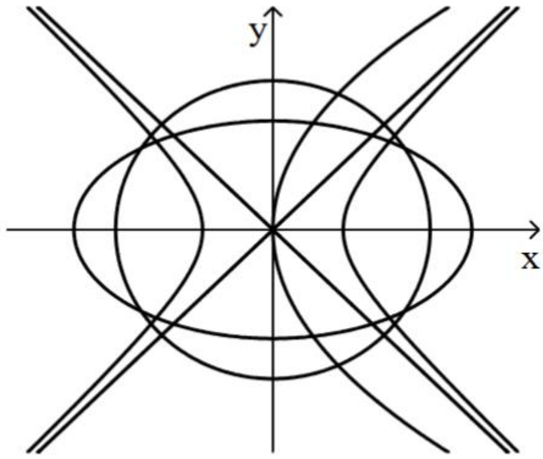
ההיפרבולה

מבוסס על הספר גאומטריה אנליטית, האוניברסיטה העברית, משרד החינוך.
נערך על ידי צוות ההדרכה בהתאמה לתכנית הלימודים החדשה.



ההיפרבולה

ההיפרבולה כמקום גאומטרי

ראינו כי האליפסה היא המקום הגאומטרי של הנקודות אשר סכום מרחקיהן משתי נקודות נתונות F_1 ו- F_2 הוא קבוע, ובפרט האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ היא המקום הגאומטרי של הנקודות אשר סכום מרחקיהן מהנקודות $F_1(-c,0)$ ו- $F_2(c,0)$ הוא $2a$, כאשר $b^2 = a^2 - c^2$.

עתה נגדיר היפרבולה:

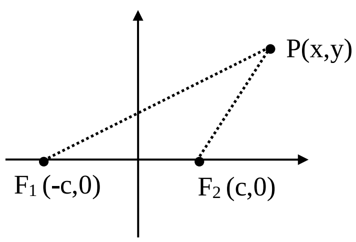
ההיפרבולה היא המקום הגאומטרי של הנקודות ורק אותן נקודות שהערך המוחלט של הפרש מרחקיהן משתי נקודות נתונות F_1 ו-F_2 הוא קבוע.
הנקודות F_1 ו-F_2 נקראות **מוקדי ההיפרבולה**.

<u>טענה</u>

המקום הגאומטרי של הנקודות שהערך המוחלט של הפרש מרחקיהן משתי נקודות נתונות $F_1(-c,0)$ ו- $F_2(c,0)$ הוא קבוע $2a$, מתואר על ידי המשוואה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, כאשר $b^2= c^2 - a^2$.

.

<u>הוכחה</u>



נתון כי $2a$ הוא הערך המוחלט של הפרש המרחקים הקבוע.

נבחר נקודה P שנמצאת מימין לציר ה- y.

ניקח $P(x,y)$ נקודה המקיימת את התנאי $PF_1 - PF_2 = 2a$

לפי אי שוויון המשולש

$$PF_1 < PF_2 + F_1F_2$$

ומכאן, הפרש שתי הצלעות במשולש קטן מהצלע השלישית:

$$PF_1 - PF_2 < F_1F_2$$

לכן יש טעם לדון רק כאשר $a < c$.

$$PF_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad , \qquad PF_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

כלומר, עבור P מקיימים:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} + 2a$$

שני אגפים של השוויון הם חיוביים, אחרי העלאה שלהם בריבוע ופישוט מתקבל השוויון הבא:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \frac{c}{a}x - a$$

נעלה שוב בריבוע $x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2$

נכנס איברים דומים $\frac{c^2 - a^2}{a^2}x^2 - y^2 = c^2 - a^2$

נחלק ב- $c^2 - a^2$ ונקבל $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$

כפי שציינו לעיל, $c > a$ ולכן $c^2 - a^2$ הוא מספר חיובי שנסמנו b^2. נציב זאת במשוואה האחרונה ונקבל את המשוואה הקנונית של ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

אם נבחר נקודה P שנמצאת משמאל לציר ה- y, אז על פי הנתונים $P(x,y)$ נקודה המקיימת את התנאי $PF_2 - PF_1 = 2a$. וכל שלבי ההוכחה זהים לאלה שנעשו במקרה הקודם.

הוכחנו: שיעורי כל נקודה שהפרש מרחקיה מהנקודות F_1 ו-F_2 שווה ל-2a, מקיימים את המשוואה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

לסיכום:

ההיפרבולה היא המקום הגאומטרי של הנקודות שהערך המוחלט של הפרש מרחקיהן מהנקודות $F_1(-c,0)$ ו-$F_2(c,0)$ הוא קבוע ושווה ל- 2a.

ניתן לתאר את ההיפרבולה על ידי המשוואה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, כאשר $b^2 = c^2 - a^2$.

<u>הגדרה</u>: היפרבולה נקראת **שוות שוקיים** אם $b^2 = a^2$, זאת אומרת שמשוואתה היא $x^2 - y^2 = a^2$

דוגמאות

<u>תרגיל 1</u>

מצאו על ההיפרבולה $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{12} = 1$ את הנקודות מימין לציר ה- y, שמרחקן מן המוקד השמאלי הוא $\sqrt{150}$.

<u>פתרון</u>

נסמן את הנקודה המבוקשת ב- (x_1, y_1). המוקד השמאלי נמצא בנקודה $(-c,0)$, כאשר $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{24+12} = 6$.

המרחק בין (x_1, y_1) לבין $(-6,0)$ הוא $\sqrt{150}$ ולכן $(x_1+6)^2 + y_1^2 = 150$. כמו כן, הנקודה (x_1, y_1) נמצאת על ההיפרבולה ולכן מקיימת את משוואת ההיפרבולה. עתה נותר לפתור את

מערכת המשוואות: $\begin{cases}(x_1+6)^2 + y_1^2 = 150\\ x_1^2 - 2y_1^2 = 24\end{cases}$.

