי לפרוש לפנסיה בין הגילאים 65-67. וגם – מה הסיכוי שאדם יפתח מחלת לב בין הגילאים 30-50?
במילים אחרות, בעזרת התפלגות רציפה ניתן לקבל תשובות לשאלות פרקטיות ומעשיות בעולם סביבנו.
2. התפלגויות רציפות שנעסוק בהן תמיד מציגות שטח של 100% בין העקומה לבין ציר ה-x.

#### התפלגויות סימטריות ומיקום מדדי המרכז

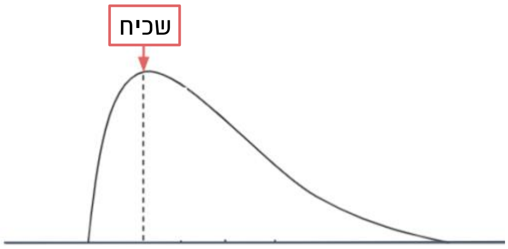
בהתפלגויות סימטריות, פיזור הערכים מעל ומתחת למרכז ההתפלגות הוא זהה לחלוטין, זו תמונת מראה ממש. לכן, החציון והממוצע נמצאים במרכז ההתפלגות, באותה נקודה:



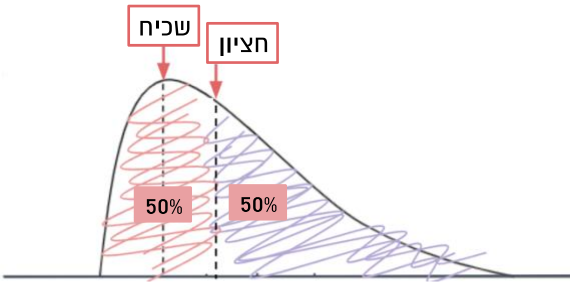
**התפלגויות א-סימטריות ומיקום מדדי המרכז**

במצב שבו ההתפלגות אינה סימטרית, מדדי המרכז יתחילו להתרחק זה מזה, וכבר לא יהיו באותה הנקודה במרכז ההתפלגות. לפנינו התפלגות **א-סימטרית עם זנב ימני**. ניתן לראות שבהתפלגות זו רוב הערכים נמוכים, ויש זנב ארוך של ערכים גדולים יותר ויותר שנמצאים מימין.

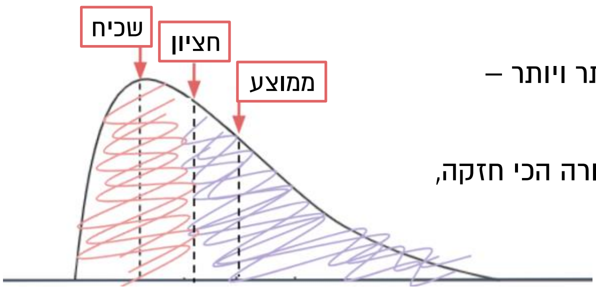
נמצא את מיקום מדדי המרכז בהתפלגות זו:




1. ראשית נמקם את השכיח.
   השכיח יימצא בנקודה הגבוהה ביותר!
   תמיד הכי קל ופשוט למצוא את השכיח:



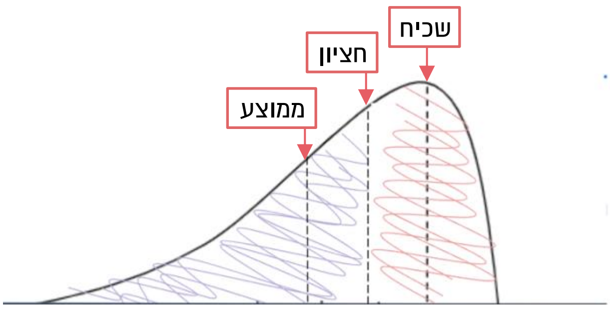

2. איפה יהיה החציון?
   החציון מחלק את ההתפלגות לשני חלקים שווים בשטחם:
   50% מהערכים עד לנקודת החציון,
   ו-50% מהערכים מנקודת החציון ועד לסוף ההתפלגות.
   במקרה הזה עלינו למקם את החציון מעט ימינה מהשכיח:




3. לבסוף הממוצע:
   הממוצע הוא מדד המרכז הרגיש ביותר בהתפלגות.
   מה זה אומר?
   שככל שנרחיק את הערכים "בזנב" של ההתפלגות ימינה יותר ויותר – הממוצע יושפע בצורה מאוד משמעותית.
   הערכים הקיצוניים שנמצאים מימין, ימשכו אותו אליהם בצורה הכי חזקה, והוא יתרחק עוד ימינה ביחס לחציון:

**שימו לב:**

כאשר ההתפלגות א-סימטרית שלילית (כלומר התפלגות **א-סימטרית עם זנב שמאלי**) היחס בין המדדים יתהפך יחד עם כיוון ההתפלגות:



## מתרגלים

### א. מיקום מדדי המרכז בהתפלגויות

**1.** לפניכם שתי התפלגויות שמציגות את גובה הטמפרטורה היומית שנמדדה בשתי מדינות שונות, בין השנים 1990-2012. נתון כי בשתי ההתפלגויות השכיח הוא 36 מעלות.


א. האם נכון לומר שגם החציון בשתי ההתפלגויות שווה ל-36?

כן. / לא. נמקו תשובתכם ______________________________

ב. האם נכון לומר שהממוצע בשתי ההתפלגויות שווה ל-36?

כן. / לא. נמקו תשובתכם ______________________________

ג. האם נכון לומר שבהתפלגות 2 הממוצע גדול מהחציון?

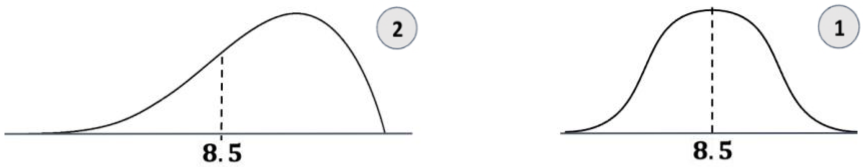
כן. / לא. נמקו תשובתכם ______________________________

ד. סמנו על גבי ההתפלגויות את הממוצע, השכיח והחציון (מיקום משוער)

**2.** לפניכם שתי התפלגויות שמציגות את גובה השכר בשני מפעלים שונים.

השכר החציוני בשני המפעלים הוא 8.5 אלף ₪.

סמנו ליד כל אחד מהמשפטים הבאים אם הוא נכון בהכרח, לא נכון בהכרח, או שאי אפשר לדעת.




**א.** בהתפלגות 1 כל מדדי המרכז שווים זה לזה — נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

**ב.** הממוצע זהה בשתי ההתפלגויות — נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

**ג.** בהתפלגות 2 הממוצע קטן מהשכיח — נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

**ד.** בהתפלגות 2 החציון קטן מהממוצע — נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

**ה.** הממוצע בהתפלגות 1 גדול מהשכיח בהתפלגות 2 — נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

**ו.** השכיח בהתפלגות 2 שווה ל- 10 אלף ₪ בחודש — נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

**ז.** השכיח בהתפלגות 2 שווה ל-8 אלף ₪ בחודש — נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

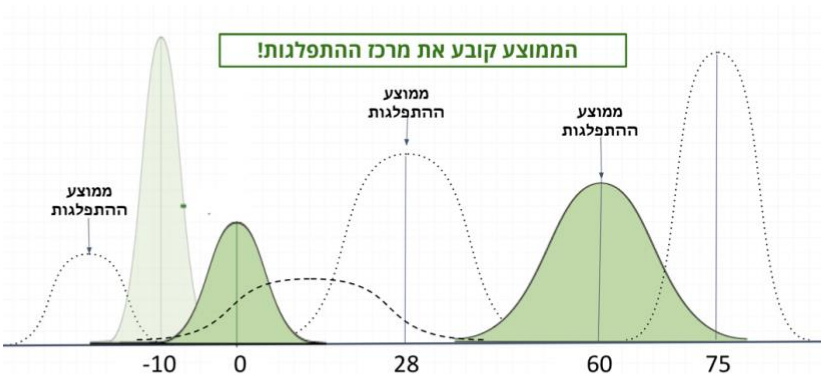
## יחידה שלישית
# משפחת ההתפלגויות הנורמליות

### התפלגות נורמלית

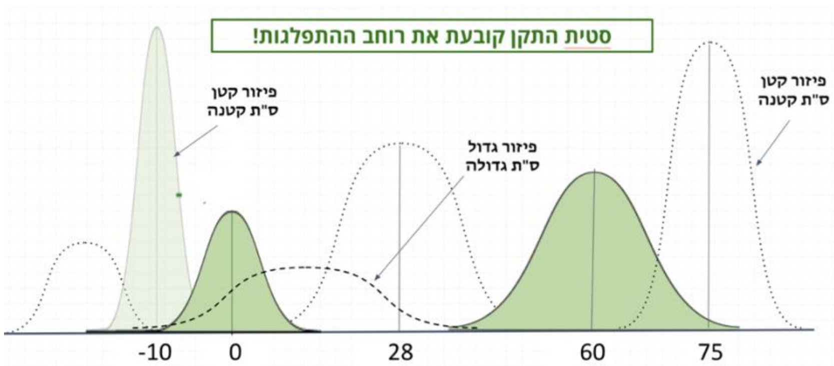
מתוך כלל ההתפלגויות הרציפות, יש אחת שהיא המוכרת ביותר בעולם - **ההתפלגות הנורמלית.**
ההתפלגות הנורמלית מסייעת בתיאור של תופעות רבות סביבנו, והיא מאפשרת לבצע מחקרים סטטיסטיים ולהסיק מהם מסקנות.

לפניכם התפלגויות נורמליות שונות:

ניתן לראות בשרטוט כי קיימות התפלגויות נורמליות רבות. את מיקומה של ההתפלגות על ציר ה-X קובע הממוצע.