למערכת יש 4 פתרונות (פתרו אותה), שניים מהם מתאימים לתנאי השאלה $(6, \pm\sqrt{6})$ ונמצאים מימין לציר ה- y.

<u>תרגיל 2</u>

מצאו על ההיפרבולה $3x^2 - 2y^2 = 60$ את הנקודה ברביע הראשון כך שהזווית בין הקטעים המחברים את הנקודה עם המוקדים היא ישרה.

<u>פתרון</u>

נמצא קודם את המיקום של המוקדים: $a^2 = 20$, $b^2 = 30$ לכן $c^2 = 50$. שני המוקדים הם $(\pm\sqrt{50}, 0)$.

נסמן נקודה כללית על ההיפרבולה (x_1, y_1). על פי הנתון, הזווית בין הקטעים המחברים את הנקודה עם המוקדים היא ישרה, לכן מכפלת שיפועיהם שווה ל- -1:

$$\frac{y_1}{x_1 - \sqrt{50}} \cdot \frac{y_1}{x_1 + \sqrt{50}} = -1$$

מכאן נקבל $x_1^2 + y_1^2 = 50$.

הנקודה (x_1, y_1) על ההיפרבולה, לכן נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases}x_1^2 + y_1^2 = 50\\ 3x_1^2 - 2y_1^2 = 60\end{cases}$$

ונקבל שהנקודה המבוקשת ברביע הראשון היא $(\sqrt{32}, \sqrt{18})$.

תכונות ההיפרבולה

סימטרייה

בדומה לאליפסה, הצבת $(-x)$ במקום x ו-$(-y)$ במקום y, לא משנה את המשוואה הקנונית. לכן אם הנקודה (x,y) נמצאת על ההיפרבולה, גם הנקודות $(-x,y)$, $(-x,-y)$ ו- $(x,-y)$ נמצאות על ההיפרבולה. כלומר, ההיפרבולה סימטרית ביחס לציר ה-y, ביחס לציר ה-x, וביחס לראשית הצירים.

נוכל אם כן לבדוק את התנהגות ההיפרבולה עבור $x > 0$ ו- $y > 0$ (ברביע הראשון של מערכת הצירים), ולהסיק את תכונותיה בכל התחום על סמך הסימטרייה.

לפני שנמשיך בחקירה הכללית של תכונות ההיפרבולה, נתבונן בדוגמה ונחקור אותה.

נתונה ההיפרבולה $1=\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}$.

נבודד את y: $\frac{x^2}{9}-1=\frac{y^2}{16}$

נכפול את שני האגפים ב-16: $y^2=\frac{16}{9}x^2-16=\frac{16}{9}\left(x^2-9\right)$

לכן $y=\pm\frac{4}{3}\sqrt{x^2-9}$

כלומר, גרף ההיפרבולה מורכב מהגרפים של שתי פונקציות:

$$f(x)=\frac{4}{3}\sqrt{x^2-9} \qquad , \qquad g(x)=-\frac{4}{3}\sqrt{x^2-9}$$

תחום הגדרת הפונקציות: $x^2-9\geq 0 \Leftarrow x^2\geq 9$, ולכן תחום ההגדרה הוא $x\geq 3$ או $x\leq -3$.

f(x) ו-g(x) הן פונקציות זוגיות, לכן הגרפים שלהן סימטריים ביחס לציר ה-y.

ערכי הפונקציות f(x) ו-g(x) נגדיים: $g(x)=-f(x)$ לכל x בתחום ההגדרה שלהן.

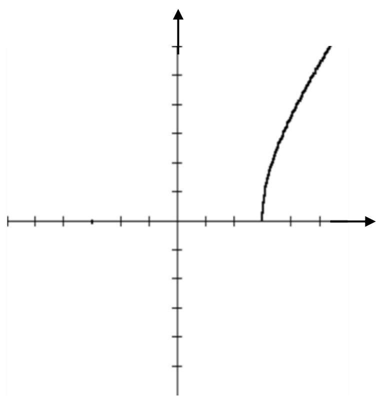
לכן הגרף של g(x) הוא שיקוף של הגרף של f(x) ביחס לציר ה-x.

את הגרף של ההיפרבולה נסרטט בשלבים: תחילה נסרטט את גרף הפונקציה f(x) עבור $x\geq 3$.

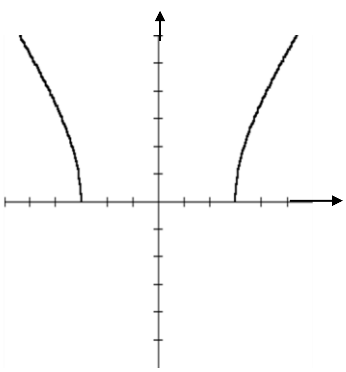
נשלים את הגרף עבור $x\leq -3$ על סמך זוגיות הפונקציה f(x). את הגרף של g(x) נקבל על-ידי שיקוף הגרף של f(x) ביחס לציר ה- x.

נסרטט את גרף הפונקציה f(x) עבור $x\geq 3$ בעזרת טבלת ערכים:

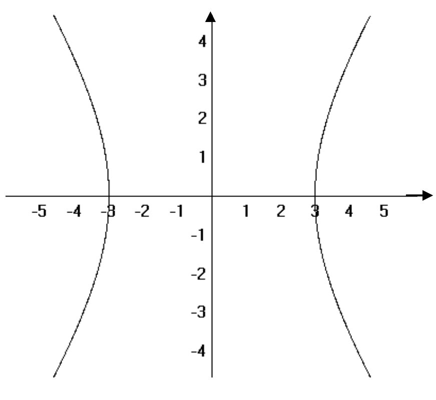
ברביע הראשון:



נשלים את הגרף של f(x), באמצעות שיקוף ביחס לציר y:



3. באמצעות שיקוף ביחס לציר ה-x נקבל את הגרף של g(x), ואת הגרף של כל ההיפרבולה:



שימו לב: בשתי נקודות הקצה של התחום, הגרפים של f(x) ושל g(x) מתלכדים.

$$f(3) = g(3) = 0$$

$$f(-3) = g(-3) = 0$$

נחזור למשוואה הכללית של ההיפרבולה ולתכונותיה.

נבודד את y ונבטא אותו כפונקציה של x.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right)$$

לכן המשוואה המפורשת של ההיפרבולה היא

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

רואים כי, כמו בדוגמה, גרף ההיפרבולה מורכב מהגרפים של שתי פונקציות:

$$g(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad , \qquad f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

תחום הגדרת הפונקציות: $x^2 - a^2 \geq 0 \;\Leftarrow\; x^2 \geq a^2$, ולכן תחום ההגדרה הוא $x \geq a$ או $x \leq -a$.

שתי הפונקציות f(x) ו-g(x) זוגיות, לכן הגרפים שלהם סימטריים ביחס לציר y.

ערכיהן נגדיים: $g(x) = -f(x)$ לכל x בתחום ההגדרה, לכן הגרף של g(x) הוא שיקוף של הגרף של f(x) ביחס לציר ה-x.

אסימפטוטות

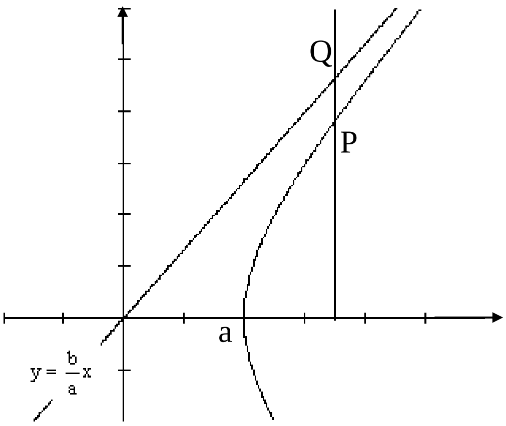
נתבונן במשוואה המפורשת של ההיפרבולה ברביע הראשון: $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \geq a$.

עיון במשוואה זו מראה כי ככל ש- x גדל, גם y גדל ולכן לפנינו פונקציה עולה.

a מספר חיובי, לכן $\sqrt{x^2 - a^2} < \sqrt{x^2}$

כלומר, גרף ההיפרבולה ברביע הראשון נמצא מתחת לישר $y = \frac{b}{a}x$.

נתבונן במרחק האנכי שבין הישר $y = \frac{b}{a}x$ וההיפרבולה. לשם כך נבחר נקודה P על



ההיפרבולה ונקודה Q על הישר, בעלות אותו

שיעור x: $P\left(x,\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)$, $Q\left(x,\frac{b}{a}x\right)$.

נחשב את המרחק d שביניהן:

$$d=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

נכפול ונחלק את אגף ימין בביטוי $x+\sqrt{x^2-a^2}$ (למעשה זהו כפל ב-1) ונפשט:

$$d=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\cdot\frac{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}=\frac{b\left(x^2-\left(x^2-a^2\right)\right)}{a\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}=\frac{ba^2}{a\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

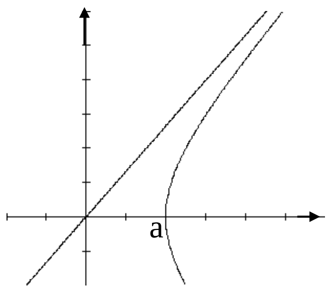
קיבלנו
$$d=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

כאשר ערכי x הולכים וגדלים ללא הגבלה, המכנה שואף לאינסוף, לכן המרחק d שואף ל-0.

כלומר,

$$d=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$$

המשמעות הגרפית: כאשר x הולך וגדל, ההיפרבולה מתקרבת לישר $y=\frac{b}{a}x$ וכאשר x שואף לאינסוף המרחק ביניהם שואף לאפס.

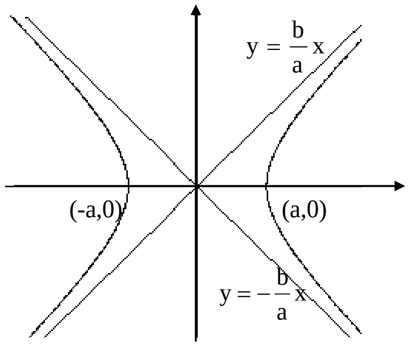


<u>נסכם</u>:

ברביע הראשון ההיפרבולה היא גרף של פונקציה עולה המוגדרת עבור $x\ge a$.

ההיפרבולה חותכת את ציר ה-x בנקודה (a,0) ונמצאת מתחת לישר $y=\frac{b}{a}x$.

ככל ש-x גדל המרחק בין ההיפרבולה והישר $y=\frac{b}{a}x$ קטן ושואף לאפס. נשלים באופן סימטרי את גרף ההיפרבולה בכל ארבעת הרביעים. נסרטט את הישרים $y=\frac{b}{a}x$ ו- $y=-\frac{b}{a}x$. ברביעים הראשון והרביעי גרף ההיפרבולה מתחיל בנקודה (a,0), וברביעים השני והשלישי בנקודה (-a,0). מנקודות אלה הגרף שואף לישרים $y=\frac{b}{a}x$ ו- $y=-\frac{b}{a}x$ אבל נשאר ביניהם.



הישרים $y = \frac{b}{a}x$ ו-$y = -\frac{b}{a}x$ נקראים **אסימפטוטות** של ההיפרבולה.

כלומר, אסימפטוטה היא ישר שהגרף מתקרב אליו, כך שהמרחק בין הישר והגרף שואף ל- 0 כאשר $|x| \to \infty$

<u>תרגיל 1</u>

מהי המשוואה של ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ העוברת בנקודות $(2,1)$ ו- $(-4,8)$? מהן האסימפטוטות שלה?