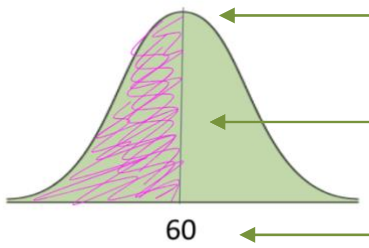

הפיזור של התצפיות סביב הממוצע מחושב על ידי סטית התקן.
בהתפלגות נורמלית, סטית התקן קובעת את רוחב הפעמון- ככל שסטית התקן גדולה יותר רוחב הפעמון גדול יותר, ולהיפך.




### דגשים חשובים:

1. ההתפלגות סימטרית.
2. מאחר שההתפלגות היא סימטרית: הממוצע, החציון והשכיח שווים זה לזה.
3. ככל שמתרחקים מהמרכז צפיפות הערכים (ריכוז הערכים) הולכת ויורדת.
4. שטחה של ההתפלגות הנורמלית הוא 1.
   נבטא שטח זה באחוזים, כלומר השטח בין ההתפלגות לבין ציר ה-x הוא 100%.

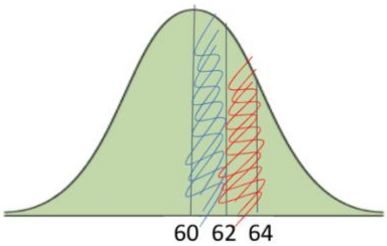
**נדגים את תכונות ההתפלגות הנורמלית**



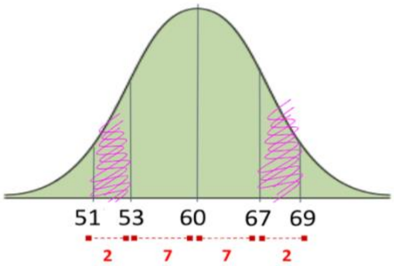

הנקודה הגבוהה ביותר נמצאת במרכז ההתפלגות לכן שם נמצא **השכיח.**

השטח מימין ומשמאל למרכז ההתפלגות שווה ל-50% לכן **החציון** נמצא במרכז.

ההתפלגות סימטרית לכן **הממוצע** נמצא בדיוק במרכז ההתפלגות




ככל שנתרחק מהממוצע כמות הערכים תלך ותרד – לכן ניתן לקבוע כי השטח בין 60-62 **גדול יותר** מהשטח בין 62-64.




**סימטריה** שני השטחים הצבועים זהים זה לזה! ניתן לראות כי הם נמצאים במרחק שווה מהממוצע, כלומר הם סימטריים ביחס לממוצע.

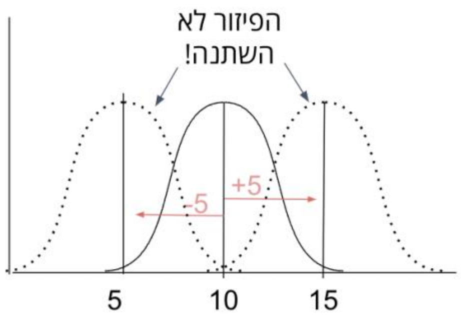
**טרנספורמציות על פונקציות רציפות**

**א. הוספה והפחתה**

בהוספה של קבוע לכל ערכי ההתפלגות, למשל כל ערכי ההתפלגות גדלו ב-5, ההתפלגות כולה תזוז 5 יחידות ימינה לאורך ציר ה-x.

מכאן, שגם השכיח, החציון והממוצע יגדלו ב-5.

עם זאת חשוב לשים לב שהפיזור לא ישתנה, כלומר סטית התקן תישאר כשהיתה.



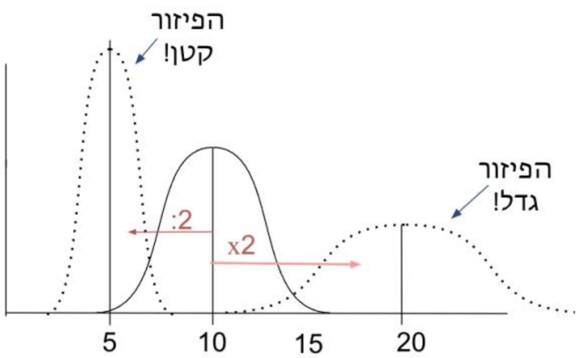

**ב. הכפלה וחלוקה**

בהכפלה של כל ערכי ההתפלגות כמובן שכולם יגדלו. ויחד איתם יגדלו השכיח, החציון והממוצע. בדומה להוספה והפחתה, גם בהכפלה ההתפלגות תנוע לאורך ציר ה-x.

אבל בהכפלה קורה משהו נוסף: הפיזור של הערכים סביב הממוצע גדל. כלומר לא רק הערכים עצמם גדלים, אלא גדל גם המרחק שלהם מהמרכז, ואחד מהשני.

לכן ברור מדוע במצב כזה סטית התקן תגדל, כלומר רוחב הפעמון של ההתפלגות יגדל.

אבל מדוע <u>גובה</u> הפעמון קטן?




חשוב לזכור - מאחר ששטח ההתפלגות חייב להישמר (הוא תמיד מייצג 100%), ומאחר שהרוחב גדל, הגובה חייב לרדת...

## מספר הערות (למורים בלבד)

**א.** מצורפת נוסחת ההתפלגות הנורמלית. אין צורך לזכור או לדעת אותה, אך היא מצורפת כדי שנשים לב שההתפלגות הנורמלית היא לא משיכת עט אקראית אלא פונקציה מורכבת למדי:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

**ב.** חשוב לזכור שההתפלגות הנורמליות היא למעשה פונקציה תיאורטית, כלומר לא התפלגות שהתקבלה על בסיס קבוצת תצפיות אמיתית שדגמנו מתוך האוכלוסיה. בקבוצת תצפיות אמיתית שדגמנו מתוך האוכלוסיה נקבל לרוב היסטוגרמה "ששואפת לנורמליות". ככל שנדגום קבוצה גדולה יותר מתוך האוכלוסיה, ובהנחה שהמשתנה מתפלג נורמלית באוכלוסיה, תתקבל התפלגות שהולכת ומתקרבת להתפלגות התיאורטית.
אולם, ברוב השאלות שבפרק זה וגם בבגרות - נזניח הבדל זה שבין המדגם והאוכלוסיה, ובמדגמים "גדולים" נתיחס למדגם עצמו כאילו הוא באמת מתפלג נורמלית.

**ג.** ההתפלגות הנורמלית היא <u>אין סופית</u> משני צדדיו של הממוצע, ונמשכת בצורה אסימפטוטית לציר ה-x. לרוב נזניח את החלקים שמרוחקים יותר מ-3 סטיות תקן מימין ומשמאל לממוצע, שכן הם ניתנים להזנחה.

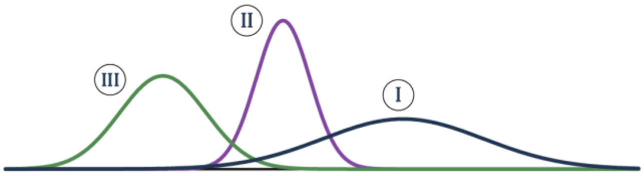
**ד.** שימו לב שנעסוק אך ורק בהתפלגויות ששטחן מייצג 100% מהמקרים. התפלגויות אלו נקראות "התפלגויות הסתברות" והשטח שלהן מייצג את הסיכוי או ההסתברות לקבל את ערכי המשתנה.

**ה.** קיימות גם התפלגויות נורמליות ששטחן משקף שכיחות "אמיתית" ולא יחסית, כלומר התפלגויות ששטחן משקף את גודל האכלוסיה ממש (למשל, ניתן ליצור התפלגות לתיאור גובה האוכלוסייה ביבשת אמריקה, שבה שטח ההתפלגות הנורמלית ישקף את גודל האוכלוסיה ביבשת אמריקה שהיא 1,035,298,985 איש) הבדל זה בין התפלגויות שונות מקביל לשוני שיש בין טבלת שכיחות וטבלת שכיחות יחסית.

## מתרגלים

### א. ממוצע וסטית תקן בהתפלגות נורמלית

**1.** התבוננו בגרפים של ההתפלגויות הנורמליות הבאות, וענו על הסעיפים הבאים:




**א.** ההתפלגות בעלת הממוצע הגדול ביותר היא ________

**ב.** ההתפלגות בעלת הממוצע הקטן ביותר היא ________

**ג.** ההתפלגות בעלת סטיית התקן הגדולה ביותר היא ________

**ד.** ההתפלגות בעלת סטיית התקן הקטנה ביותר היא ________

**2.** ידוע כי גבהים מתפלגים נורמלית. ידוע כי ממוצע הגבהים במדינות אסיה נמוך מממוצע הגבהים במדינות אירופה, וכי סטיית התקן של התפלגות הגבהים באסיה קטנה מסטיית התקן באירופה.
נתונה התפלגות הגבהים באסיה:


**א.** שרטטו בקו חופשי את התפלגות הגבהים באירופה.

**ב.** ידוע כי בצפון אמריקה ממוצע הגבהים גבוה יותר מאשר באסיה ואירופה.
שרטטו בקו חופשי את התפלגות הגבהים בצפון אמריקה.

**ג.** בקנדה סטיית התקן של היא הקטנה ביותר, ואנשים בה הנמוכים ביותר.
הוסיפו את התפלגות הגבהים בקנדה.

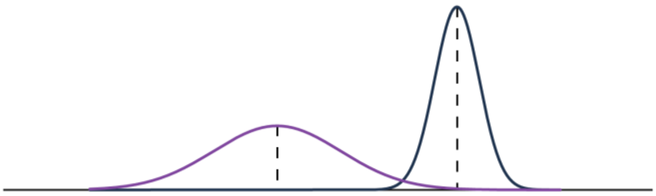
**3.** נבדקה טמפרטורת הגוף של האדם ביחס לחיות שונות: כלבים, חתולים וציפורים. (כל הטמפרטורות שנבדקו מתפלגות נורמלית). נמצא כי טמפרטורת הגוף של האדם נמוכה מזו של כלבים, וסטית התקן של גוף האדם קטנה יותר מזו של כלבים.

**א.** מתוארת ההתפלגות של טמפרטורת הגוף של הכלבים, הוסיפו לגרף ביד חופשית את ההתפלגות של בני האדם.


**ב.** טמפרטורת הגוף של חתולים גבוהה מזו של כלבים, וסטית התקן שלה גדולה יותר. הוסיפו לגרף ביד חופשית את ההתפלגות של החתולים.