<u>פתרון</u>

נציב את שיעורי הנקודות במשוואת ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ונקבל מערכת משוואות ב-a ו-b :

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{16}{a^2} - \frac{64}{b^2} = 1 \end{cases}$$

נתייחס אל מערכת משוואות זו כאל מערכת משוואות מהמעלה הראשונה בנעלמים $\frac{1}{a^2}$ ו- $\frac{1}{b^2}$.

נפתור אותה בשיטת השוואת המקדמים. לשם כך נכפול את המשוואה הראשונה ב- 4-:

$$\begin{cases} -\frac{16}{a^2} + \frac{4}{b^2} = -4 \\ \frac{16}{a^2} - \frac{64}{b^2} = 1 \end{cases}$$

נחבר את שתי המשוואות:

$$\frac{4}{b^2} - \frac{64}{b^2} = -3$$

ונפתור עבור b^2 :

$$-\frac{60}{b^2} = -3$$

$$b^2 = 20$$

על-ידי הצבת ערך זה במשוואה הראשונה מקבלים את המשוואה

$$\frac{4}{a^2} - \frac{1}{20} = 1$$

שפתרונה הוא

$$a^2 = \frac{80}{21}$$

משוואת ההיפרבולה היא לכן $\frac{x^2}{\frac{80}{21}} - \frac{y^2}{20} = 1$ או $21x^2 - 4y^2 = 80$.

נמצא את האסימפטוטות: $\frac{b^2}{a^2} = \frac{20}{\frac{80}{21}} = \frac{21}{4}$

לכן $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{21}}{2}$

ומשוואות האסימפטוטות הן: $y = \frac{\sqrt{21}}{2}x$ ו- $y = -\frac{\sqrt{21}}{2}x$.

<u>תרגיל 2</u>

אחת האסימפטוטות של ההיפרבולה עוברת בנקודה (-6,3), וההיפרבולה עוברת דרך הנקודה (8,-2). מצאו את משוואת ההיפרבולה.

<u>פתרון</u>

האסימפטוטה עוברת גם דרך ראשית הצירים ולכן שיפוע האסימפטוטה הוא 0.5 –.

לכן $\frac{b}{a} = 0.5$. הנקודה (8,-2) מקיימת משוואת ההיפרבולה , לכן $\frac{64}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$. כדי לחשב את a ו- b יש לפתור את מערכת המשוואות המתקבלת ופתרונה היא $a^2 = 48$ ו- $b^2 = 12$. כלומר, משוואת ההיפרבולה היא $\frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{12} = 1$.

<u>תרגיל 3</u>

מצאו על ההיפרבולה $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ את הנקודה ברביע הראשון שמרחקה מהאסימפטוטה בעלת השיפוע החיובי הוא 1.2.

<u>פתרון</u>

ניקח נקודה כללית על ההיפרבולה (x_1, y_1). מתקיימת המשוואה: $\frac{x_1^2}{16} - \frac{y_1^2}{9} = 1$.

מהנתונים מקבלים כי משוואת האסימפטוטה בעלת השיפוע החיובי היא $y = \frac{3}{4}x$ או בצורה הכללית $3x - 4y = 0$. את המרחק של (x_1, y_1) מהאסימפטוטה נמצא על ידי נוסחת המרחק בין נקודה לישר: $\frac{|3x_1 - 4y_1|}{\sqrt{25}} = 1.2$, לכן $|3x_1 - 4y_1| = 6$. נשים לב שהנקודה (x_1, y_1) נמצאת על ההיפרבולה ברביע הראשון וכפי שראינו היא חייבת להיות מתחת לאסימפטוטה. עבור כל

נקודה מתחת לאסימפטוטה $3x - 4y = 0$, סימן הביטוי $3x - 4y$ יהיה חיובי, כלומר גם הביטוי $3x_1 - 4y_1$ מקבל ערכים חיוביים. לכן $3x_1 - 4y_1 = 6$.

נשאר רק לפתור את מערכת המשוואות: $\begin{cases} 3x_1 - 4y_1 = 6 \\ 9{x_1}^2 - 16{y_1}^2 = 144 \end{cases}$ והנקודה המבוקשת תהיה (5,9/4).

צירי ההיפרבולה

נסמן את נקודות חיתוך ההיפרבולה עם ציר ה-x: $A(-a,0)$, $B(a,0)$. הקטע AB נקרא **הציר הממשי** של ההיפרבולה, ואורכו 2a. הנקודות $A(-a,0)$, $B(a,0)$ נקראות **קודקודי ההיפרבולה**.

נסמן על ציר ה-y את הנקודות: $C(0,-b)$, $D(0,b)$. הקטע CD נקרא **הציר המדומה** של ההיפרבולה, ואורכו 2b.

<u>תרגיל 4</u>

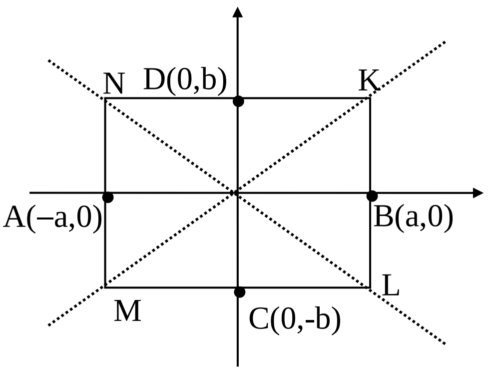
הציר המדומה של ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ הוא 6 ומרחק המוקד הימני מהקודקוד השמאלי הוא 9. מצאו את משוואת ההיפרבולה.

<u>פתרון</u>

הציר המדומה שווה ל- 2b ולכן $b = 3$. המרחק של המוקד הימני מהקודקוד השמאלי שווה ל- $a + c$ ושווה ל- 9. למדנו כי $c^2 = b^2 + a^2 = 9 + a^2$.

נסיים את התרגיל על ידי פתרון מערכת המשוואות $\begin{cases} c + a = 9 \\ c^2 = 9 + a^2 \end{cases}$. משוואת ההיפרבולה היא $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

סרטוט גרף ההיפרבולה.

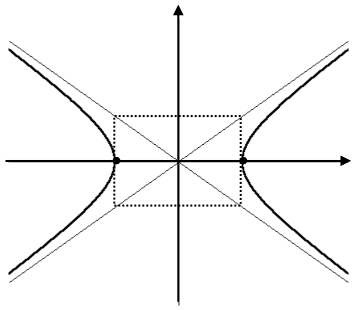


במערכת צירים נסמן את הנקודות $A(-a,0)$, $B(a,0)$, $C(0,-b)$, $D(0,b)$. דרך נקודות אלה נעביר מקבילים לצירים (כמתואר בסרטוט), ונקבל מלבן KLMN שקודקודיו הם: $K(a,b)$, $L(a,-b)$, $M(-a,-b)$, $N(-a,b)$.

הישר KM עובר בנקודה $K(a,b)$ ובראשית הצירים, לכן שיפועו $\frac{b}{a}$ ומשוואתו $y = \frac{b}{a}x$. הישר LN עובר בנקודה

$L(a, -b)$ ובראשית הצירים, לכן שיפועו $-\frac{b}{a}$

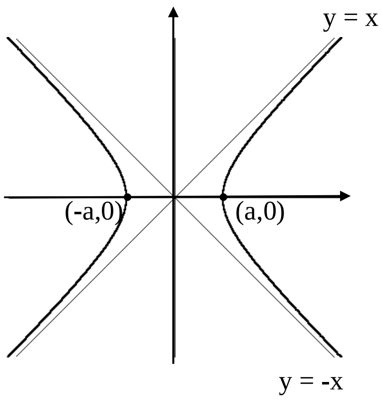
ומשוואתו $y = -\frac{b}{a}x$.



הראינו כי הישרים KM ו- LN הם אסימפטוטות של ההיפרבולה. עתה נסרטט את ההיפרבולה דרך הנקודות A ו-B ובין הישרים KM ו-LN.

<u>מקרה פרטי</u>

אם $a = b$ משוואת ההיפרבולה היא $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ או $x^2 - y^2 = a^2$. האסימפטוטות הן הישרים $y = x$ ו- $y = -x$. האסימפטוטות ניצבות זו לזו.



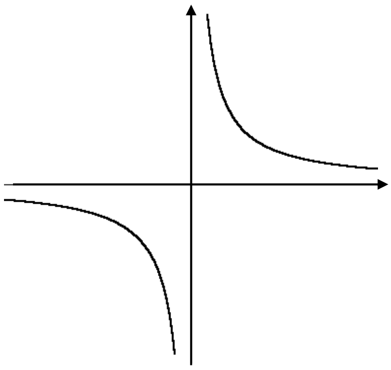
$x^2 - y^2 = a^2$

הערה (מחוץ לתוכנית הלימודים):

אם מסובבים את הגרף עם האסימפטוטות שלו בזווית של $45°$ נגד כיוון השעון, האסימפטוטות מתלכדות עם הצירים, והגרף המתקבל הוא קבוצת האמת של המשוואה שצורתה $xy = c$ $(c > 0)$.

במילים אחרות, המשוואה $y = \frac{c}{x}$ מתארת היפרבולה.

(לא נוכיח כאן את טענה זו).



$y = \frac{c}{x}$

תרגילים

ההיפרבולה כמקום גאומטרי ותכונותיה

1. מצאו את ערכי הפרמטרים a^2 ו- b^2 של ההיפרבולות הבאות:

א. $9x^2 - 4y^2 = 36$ ג. $x^2 - 4y^2 = 1$ ה. $36x^2 - y^2 = 16$

ב. $9x^2 - 16y^2 = 144$ ד. $25x^2 = 9 + 4y^2$ ו. $x^2 - 9y^2 = 4$

תשובה: א. 4 , 9 ; ב. 16 , 9 ; ג. 1, 1/4 ; ד. 9/25 , 9/4 ; ה. 4/9 , 16 ; ו. 4 , 4/9

2. מצאו את מוקדי ההיפרבולות הנתונות:

א. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ג*. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{40} = -1$

ב. $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{120} = 1$ ד*. $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$

תשובה: א. $(\pm5,0)$; ב. $(\pm13,0)$; ג. $(0,\pm7)$; ד. $(0,\pm10)$

3. תנו דוגמה להיפרבולה שמוקדיה הם הנקודות

א. $F_1(25,0)$ ו- $F_2(-25,0)$

ב. $F_1(36,0)$ ו- $F_2(-36,0)$

4. תנו דוגמה להיפרבולה שמוקדיה הם הנקודות

א. $F_1(0,-10)$ ו- $F_2(0,10)$ ב. $F_1(0,25)$ ו- $F_2(0,-25)$

5. נתונה היפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. מצאו את a ו- b אם ההיפרבולה עוברת דרך הנקודות:

א. $(5,1)$ ו-$(3,0)$ ב. $(-2,1)$ ו-$\left(\sqrt{13},2\right)$

תשובה: א. $a = \pm 3$, $b = \pm 0.75$; ב. $a = \pm 1$, $b = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

6. מצאו את אורך הציר הממשי ואת אורך הציר המדומה של ההיפרבולה:

א. $x^2 - 4y^2 = 4$ ג. $4x^2 - y^2 = 1$

ב. $x^2 - 4y^2 = 16$ ד. $2x^2 - 3y^2 = 12$

תשובה: $2a = 4$, $2b = 2$; ב. $2a = 8$, $2b = 4$; ג. $2a = 1$, $2b = 2$; ד. $2a = 2\sqrt{6}$, $2b = 4$

7. מצאו את משוואת ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ עבור כל אחד מהתנאים הבאים:

א. ההיפרבולה עוברת דרך הנקודות $(\sqrt{8},3)$ ו- $(4,3\sqrt{3})$.