**ג.** טמפרטורת הגוף של ציפורים היא הגבוהה ביותר מבין החיות שנבדקו. עם זאת סטית התקן שלה קטנה יותר מזו של בני האדם. הוסיפו לגרף ביד חופשית את ההתפלגות של ציפורים.

**4.** ידוע כי משתנה הטמפרטורה מתפלג נורמלית: נבדקה הטמפרטורה הממוצעת בצפון רוסיה, לעומת ההתפלגות הממוצעת באזור קו המשווה.
נמצא כי הטמפרטורה הממוצעת בצפון רוסיה נמוכה מאוד, ובקו המשווה הטמפרטורה גבוהה יותר, עוד נמצא סטית התקן בצפון רוסיה גדולה יותר. נתונות ההתפלגויות של הטמפרטורות הממוצעות בשני האזורים:



**א.** סמנו על כל גרף איזה אזור הוא מייצג.

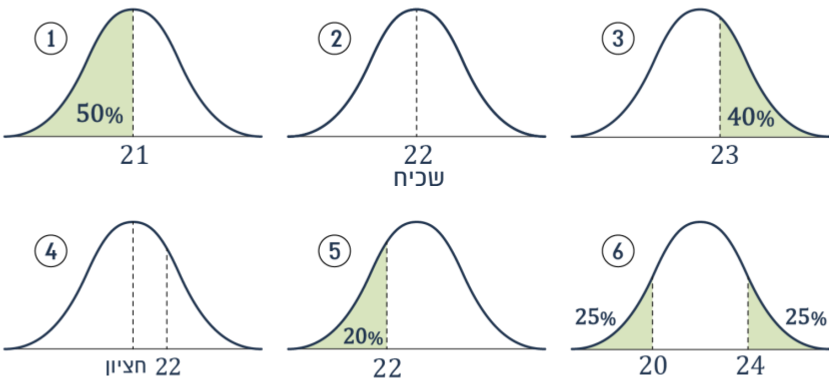
**ב.** ידוע כי הטמפרטורה הממוצעת בישראל גבוהה מאשר בצפון רוסיה, אך נמוכה מאזור קו המשווה. עוד ידוע כי סטית התקן בישראל קטנה מצפון רוסיה, אך גדולה מאזור קו המשווה. ציירו ביד חופשית את ההתפלגות של ישראל.

## ב. תכונות ההתפלגות הנורמלית

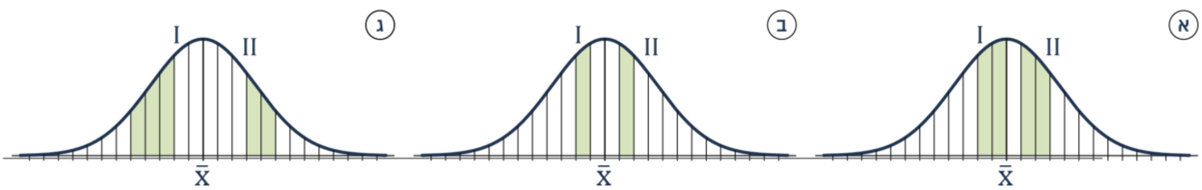
**5.** נתונה התפלגות נורמלית, שהממוצע שלה 22.

א. אילו מהגרפים הבאים עשוי להתאים לנתון?

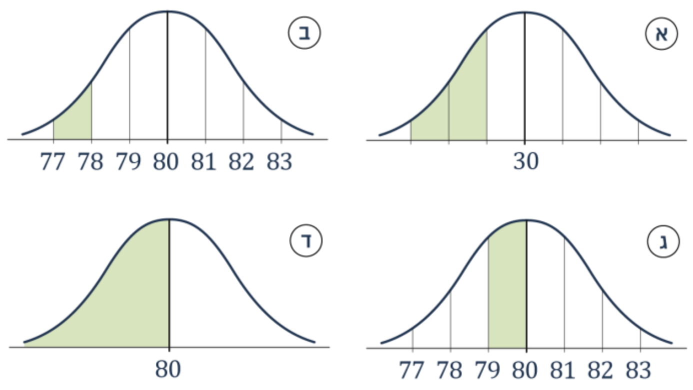
ב. הסבירו עבור כל אחד מהשרטוטים שפסלתם מדוע הוא אינו מתאים לנתונים.



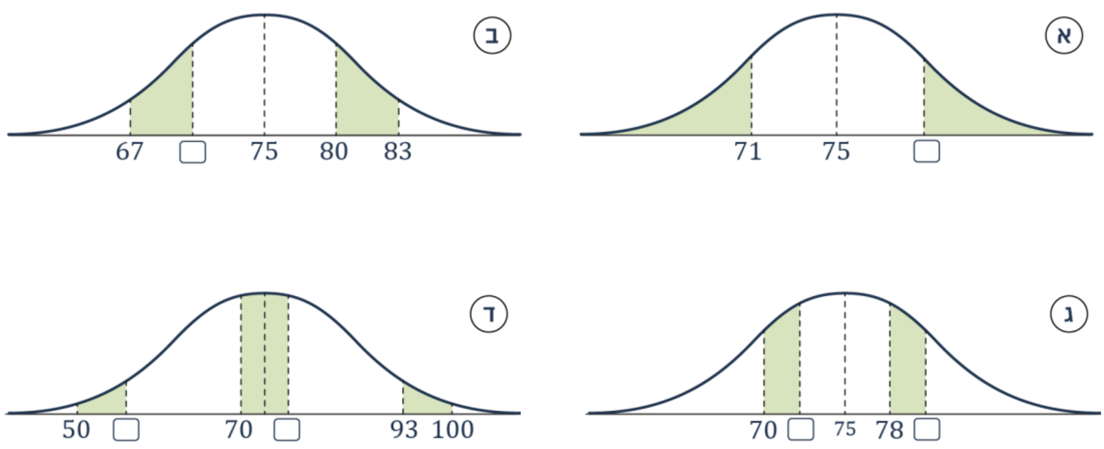

**6.** לפניכם התפלגויות נורמליות, ומסומנים בהם 2 שטחים.
קבעו בכל אחת מההתפלגויות הבאות האם שטח I **גדול/קטן/זהה** לשטח II, נמקו.



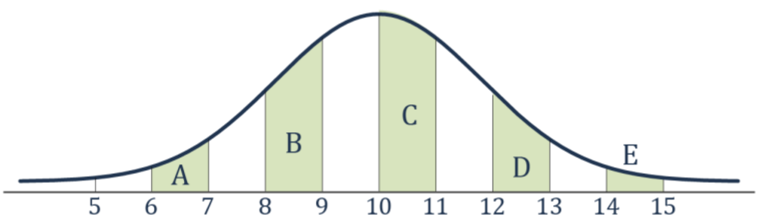
**7.** בהתפלגויות הבאות הממוצע הוא 80, ובכל אחת מהן מסומן שטח כלשהו משמאל לממוצע.
סמנו מימין לממוצע שטח זהה לשטח המסומן.




**8.** בהתפלגויות הבאות הממוצע הוא 75, ובכל אחת מהן מסומנים שני שטחים שווים.
בהסתמך על הסימטריה של ההתפלגות הנורמלית, כתבו ערך מתאים בריבוע הריק.




**9.** נתונה התפלגות נורמלית עם ממוצע 10, מסומנים בה 5 שטחים.




א. קבעו בכל אחד מהזוגות הבאים איזה שטח גדול יותר:
- B ____ A
- E ____ A
- B ____ C
- A ____ D

ב. איזה מהשטחים הוא הגדול ביותר?

ג. איזה מהשטחים הוא הקטן ביותר?

ד. סדרו את השטחים מהקטן לגדול.

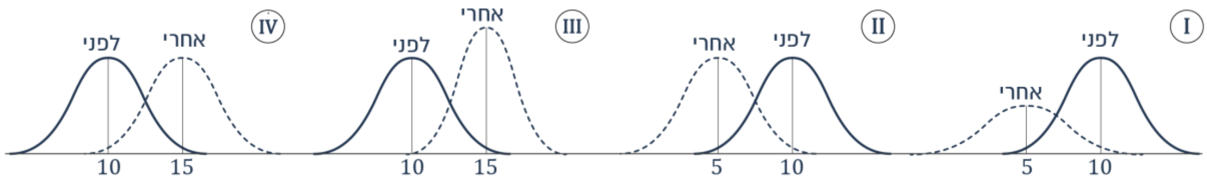
## ג. טרנספורמציות על התפלגות נורמלית

**10.** נתונות התפלגויות שונות.

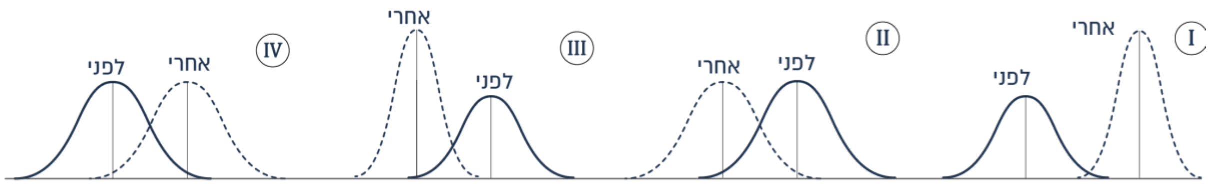
בכל אחד מהסעיפים הבאים ערכו שינוי על כל ערכי ההתפלגות.

בחרו מיהו הגרף המתאר את ההתפלגות לפני השינוי ואחריו, נמקו את בחירתכם.

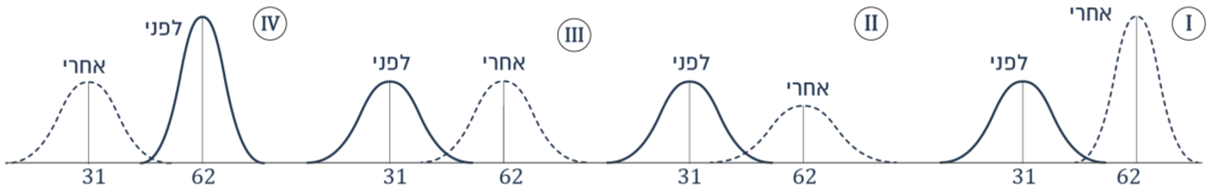
**א.** הוספת 5



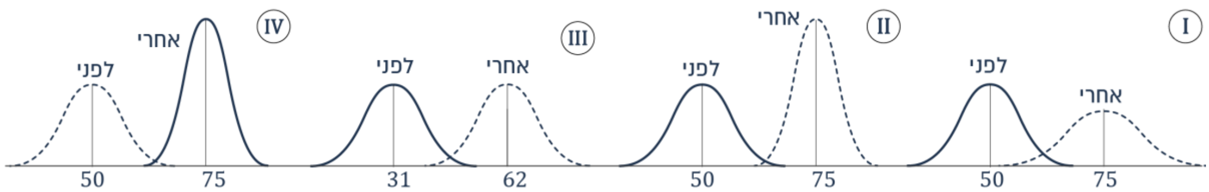

**ב.** ירידה ב-35%




**ג.** הכפלה פי 2



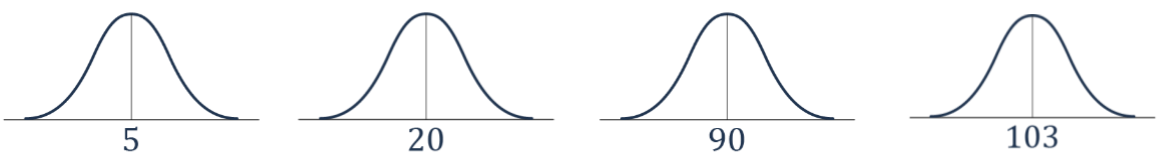

**ד.** תוספת של 50%




**11.** בכל אחד מהסעיפים הבאים ערכו שינוי על כל ערכי ההתפלגות.

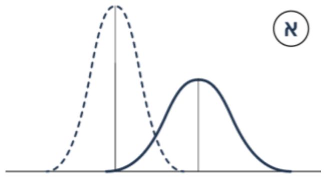
הוסיפו ביד חופשית את הגרף המתאר את ההתפלגות לאחר השינוי.

**א.** הפחתה של 10 **ב.** הפחתה של 50% **ג.** תוספת של 2 **ד.** הכפלה פי 2



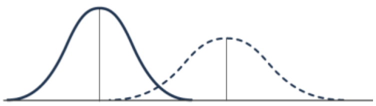
**12.** בכל אחד מהסעיפים מתוארת התפלגות שעברה טרנספורמציה.
הגרף החלק מתאר את ההתפלגות לפני השינוי, והמקווקו אחרי השינוי.
קבעו בכל סעיף איזו טרנספורמציה בוצעה.

א



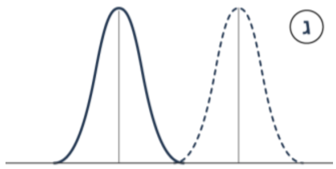
הוספה / הפחתה / הכפלה / חלוקה

ב



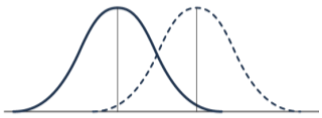
הוספה / הפחתה / הכפלה / חלוקה

ג



הוספה / הפחתה / הכפלה / חלוקה

ד



הוספה / הפחתה / הכפלה / חלוקה

## יחידה רביעית
# התפלגות נורמלית וטבלת z

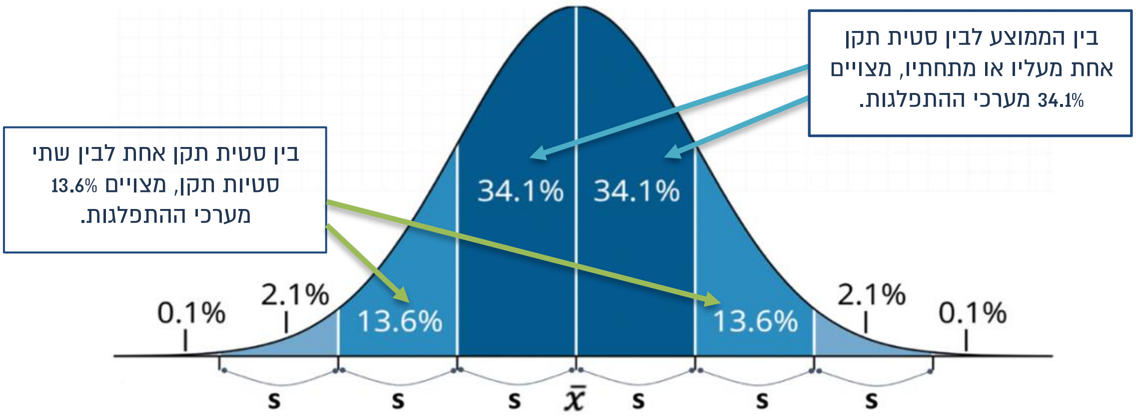
**הסבר על טבלת ציוני Z**

בפרק הקודם הכרנו את ההתפלגות הנורמלית ואת התכונות שלה. ראינו שההתפלגות סימטרית, ולכן לפעמים ניתן להסיק על שטחים בהתפלגות גם בלי לחשב אותם. למשל - אם השטחים סימטריים ביחס למרכז ההתפלגות, נוכל לקבוע כי הם שווים זה לזה ללא חישוב.

בחלק זה נלמד לחשב שטחים בהתפלגות הנורמלית בצורה מדויקת יותר. כדי לעשות זאת עלינו להרחיב את הידע שלנו לגבי השטחים מתחת לעקומת ההתפלגות.

באיור הבא נתונה התפלגות נורמלית כלשהי. נוכל לראות שאם אנחנו מתרחקים מהממוצע במרחקים קבועים, במקרה זה "בקפיצות" של סטיות תקן – מתקבלים שטחים קבועים מימין ומשמאל לממוצע.

למשל, אם נתרחק מהממוצע סטית תקן אחת ימינה (או שמאלה) נקבל שטח של 34.1%. ואם נתקדם מסטית תקן אחת לשתי סטיות תקן מהממוצע – נראה שמתקבל שטח של 13.6%.




**חשוב**: התופעה הזו מתקיימת בכל ההתפלגויות הנורמליות בעולם, ואינה תלויה בממוצע הספציפי או בסטיית התקן של ההתפלגות!

אבל.... "הקפיצות" במרחקים של סטיות תקן הן קצת מוגבלות... הרי לא תמיד נרצה להתרחק מהממוצע בדיוק בסטית תקן. לפעמים נרצה להתרחק רק רבע סטית תקן מהממוצע. לפעמים שליש סטית תקן. ולפעמים בכלל נרצה לבדוק את הכיוון ההפוך – כלומר כמה צריך להתרחק מהממוצע כדי לתחום שטח של 20%?

אם כן, אנחנו צריכים כלי שאם נזין בו את המרחק מהממוצע הוא יחזיר לנו חזרה את השטח מתחת לעקומה. או להיפך- אם נזין בו את השטח שאנחנו רוצים, נניח 25% מתחת לממוצע, הוא יחזיר לנו חזרה כמה עלינו להתרחק מהממוצע. **הכלי הזה הוא טבלת Z.**