ב. ההיפרבולה עוברת דרך הנקודות $(3\sqrt{2},\sqrt{5})$ ו- $(-3\sqrt{3},\sqrt{10})$

ג. הציר הממשי של ההיפרבולה שווה ל-8 , והציר המדומה שלה שווה ל- 4.

ד. הציר הממשי קטן פי 2 מן הציר המדומה, וההיפרבולה עוברת דרך הנקודה $\left(2\sqrt{2},4\right)$.

ה. שני צירי ההיפרבולה שווים ל -6.

ו. שני צירי ההיפרבולה שווים, והיא עוברת דרך הנקודה $\left(4,\sqrt{15}\right)$.

תשובה:

א. $9x^2-4y^2=36$; ב. $5x^2-9y^2=45$; ג. $x^2-4y^2=16$; ד. $4x^2-y^2=16$;
ה. $x^2-y^2=9$; ו. $x^2-y^2=1$

8. מצאו את משוואת ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, אם נתון כי צירה הממשי גדול פי 3 מצירה המדומה, והנקודה $\left(6\sqrt{2},2\right)$ נמצאת עליה.

תשובה: $x^2-9y^2=36$

9. מצאו את משוואת ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ העוברת דרך הנקודה (8,3), אם נתון כי הציר הממשי שלה הוא 8.

תשובה: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{3}=1$

10. מצאו את ההיפרבולה שמוקדה הימני הוא (5,0) והציר הממשי שלה $6\sqrt{2}$.

תשובה: $7x^2-18y^2=126$

11. תנו דוגמה למשוואה של היפרבולה שבה הציר הממשי

א. גדול פי 4 מהציר המדומה. ב. קטן פי 9 מהציר המדומה.

12. ריבוע שצלעותיו מקבילות לצירים, אלכסוניו נחתכים בראשית, ושטחו שווה ל-12,

משיק להיפרבולה בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה-x.

תנו דוגמה למשוואות של שתי היפרבולות מתאימות.

13. מצאו את משוואת ההיפרבולה שהמוקדים שלה נמצאים על ציר x במרחק 7 מהראשית והיא עוברת בנקודה $\left(-4\sqrt{3},5\right)$.

תשובה: $25x^2-24y^2=600$

14. מצאו היפרבולה שוות שוקיים אם נתון כי מוקדיה מתלכדים עם המוקדים של האליפסה

$\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$.

תשובה: $x^2-y^2=2$

15. א. מצאו את נקודות החיתוך של הישר $y = x + 6$ וההיפרבולה $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$.

ב. בנו משולש שקודקודיו הם הנקודות שקיבלתם בסעיף א וראשית הצירים, וחשבו את שטחו.

תשובה: א. (-6,0) , (-10,-4) ; ב. 12

16. בדקו את מצבם ההדדי של הצורות המתוארות על ידי המשוואות הבאות. מצאו את נקודות החיתוך, אם יש כאלה. צרפו לכל מקרה סרטוט.

א. $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2-y^2=4 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \\ \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} x^2+4y^2=1 \\ x^2-10y^2=1 \end{cases}$

תשובה: א. $(-2,0)$, $(2,0)$; ב. $(-2,\sqrt{3})$, $(-2,\ -\sqrt{3})$, $(2,\sqrt{3})$, $(2,-\sqrt{3})$;

ג. $(-5,0)$, $(5,0)$; ד. $(-1,0)$, $(1,0)$

17. נתונה ההיפרבולה $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$. כתבו דוגמה למשוואה של מעגל, אשר לו ולהיפרבולה:

א. 4 נקודות משותפות.

ב. 3 נקודות משותפות.

ג. 2 נקודות משותפות.

ד. נקודה משותפת אחת.

ה. אין אף נקודה משותפת.

18. נתונה ההיפרבולה $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$. כתבו דוגמה למשוואה של אליפסה כך שמתקיים:

א. לאליפסה ולהיפרבולה יש 4 נקודות משותפות.

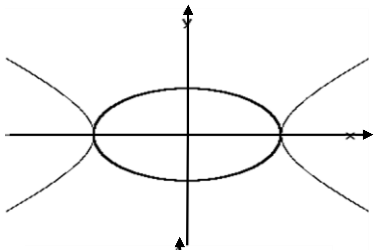
ב. לאליפסה ולהיפרבולה יש 2 נקודות משותפות.

ג. לאליפסה ולהיפרבולה אין אף נקודה משותפת.

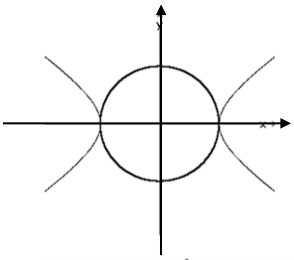
ד. נמקו מדוע לא קיימת אליפסה שמשוואתה קנונית, שיש לה נקודה משותפת אחת או שלוש נקודות משותפות עם ההיפרבולה.

19. כתבו מערכת משוואות שיכולה להתאים לסרטוטים הבאים:

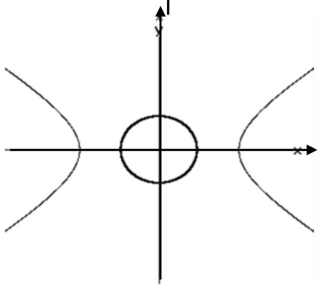
א.



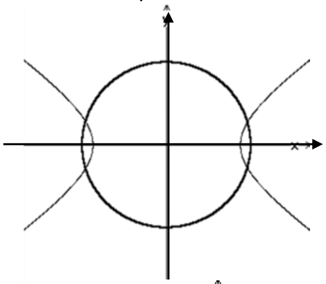
ד.



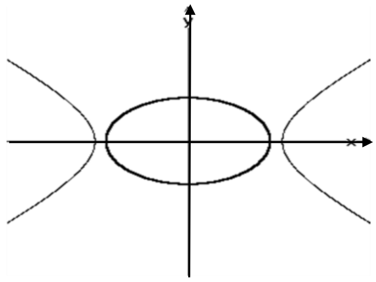
ב.