בשורה זו מופיעה הספרה השניה ציון Z

בעמודה זו מופיעים ציוני Z, מציון Z= -3 ועד ציון Z= 3

התאים בתוך הטבלה מבטאים את האחוז, או הסיכוי לקבל ערך נמוך או שווה לציון תקן זה

Z= -1.53

P=0.0630

Z= -0.72

P=0.2360

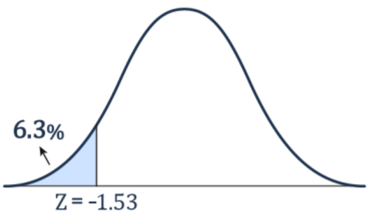
## טבלת התפלגות נורמלית

| z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3.0 | 0.0013 | 0.0013 | 0.0013 | 0.0012 | 0.0012 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0010 | 0.0010 |
| -2.9 | 0.0019 | 0.0018 | 0.0017 | 0.0017 | 0.0016 | 0.0016 | 0.0015 | 0.0015 | 0.0014 | 0.0014 |
| -2.8 | 0.0026 | 0.0025 | 0.0024 | 0.0023 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0020 | 0.0019 |
| -2.7 | 0.0035 | 0.0034 | 0.0033 | 0.0032 | 0.0031 | 0.0030 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0026 |
| -2.6 | 0.0046 | 0.0045 | 0.0044 | 0.0043 | 0.0041 | 0.0040 | 0.0039 | 0.0038 | 0.0037 | 0.0036 |
| -2.5 | 0.0062 | 0.0060 | 0.0059 | 0.0057 | 0.0055 | 0.0054 | 0.0052 | 0.0051 | 0.0049 | 0.0048 |
| -2.4 | 0.0082 | 0.0080 | 0.0078 | 0.0075 | 0.0073 | 0.0071 | 0.0069 | 0.0068 | 0.0066 | 0.0064 |
| -2.3 | 0.0107 | 0.0104 | 0.0102 | 0.0099 | 0.0096 | 0.0094 | 0.0091 | 0.0089 | 0.0087 | 0.0084 |
| -2.2 | 0.0139 | 0.0135 | 0.0132 | 0.0129 | 0.0125 | 0.0122 | 0.0119 | 0.0116 | 0.0113 | 0.0110 |
| -2.1 | 0.0179 | 0.0174 | 0.0170 | 0.0166 | 0.0162 | 0.0158 | 0.0154 | 0.0150 | 0.0146 | 0.0143 |
| -2.0 | 0.0227 | 0.0222 | 0.0217 | 0.0212 | 0.0207 | 0.0202 | 0.0197 | 0.0192 | 0.0188 | 0.0183 |
| -1.9 | 0.0287 | 0.0281 | 0.0274 | 0.0268 | 0.0262 | 0.0256 | 0.0250 | 0.0244 | 0.0238 | 0.0233 |
| -1.8 | 0.0359 | 0.0350 | 0.0344 | 0.0336 | 0.0329 | 0.0322 | 0.0314 | 0.0307 | 0.0301 | 0.0294 |
| -1.7 | 0.0446 | 0.0436 | 0.0427 | 0.0418 | 0.0409 | 0.0401 | 0.0392 | 0.0384 | 0.0375 | 0.0367 |
| -1.6 | 0.0550 | 0.0540 | 0.0530 | 0.0520 | 0.0505 | 0.0495 | 0.0485 | 0.0475 | 0.0465 | 0.0455 |
| -1.5 | 0.0670 | 0.0650 | 0.0640 | 0.0630 | 0.0620 | 0.0610 | 0.0590 | 0.0580 | 0.0570 | 0.0560 |
| -1.4 | 0.0810 | 0.0790 | 0.0780 | 0.0760 | 0.0750 | 0.0740 | 0.0720 | 0.0710 | 0.0690 | 0.0680 |
| -1.3 | 0.0970 | 0.0950 | 0.0930 | 0.0920 | 0.0900 | 0.0890 | 0.0870 | 0.0850 | 0.0840 | 0.0820 |
| -1.2 | 0.1150 | 0.1130 | 0.1110 | 0.1090 | 0.1070 | 0.1060 | 0.1040 | 0.1020 | 0.1000 | 0.0980 |
| -1.1 | 0.1360 | 0.1340 | 0.1310 | 0.1290 | 0.1270 | 0.1250 | 0.1230 | 0.1210 | 0.1190 | 0.1170 |
| -1.0 | 0.1590 | 0.1560 | 0.1540 | 0.1520 | 0.1490 | 0.1470 | 0.1450 | 0.1420 | 0.1400 | 0.1380 |
| -0.9 | 0.1840 | 0.1810 | 0.1790 | 0.1760 | 0.1740 | 0.1710 | 0.1680 | 0.1660 | 0.1630 | 0.1610 |
| -0.8 | 0.2120 | 0.2090 | 0.2060 | 0.2030 | 0.2000 | 0.1980 | 0.1950 | 0.1920 | 0.1890 | 0.1870 |
| -0.7 | 0.2420 | 0.2390 | 0.2360 | 0.2330 | 0.2300 | 0.2270 | 0.2240 | 0.2210 | 0.2180 | 0.2150 |
| -0.6 | 0.2740 | 0.2710 | 0.2680 | 0.2640 | 0.2610 | 0.2580 | 0.2550 | 0.2510 | 0.2480 | 0.2450 |
| -0.5 | 0.3080 | 0.3050 | 0.3010 | 0.2980 | 0.2950 | 0.2910 | 0.2880 | 0.2840 | 0.2810 | 0.2780 |
| -0.4 | 0.3450 | 0.3410 | 0.3370 | 0.3340 | 0.3300 | 0.3260 | 0.3230 | 0.3190 | 0.3160 | 0.3120 |
| -0.3 | 0.3820 | 0.3780 | 0.3750 | 0.3710 | 0.3670 | 0.3630 | 0.3590 | 0.3560 | 0.3520 | 0.3480 |
| -0.2 | 0.4210 | 0.4170 | 0.4130 | 0.4090 | 0.4050 | 0.4010 | 0.3970 | 0.3940 | 0.3900 | 0.3860 |
| -0.1 | 0.4600 | 0.4560 | 0.4520 | 0.4480 | 0.4440 | 0.4400 | 0.4360 | 0.4320 | 0.4290 | 0.4250 |
| -0.0 | 0.5000 | 0.4960 | 0.4920 | 0.4880 | 0.4840 | 0.4800 | 0.4760 | 0.4720 | 0.4680 | 0.4640 |
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5200 | 0.5240 | 0.5280 | 0.5320 | 0.5360 |
| 0.1 | 0.5400 | 0.5440 | 0.5480 | 0.5520 | 0.5560 | 0.5600 | 0.5640 | 0.5680 | 0.5710 | 0.5750 |
| 0.2 | 0.5790 | 0.5830 | 0.5870 | 0.5910 | 0.5950 | 0.5990 | 0.6030 | 0.6060 | 0.6100 | 0.6140 |
| 0.3 | 0.6180 | 0.6220 | 0.6250 | 0.6290 | 0.6330 | 0.6370 | 0.6410 | 0.6440 | 0.6480 | 0.6520 |
| 0.4 | 0.6550 | 0.6590 | 0.6630 | 0.6660 | 0.6700 | 0.6740 | 0.6770 | 0.6810 | 0.6840 | 0.6880 |
| 0.5 | 0.6920 | 0.6950 | 0.6990 | 0.7020 | 0.7050 | 0.7090 | 0.7120 | 0.7160 | 0.7190 | 0.7220 |
| 0.6 | 0.7260 | 0.7290 | 0.7320 | 0.7360 | 0.7390 | 0.7420 | 0.7450 | 0.7490 | 0.7520 | 0.7550 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7610 | 0.7640 | 0.7670 | 0.7700 | 0.7730 | 0.7760 | 0.7790 | 0.7820 | 0.7850 |
| 0.8 | 0.7880 | 0.7910 | 0.7940 | 0.7970 | 0.8000 | 0.8020 | 0.8050 | 0.8080 | 0.8110 | 0.8130 |
| 0.9 | 0.8160 | 0.8190 | 0.8210 | 0.8240 | 0.8260 | 0.8290 | 0.8320 | 0.8340 | 0.8370 | 0.8390 |
| 1.0 | 0.8410 | 0.8440 | 0.8460 | 0.8480 | 0.8510 | 0.8530 | 0.8550 | 0.8580 | 0.8600 | 0.8620 |
| 1.1 | 0.8640 | 0.8660 | 0.8690 | 0.8710 | 0.8730 | 0.8750 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8850 | 0.8870 | 0.8890 | 0.8910 | 0.8930 | 0.8940 | 0.8960 | 0.8980 | 0.9000 | 0.9020 |
| 1.3 | 0.9030 | 0.9050 | 0.9070 | 0.9080 | 0.9100 | 0.9110 | 0.9130 | 0.9150 | 0.9160 | 0.9180 |
| 1.4 | 0.9190 | 0.9210 | 0.9220 | 0.9240 | 0.9250 | 0.9260 | 0.9280 | 0.9290 | 0.9310 | 0.9320 |
| 1.5 | 0.9330 | 0.9350 | 0.9360 | 0.9370 | 0.9380 | 0.9390 | 0.9410 | 0.9420 | 0.9430 | 0.9440 |
| 1.6 | 0.9450 | 0.9460 | 0.9470 | 0.9480 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9650 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9762 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9773 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9865 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9954 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

הטבלה מקשרת בין ציוני תקן (מופיעים בעמודה הראשונה ובשורה הראשונה) לבין שברים עשרוניים שנמצאים בתוך תאי הטבלה. בחלק זה נסביר מהם שברים עשרוניים אלו, וכיצד ניתן לעבוד עם הטבלה בפועל, נתחיל במשמעותם של תאי הטבלה.

### הסתברות – סיכוי – אחוז – שטח – והכל בתא אחד קטן!

בטבלה לעיל ראינו שהערך המתאים עבור ציון התקן Z=-1.53 הוא 0.0630 (מסומנים בצבע אדום).
מה המשמעות של מספר עשרוני זה?



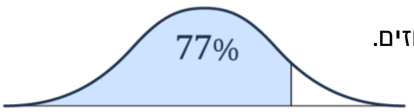

1. **משמעות גרפית** – הערך 0.0630 המופיע בטבלה מציין את השטח שמתחת לעקומה הנורמלית משמאל לציון התקן, עד לציון תקן Z=-1.53.
התא בטבלה אומנם מופיע כמספר עשרוני, אך כאשר נרצה לייצג את השטח נהפוך את המספר לאחוזים: השטח יהיה 6.3%.
2. **הסתברות או סיכוי** – ההתפלגות הנורמלית מסייעת לנו לחשב את הסיכוי או ההסתברות לקבל ערכים בהתפלגות. במקרה שלפנינו, ההסתברות לקבל ערכים שהם קטנים או שווים לציון תקן Z=-1.53 היא 0.0630.
נוכל גם לכתוב: $P(z \leq -1.53) = 0.063$

**דגשים**

3. כדי לעבור מהתא שמופיע בטבלה לשטח או לאחוז, נצטרך לכפול את הערך ב-100 (נזיז את הנקודה העשרונית שני מקומות ימינה).
4. בשאלות בהמשך ניתקל בארבעת המושגים כל הזמן: אחוז / שטח / הסתברות / סיכוי – הם מושגים שמציגים משמעות זהה ומהות אחת – לפעמים מכיוון ההתפלגות והשטח, ולעיתים מכיוון הסיכוי וההסתברות. חשוב להתרגל אליהם, ולעבור ביניהם בנוחות מבלי להיבהל משינויי נוסחים בשאלות.

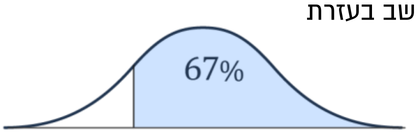
### מיומנויות נוספות במציאת שטחים (או הסתברויות) בטבלת Z

#### מציאת ציון תקן על פי אחוז נתון



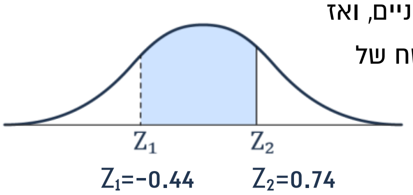

בדוגמה זו נצטרך לחשב את ציון התקן מנתוני השאלה (או שהוא יהיה נתון לנו)
ואז לחפש את התא המתאים בטבלה. תא זה נתון כשבר עשרוני, ואם נידרש, נהפוך אותו לאחוזים.
במקרה שלפנינו **ציון התקן המתאים בטבלת Z הוא Z=0.74.**

#### מציאת ציון תקן בעזרת האחוז המשלים




בדוגמה שלפנינו נתון השטח **מעל** ציון תקן מסוים. שטח זה מייצג את הסיכוי להיות מעל ציון התקן, ולא מתחתיו. מאחר שידוע שהשטח הכולל מתחת לעקומה הוא 100%, נוכל לחשב בעזרת האחוז המשלים את את השטח משמאל לציון התקן ולא מימינו.
**האחוז המשלים: 100%-67%=33%.** נבטא את האחוז שמצאנו כשבר עשרוני (0.330)
בטבלת Z נוכל לראות **שציון התקן המתאים הוא Z= -0.44.**

#### מציאת השטח בין שני ציוני תקן נתונים

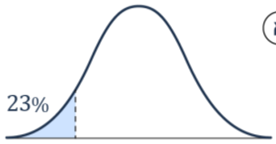



כדי למצוא שטח בין שני ציוני תקן, עלינו למצוא את השטח משמאל לציון התקן הגדול בין השניים, ואז להחסיר ממנו את השטח שנמצא משמאל לציון התקן הקטן בין השנים. במקרה שלפנינו השטח של ציון התקן הימני הוא (77%) והשטח של ציון התקן השמאלי הוא (33%). ההפרש בין השטחים הוא 77%-33%=44%. אם כן החלק הצבוע זהה ל-44% משטח ההתפלגות.

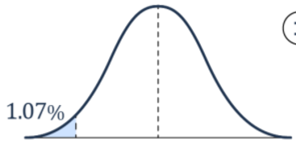
## מתרגלים

### 1. מיומנויות בעבודה עם טבלת Z

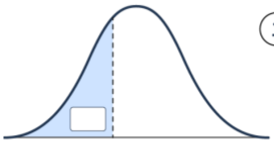
**1.** לפניכם התפלגויות נורמליות שונות. התאימו בין האחוז לבין המספר העשרוני המתאים.

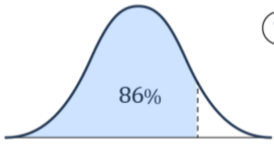
א


המספר בטבלה ______

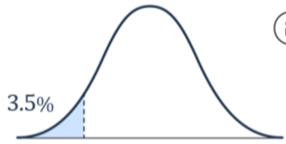
ב


המספר בטבלה ______

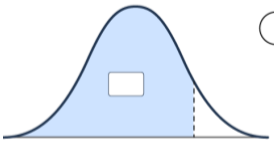
ג

המספר 0.319

ד


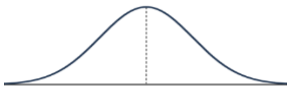
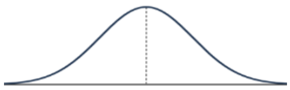
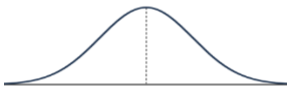
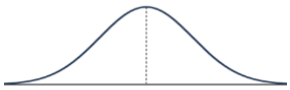
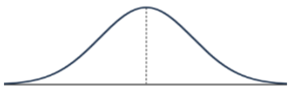
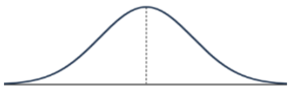
המספר בטבלה ______

ה


המספר בטבלה ______

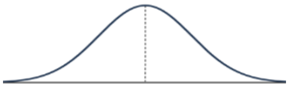
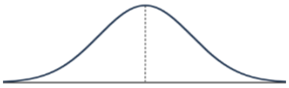
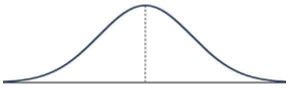
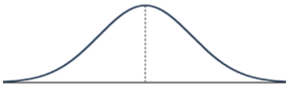
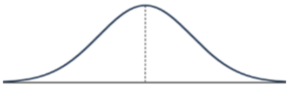
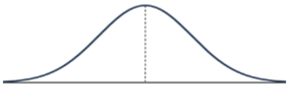
ו

המספר 0.736

**2.** לפניכם ציוני תקן שונים. עבור כל אחד מהם:
- כתבו מה ערכו של התא המתאים בטבלת Z.
- מהו האחוז המצטבר בהתפלגות הנורמלית עד לציון זה.
- סמנו על גבי ההתפלגות ביד חופשית את השטח המתאים לנתונים.

| | ציון תקן | ערך התא בטבלה | אחוז | השטח המתאים בגרף |
|---|---|---|---|---|
| א. | Z=1.22 | | |  |
| ב. | Z=-2.1 | | |  |
| ג. | Z=0 | | |  |
| ד. | Z=1.55 | | |  |
| ה. | Z=0.96 | | |  |
| ו. | Z=0.5 | | |  |

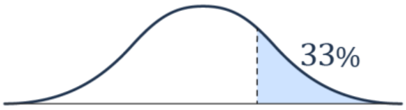
**3.** לפניכם ציוני תקן שונים. עבור כל אחד מהם, עבור כל אחד מהם יש לחשב את השטח **מימין**.

- סמנו את ציון התקן ואת השטח הנדרש על גרף ההתפלגות.
- כתבו מה ערכו של התא המתאים בטבלת Z, ואת האחוז המצטבר.
- חשבו את האחוז המשלים.

| | ציון תקן | ערך התא בטבלה | האחוז | האחוז המשלים | השטח המתאים בגרף |
|---|---|---|---|---|---|
| **א.** | Z=1.6 | | | |  |
| **ב.** | Z=-0.7 | | | |  |
| **ג.** | Z=0.92 | | | |  |
| **ד.** | Z=1.34 | | | |  |
| **ה.** | Z=-1.55 | | | |  |
| **ו.** | Z=0.39 | | | |  |

**4.** לפניכם התפלגויות נורמליות שונות ובהן מסומנים שטחים. בעזרת חישוב האחוז המשלים ל-100%, עליכם למצוא בכל התפלגות את התא המתאים בטבלת Z, ואת ערך ה-Z המתאים:

**א.**




האחוז המשלים ________

המספר בטבלה ________

ערך ה-z ________

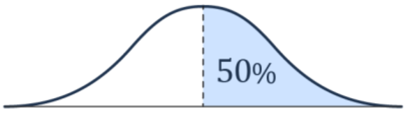
**ב.**


האחוז המשלים ________

המספר בטבלה ________

ערך ה-z ________

**ג.**

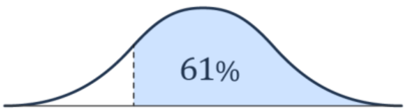



האחוז המשלים ________

המספר בטבלה ________

ערך ה-z ________

**ד.**




האחוז המשלים ________

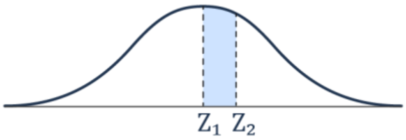
המספר בטבלה ________

ערך ה-z ________

**5.** לפניכם התפלגויות נורמליות עם שטחים שונים שמוצגים בהן.
בכל התפלגות יש לחשב בעזרת חיסור שטחים את השטח המוצג.

**א.** $z_1 = 0$ $z_2 = 1.21$

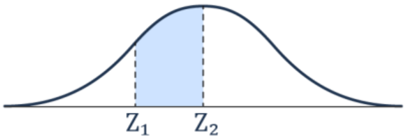
שטח מתאים________ שטח מתאים____________




השטח המסומן _____________

**ב.** $z_1 = -1.34$ $z_2 = 0$

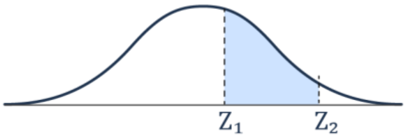
שטח מתאים________ שטח מתאים____________




השטח המסומן _____________

**ג.** $z_1 = 0.52$ $z_2 = 2.4$

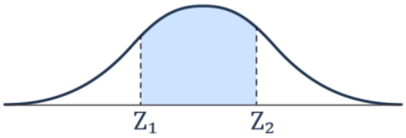
שטח מתאים________ שטח מתאים____________




השטח המסומן _____________

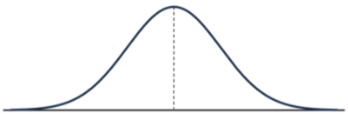
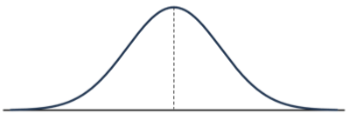
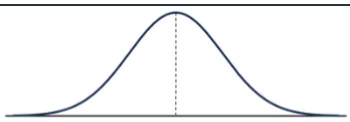
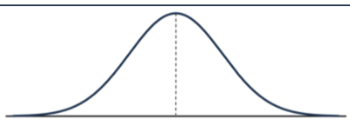
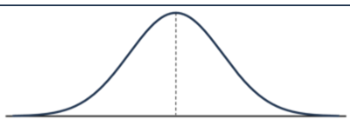
**ד.** $z_1 = -1.25$ $z_2 = 1.03$

שטח מתאים________ שטח מתאים____________

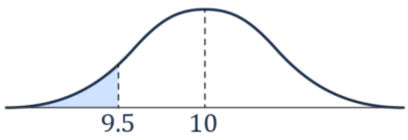



השטח המסומן _____________

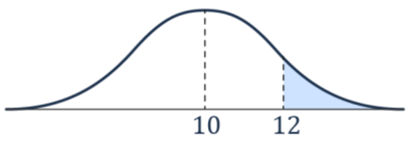
**6.** נתונה התפלגויות נורמלית שונות.
בכל אחד מהסעיפים העזרו בנתונים וחשבו את ציון התקן ואת הציון הגולמי והוסיפו גרף מתאים.

| | **אחוז** | **ציון תקן** | **ממוצע<br>סטיית התקן** | **ציון גולמי** | **גרף מתאים** |
|---|---|---|---|---|---|
| **א.** | 89.3% | | $\bar{x} = 20$<br>$s = 25$ | |  |
| **ב.** | 22.4% | | $\bar{x} = 900$<br>$s = 500$ | |  |
| **ג.** | 98.78% | | $\bar{x} = 122$<br>$s = 16$ | |  |
| **ד.** | 3.59% | | $\bar{x} = 9$<br>$s = 1.5$ | |  |
| **ה.** | 72.6% | | $\bar{x} = 16$<br>$s = 2$ | |  |

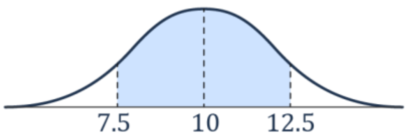
**7.** לפניכם התפלגויות נורמליות, שבכולן הממוצע הוא 10 וסטית התקן היא 2.5.
השלימו את הנתונים החסרים:



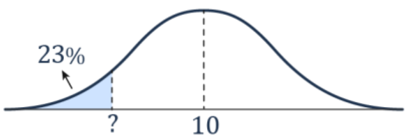

**א.** ציון z של 9.5 הוא __________
הערך בטבלת z הוא __________
השטח המסומן הוא __________



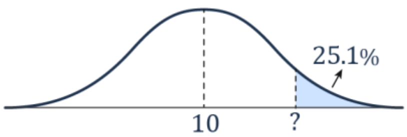

**ב.** ציון z של 12 הוא __________
הערך בטבלת z הוא __________
השטח המסומן הוא __________




**ג.** ציון z של 12.5 הוא __________
ציון z של 7.5 הוא __________
השטח המסומן הוא __________

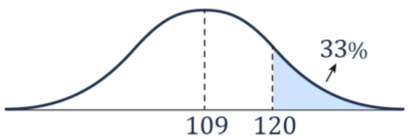



**ד.** ציון ה-z המתאים הוא __________
הערך הגולמי (האמיתי) המתאים הוא ________




**ה.** ציון ה-z המתאים הוא __________
הערך הגולמי (האמיתי) המתאים הוא ________

**8.** לפניכם התפלגויות נורמליות שונות.
היעזרו בנתונים שבשרטוט והשלימו את הנתונים החסרים:




**א.** ציון התקן של 120 הוא __________
סטית התקן של ההתפלגות __________


**ב.** ציון התקן של 38 הוא __________
ציון התקן של 27.2 הוא __________
ממוצע ההתפלגות הוא __________
סטית התקן היא __________

יחידה מסכמת

# שאלות לקראת בגרות

### שאלה 1

בדוכן בקרקס קערת סוכריות. מי שמנחש נכון את כמות הסוכריות בקערה מנצח, וזוכה בכל תכולת הקערה.
בכל יום מנהלי הדוכן ממלאים את הקערה מחדש.
ידוע כי כמות הסוכריות בקערה מתפלגת נורמלית עם ממוצע 150 וסטיית תקן 5.

א. מה הסיכוי שבקערה יש פחות מ-159 סוכריות?

ב. קבעו מה מהבאים גדול יותר, נמקו את קביעתכם.

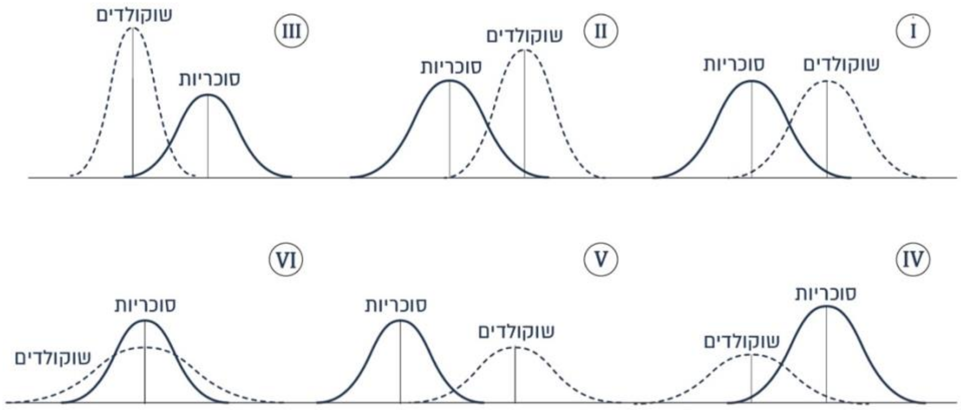
i. הסיכוי שבקערה יש בין 150 ל-153 סוכריות

ii. הסיכוי שבקערה יש בין 153 ל-156 סוכריות

לאור הצלחת תחרות קערת הסוכריות, החליטו בדוכן הצמוד לפתוח תחרות קערת שוקולדים. גם כמות השוקולדים מתפלגת נורמלית, עם סטיית תקן של 20.
נתון כי הסיכוי שיש פחות מ-142 שוקולדים בקערת שוקלדים שווה לסיכוי שיש פחות מ-147 ממתקים בקערת הסוכריות.

ג. איזה מהממוצעים גדול יותר: ממוצע כמות השוקולדים או ממוצע כמות הממתקים? הסבירו

ד. קבעו איזה מהגרפים הבאים מתאים לתיאור שתי ההתפלגויות, נמקו.



## שאלה 2

בחברת הייטק גדולה משכורות העובדים מתפלגות נורמלית, עם חציון של 15 אלף ש"ח. נתון כי 84.4% מהעובדים בחברה מרוויחים יותר מ-10.96 אלף ש"ח.

א. מהי סטיית התקן?

לקראת הדו"ח השנתי, החברה הגדירה את המשכורות כך:
משכורות שנמצאות ב-10% התחתונים של התפלגות השכר הן "משכורות נמוכות"
משכורות שנמצאות ב-10% העליונים של התפלגות השכר הן "משכורות גבוהות"
שאר המשכורות הן משכורות בינוניות.

ב. (1) אם בחברה מועסקים 30,000 עובדים, כמה מהם משתכרים שכר בינוני?
(2) לפי הגדרות החברה, מהו טווח המשכורות אשר נחשבות משכורות בינוניות?

בעקבות הצלחת החברה בשוק, כלל העובדים קיבלו בונוס חד פעמי של 3 אלף ש"ח.

ג. (1) מה יקרה לממוצע?
(2) מה יקרה לסטיית התקן?

בחברה מתחרה (חברה ב'), משכורת העובדים מתפלגת א-סימטרית עם זנב ימני. ידוע כי חציון משכורות שתי החברות זהה.
לאחד העובדים בחברה א' ששכרו שווה לשכר הממוצע בחברה, הוצע לעבור לחברה ב'. חברה ב' הציעה לו להרוויח גם כן את הממוצע בחברה.

ד. האם ההצעה משתלמת לעובד? נמקו.

## שאלה 3

כמות הבמבוק שפנדות אוכלות ביום מתפלגת נורמלית.
ידוע ש-59.9% אוכלות פחות מ-20 ק"ג במבוק ליום, ו-50% מהפנדות אוכלות מעל 18 ק"ג ביום.

א. מהי סטיית התקן של כמות הבמבוק שפנדות אוכלות ביום?

ב. מה ההסתברות שפנדה תאכל בין 17 ל-19 ק"ג במבוק ביום?

ג. כל הפנדות אשר אוכלות פחות מ-15.44 ק"ג במבוק ביום נמצאות בתת תזונה. מה אחוז הפנדות שנמצאות בתת תזונה?

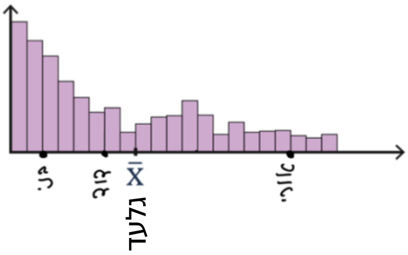
ידוע כי הבמבוק מורכב ברובו מסיבים, ולכן רק 20% ממנו נספג במערכת העיכול של דוב הפנדה.

ד. (1) מה הוא הממוצע של כמות הבמבוק שנספגת במערכת העיכול של הפנדה?
(2) מהי היא סטיית התקן של כמות הבמבוק שנספגת במערכת העיכול של הפנדה?
(3) מבין הפנדות שנמצאות בתת תזונה, מהי כמות הבמבוק המקסימלית שנספגת במערכת העיכול שלהן?

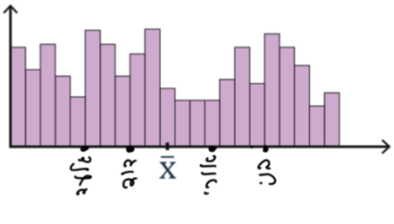
## תשובות ליחידה ראשונה

.1

א.




ב.




.2 א. סיגל ורועי החליפו מקום. ככל שציון התקן קטן יותר הוא ממוקם שמאלה יותר.

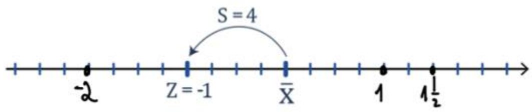
ב. ציון התקן של נעמי שלילי, הוא צריך להיות נמוך מהממוצע.

ג. ציון התקן של שגיא לא יכול להיות במרחק דומה לנועה מהממוצע, הוא צריך להיות רחוק יותר ימינה.

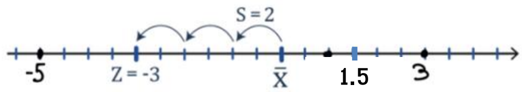
.3 **רומי**: 0.6 **תמי**: 0.8-

.4

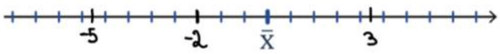
**א.**



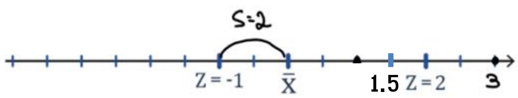

**ב.**




**ג.**




**ד.**




.5 מתמטיקה: **רונה** z=2.6, **אליה** z=0, **גאיה** z=3, **נעמה** z=-2

אנגלית: **רונה** z=3, **אליה** z=-1, **גאיה** z=4, **נעמה** z=-8.5

**רונה**-אנגלית, **אליה**-מתמטיקה, **גאיה**-אנגלית, **נעמה**-מתמטיקה

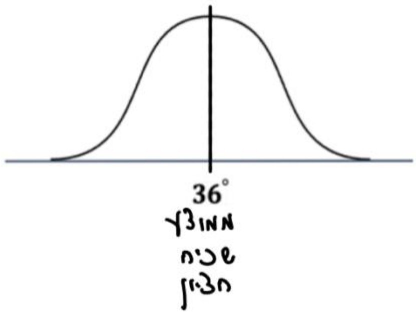
.6 **לשון** z=5, **ספרות** z=-2, **יהדות** z=4, **פיסיקה** z=2.5, **חינוך גופני** z=-7.5

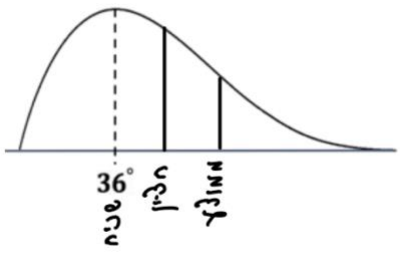
**הצליחה ביותר** לשון, **נכשלה ביותר** חינוך גופני

.7 **א.** 0.75, **ב.** 18, **ג.** 12, **ד.** 2.25, **ה.** -1.3, **ו.** 4, **ז.** 18, **ח.** 4.5

## תשובות יחידה שניה

1. **א.** לא. בהתפלגות עם זנב ימני, החציון מימין לשכיח.
   **ב.** לא. בהתפלגות עם זנב ימני הממוצע מימין לשכיח.
   **ג.** כן, בהתפלגות עם זנב ימני הממוצע הוא המדד הימני ביותר.
   **ד.**



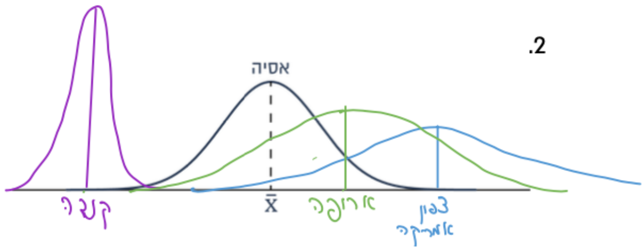




2. **א.** נכון.
   **ב.** לא נכון.
   **ג.** נכון.
   **ד.** לא נכון.
   **ה.** לא נכון.
   **ו.** אי אפשר לדעת.
   **ז.** לא נכון.