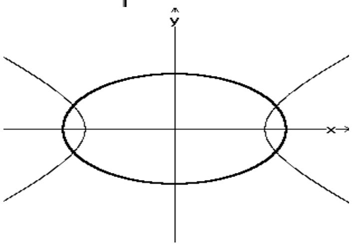
ה.



ג.



ו.



יישומון – אליפסה והיפרבולה

20. נתונה האליפסה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. כתבו משוואה של היפרבולה כך שלשתי העקומות:

א. יש 4 נקודות משותפות. ב. יש 2 נקודות משותפות. ג. אין נקודה משותפת.

ד. נמקו מדוע לא קיימת היפרבולה שמשוואתה קנונית, שיש לה מספר אי-זוגי של נקודות משותפות עם האליפסה.

21. נתון מלבן שקודקודיו נמצאים על ההיפרבולה $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{3.5}=1$, וצלעותיו מקבילות לצירים. שיעור ה-x של אחד הקודקודים שווה ל-3. חשבו את היקף המלבן.

תשובה: 16

22. נתון משולש שווה שוקיים ABC ‏(AB = AC), שכל קודקודיו נמצאים על ההיפרבולה $x^2 - y^2 = 9$. הקודקוד A של המשולש הוא הקודקוד השמאלי של ההיפרבולה. שיעור ה-x של הקודקוד B גדול ב-1 משיעור ה-y שלו. חשבו את שטח המשולש.

תשובה: 32

23. ארבעת הקודקודים של ריבוע נתון נמצאים על ההיפרבולה $9x^2 - 8y^2 = 4$.
מצאו את הקודקודים, אם ידוע כי צלעות הריבוע מקבילות לצירים.
תשובה: $(\pm2,\pm2)$

24. הקודקודים של טרפז שבסיסיו מקבילים לציר x נמצאים על ההיפרבולה $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$.
שיעור ה-x של אחד הקודקודים הוא 4. שיעור ה-y של קודקוד שני שווה ל-2. חשבו את שטח הטרפז. מצאו את שתי האפשרויות.
תשובה: $12(\sqrt{7} \pm 1)$

25. לכל אחת מהתבניות הנתונות קבעו עבור אילו ערכים של הפרמטר המשוואה מייצגת
א. מעגל ב. אליפסה ג. היפרבולה

(1) $ax^2 + (a - 1)y^2 - 9 = 0$

(2) $(2a - 2)x^2 + (a^2 + a - 6)y^2 + 100 = 0$

(3) $(2m^2 - 9m + 4)x^2 + (m^2 - 9m + 20)y^2 = 1$

(4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - 16} = 1$

(5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{36 - a^2} = 1$

תשובה: (1) א. אין ; ב. $a > 1$; ג. $0 < a < 1$

(2) א. $a = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \approx -1.5616$; ב. $-3 < a < 1$ ג. $a < -3$ או $1 < a < 2$

(3) א. $m = -4$; ב. $m > 5$ או $m < 1/2$; ג. $4 < m < 5$ או $1/2 < m < 4$

(4) א. $a = \pm\sqrt{8}$; ב. $|a| < 4$; ג. $|a| > 4$ (5) א. $a = \pm3\sqrt{2}$; ב. $|a| < 6$; ג. $|a| > 6$

26. מצאו את משוואות האסימפטוטות של ההיפרבולות שלהלן, וסרטטו סקיצות מתאימות:

א. $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{9} = 1$ ג. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$

ב. $y^2 - 4x^2 = 1$ ד. $9x^2 - 16y^2 = 144$

תשובה: א. $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}x$; ב. $y = \pm 2x$; ג. $y = \pm 2x$; ד. $y = \pm 3/4\, x$.

27. מצאו את ערכי הפרמטרים של ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, אם ההיפרבולה

א. עוברת דרך הנקודה $(\sqrt{200},1)$, ומשוואת אחת האסימפטוטות היא $y=\frac{1}{2}x$.

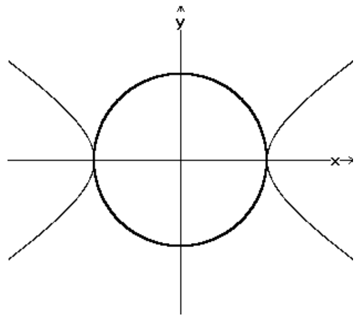
ב. עוברת דרך הנקודה $(4\sqrt{2},-6)$, ומשוואת אחת האסימפטוטות היא $y=-\frac{3}{2}x$.

ג. עוברת דרך הנקודה $(3,-\sqrt{12})$, ומשוואת אחת האסימפטוטות היא $y = 2x$.

ד. עוברת דרך הנקודה $(-1,0)$, ומשוואת אחת האסימפטוטות היא $y = 3x$.

תשובה: א. $a = 14$, $b = 7$; ב. $a = 4$, $b = 6$; ג. $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{24}$; ד. $a = 1$, $b = 3$

28. נתון מעגל $x^2 + y^2 = 9$, המשיק להיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, כמתואר בסרטוט.



ההיפרבולה עוברת בנקודה $(2\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{7}}{2})$.

א. מהי משוואת ההיפרבולה?

ב. מצאו את מספר נקודות החיתוך של הישר $y = kx$ עם ההיפרבולה שמצאת בסעיף א, כפונקציה של k.

ג. האם קיים k שעבורו ישר זה הוא אסימפטוטה של ההיפרבולה? נמקו.

תשובה: א. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; ב. עבור $-4/3 < k < 4/3$ יש שתי נקודות חיתוך; ג. $k = \pm 4/3$

29. נתונה ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. a , b הם פרמטרים חיוביים. מאחת מנקודות החיתוך של ההיפרבולה עם ציר ה- x העבירו אנך לאחת האסימפטוטות. אנך זה חותך את האסימפטוטה בנקודה A, ואת ציר ה-y בנקודה B. הביעו את אורכי הקטעים OA ו-OB בעזרת a ו-b. (O ראשית הצירים).