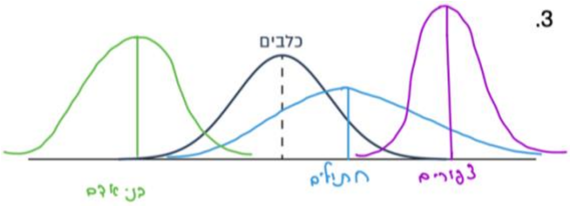
## תשובות יחידה שלישית

1. **א.** i, **ב.** iii, **ג.** i, **ד.** ii

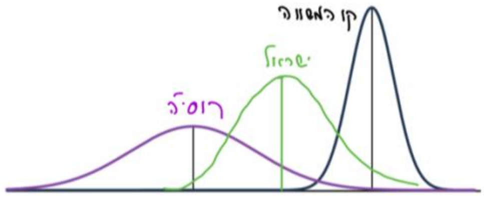
2.




3.




4.




5. **א .** גרף 2, גרף 3, גרף 6

**ב.** בהתפלגות נורמלית הממוצע השכיח והחציון ממוקמים במרכז ההתפלגות.

גרף 1 מסומן חציון ושכיח ב 21, ולכן הממוצע איננו 22.

גרף 4 הציון 22 מימין לחציון וממילא גם לממוצע.

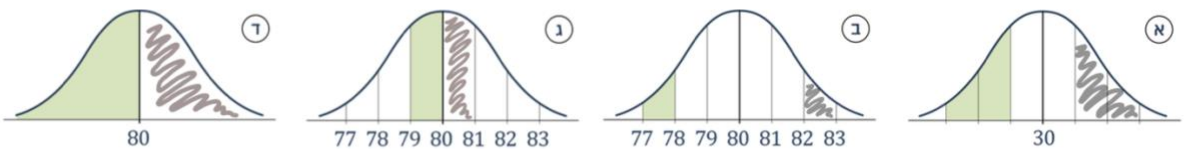
גרף 5 הציון 22 מסמן 20% ולא 50% כנדרש.

6. **א.** שטח 1 גדול יותר, יש לו רוחב זהה אך הוא ממוקם קרוב יותר למרכז ההתפלגות.

**ב.** זהה. יש להם אותו רוחב ובמרחקים סימטרים מהממוצע.

**ג.** שטח 1 גדול יותר, הוא כולל שטח סימטרי, אך גם שטח נוסף.

7.




8. **א.** 79 **ב.** 70 **ג.** 80, 72 **ד.** 80, 57

9. **א.** B>A, A>E, C>B, D>A **ב.** C **ג.** E **ד.** E<A<D<B<C

**10.** ככל שסטיית התקן גדולה יותר, הפיזור גדול: הגרף רחב ונמוך יותר.

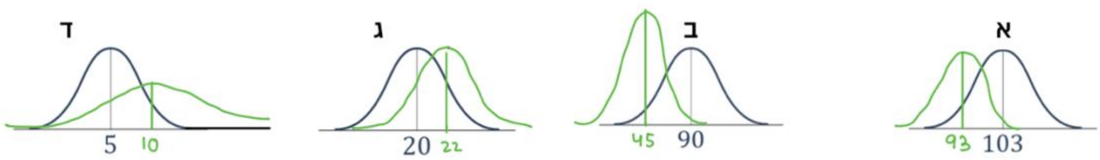
**א.** גרף 4. הוספת קבוע מגדילה את הממוצע אך לא משנה את סטית התקן.

**ב.** גרף 3. הקטנה באחוז מקטינה את הממוצע ואת סטית התקן.

**ג.** גרף 2. הכפלה פי 2 מגדילה את הממוצע את סטית התקן.

**ד.** גרף 1. הוספת אחוזים מגדילה את הממוצע ואת סטיית התקן.

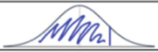
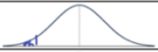
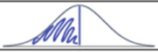
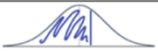
11.

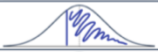
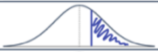
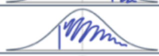
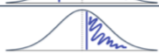



12. **א.** חלוקה, **ב.** הכפלה, **ג.** הוספה, **ד.** הוספה

## תשובות ליחידה רביעית

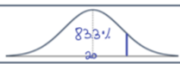
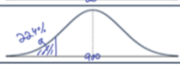
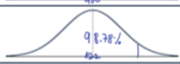
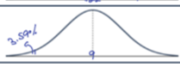
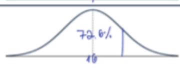
1. **א.** 0.23 **ב.** 0.0107 **ג.** 31.9% **ד.** 0.86 **ה.** 0.035 **ו.** 73.6%

| .2 | ציון תקן | ערך התא בטבלה | אחוז | השטח המתאים בגרף |
|---|---|---|---|---|
| א. | z=1.22 | 0.8890 | 88.9 |  |
| ב. | z=-2.1 | 0.0179 | 1.79 |  |
| ג. | z=0 | 0.5 | 50 |  |
| ד. | z=1.55 | 0.9390 | 93.9 |  |
| ה. | z=0.96 | 0.8320 | 83.2 |  |
| ו. | z=0.5 | 0.6920 | 69.2 |  |

| .3 | ציון תקן | ערך התא בטבלה | האחוז | האחוז המשלים | השטח המתאים בגרף |
|---|---|---|---|---|---|
| א. | z=1.6 | 0.9450 | 94.5 | 5.5 |  |
| ב. | z=-0.7 | 0.2420 | 24.2 | 75.8 |  |
| ג. | z=0.92 | 0.8210 | 82.1 | 17.9 |  |
| ד. | z=1.34 | 0.9100 | 91 | 9 |  |
| ה. | z=-1.55 | 0.0610 | 6.1 | 93.9 |  |
| ו. | z=0.39 | 0.6520 | 65.2 | 34.8 |  |

| .4 | אחוז משלים | אחוז בטבלה | ערך ה-z |
|---|---|---|---|
| א | 67 | 0.6700 | 0.44 |
| ב | 88.9 | 0.8890 | 1.22 |
| ג | 50 | 0.5000 | 0 |
| ד | 39 | 0.3900 | -0.28 |

| .5 | שטח $z_1$ | שטח $z_2$ | שטח מסומן |
|---|---|---|---|
| א | 0.5000 | 0.8870 | 0.3870 |
| ב | 0.0900 | 0.5000 | 0.4100 |
| ג | 0.6990 | 0.9918 | 0.2928 |
| ד | 0.1060 | 0.8480 | 0.7420 |

| .6 | אחוז | ציון תקן | ממוצע<br>סטיית התקן | ציון גולמי | גרף מתאים |
|---|---|---|---|---|---|
| א. | 89.3% | 1.24 | $\bar{x} = 20$<br>$s = 25$ | 51 |  |
| ב. | 22.4% | -0.76 | $\bar{x} = 900$<br>$s = 500$ | 520 |  |
| ג. | 98.78% | 2.25 | $\bar{x} = 122$<br>$s = 16$ | 158 |  |
| ד. | 3.59% | -1.8 | $\bar{x} = 9$<br>$s = 1.5$ | 6.3 |  |
| ה. | 72.6% | 0.6 | $\bar{x} = 16$<br>$s = 2$ | 17.2 |  |

. 7

א z=-0.2 ערך בטבלה 0.421 שטח 42.1

ב z=0.8 ערך בטבלה 0.7880 שטח 21.2

ג z=1 z=-1 שטח 68.2

ד z=-0.74 ציון 8.15

ה z=0.67 ציון 11.675

.8

א z=0.44 s=25

ב z=1.08, z=-1.08 ממוצע הוא 32.6 s=5

## תשובות לשאלות מסכמות

### שאלה 1

א. א. 96.41%

ב. ב. הסיכוי שבקערה יש בין 150 ל-153 ממתקים גדול יותר מהסיכוי שיש בקערה בין 153-156, כי אלו ערכים יותר קרובים לממוצע.

ג. ציון התקן של 147 סוכריות הוא Z= -0.6 והממוצע 150.

ציון התקן של 142 שוקולדים זהה, Z=-0.6, כלומר הממוצע הוא 154.

ממוצע כמות השוקולדים גדול יותר.

ד. גרף V

### שאלה 2

א. 4

ב. 1. 24,000

2. טווח המשכורות הבינוניות: בין 9.88 אלף ל-20.12 אלף.

ג. 1. יגדל ב-3 אלף ש"ח.

2. לא תשתנה

ד. כן, כי הממוצע בהתפלגות א-סימטרית עם זנב ימני גדול מהחציון.

### שאלה 3

א. 8

ב. בערך 10%

ג. 37.5%

ד. 1. 3.6

2. 1.6

3. 3.088