תשובה: $OA = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $OB = \frac{a^2}{b}$.

30. כל אחד מהישרים הנתונים משמש כאסימפטוטה של היפרבולה שמשוואתה קנונית. תנו דוגמה לשתי היפרבולות המתאימות לכל אחד מהם.

א. $y = 3x$	ג. $x + 2y = 0$	ה. $5y + x = 0$
ב. $y = x$	ד. $4y = -x$	ו. $3x - 4y = 0$

31. כתבו משוואה של היפרבולה בעלת התכונה:

א. אחת האסימפטוטות שלה מקבילה לישר $3x + y = 5$.

ב. אחת האסימפטוטות עוברת בנקודה $(2,3)$.

ג. האסימפטוטות ניצבות זו לזו.

32. נתונה ההיפרבולה $16x^2 - 25y^2 = 400$. מצאו את מספר נקודות החיתוך שלה עם כל אחד מהישרים שלהלן, וציינו מהו מצבם ההדדי. סרטטו סקיצה מתאימה לכל מקרה:

א. $y = 3x$	ד. $x = -5$	ז. $y = 2$
ב. $y = -0.5x$	ה. $x = 2$	ח. $2\sqrt{5}x + 5y = 10$
ג. $y = x + 1$	ו. $x = -4$	ט. $8x - 5\sqrt{3}y = 20$

עבור המשיקים, מצאו את שיעורי נקודות ההשקה.

תשובה: זרים: א, ה, ו; חותכים: ב, ג, ז; משיקים: ד $(-5,0)$, ח $\left(\sqrt{5}, -8\right)$, ט $\left(10, 4\sqrt{3}\right)$

יישומון – [מצב הדדי של היפרבולה וישר]()

33. נתונה ההיפרבולה $2x^2 - y^2 = 1$.

א. מצאו ישר שמשיק להיפרבולה, וסרטטו.

ב. מצאו שני ישרים שכל אחד מהם חותך את ההיפרבולה בשתי נקודות באותו ענף, וסרטטו.

ג. מצאו ישר שעובר בנקודה $(0,1)$ וזר להיפרבולה.

ד. מצאו ישר שעובר בנקודה $(0,1)$ וחותך את ההיפרבולה.

ה. האם יתכן כי ישר שעובר בראשית משיק להיפרבולה? נמקו את תשובתכם.

תשובה: ה. לא

34. נתונים ההיפרבולה $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ ומשפחת הישרים העוברים דרך הראשית.

א. אילו מבין הישרים של המשפחה חותכים את ההיפרבולה בשתי נקודות?

ב. אילו מבין הישרים של המשפחה זרים להיפרבולה?

ג. האם קיים ישר של המשפחה שיש לו נקודה משותפת יחידה עם ההיפרבולה? נמקו.

תשובה: א. $-1.5 < m < 1.5$; ב. $|m| \geq 1.5$ ג. לא.

35. נתונים ההיפרבולה $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ ומשפחת הישרים העוברים דרך הנקודה $(0,3)$.

א. אילו מבין הישרים של המשפחה חותכים את ההיפרבולה בשתי נקודות?

ב. אילו מבין הישרים של המשפחה זרים להיפרבולה?

ג. האם קיימים במשפחה ישרים שיש להם נקודה משותפת יחידה עם ההיפרבולה? אם כן, מצאו אותם, ואם לא - נמקו מדוע.

תשובה: $y = mx + 3$: א. $m^2 < 4.5$; ב. $m^2 > 4.5$; ג. $m^2 = 4.5$;

36. נתונים ההיפרבולה $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ ומשפחת ישרים המקבילים לציר y.

א. אילו מבין הישרים של המשפחה חותכים את ההיפרבולה בשתי נקודות?

ב. אילו מבין הישרים של המשפחה זרים להיפרבולה?

ג. לאילו מבין הישרים של המשפחה יש נקודה משותפת יחידה עם ההיפרבולה?

ד*. ענו על השאלות הנ"ל כאשר הישרים מקבילים לציר ה-x ומשוואת ההיפרבולה היא $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$.

תשובה: $x = c$: א. $|c| > 4$; ב. $|c| < 4$; ג. $c = \pm 4$; ד. $y = c$, התשובות כנ"ל

37*. נתונות ההיפרבולה $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ ומשפחת הפרבולות $y^2 = ax$.

כמה נקודות חיתוך יש לפרבולות עם ההיפרבולה, בהתאם לערכו של a?

תשובה: $a = \pm 9$: שתיים, $|a| < 9$: אין, $|a| > 9$: ארבע

תרגילי סיכום

38. נתונה ההיפרבולה $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ונתון ישר L: $x = \frac{16}{5}$. P היא נקודה כלשהי על ההיפרבולה.

נסמן ב- d את מרחקה של P מהישר L. הראו כי מרחקה של P מהמוקד הימני של ההיפרבולה מתיחס ל- d כמו $\frac{5}{4}$.

39. מצאו את משוואת המיתר של ההיפרבולה $4x^2 - 9y^2 = 144$ אם ידוע כי הוא עובר דרך הנקודה (9,4) והיא האמצע שלו.

תשובה: $y - x + 5 = 0$

40. נתונה ההיפרבולה $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$. הוכיחו כי מרחקו של המוקד מאחת האסימפטוטות שלה שווה ל- 4.

41. מצאו על ההיפרבולה $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{32} = 1$ נקודה ברביע השני שמרחקה מהאסימפטוטה בעלת השיפוע השלילי קטן פי 2 ממרחקה מהאסימפטוטה בעלת השיפוע החיובי.

תשובה: (-3, 2)

42. הזווית הקהה בין שתי האסימפטוטות של היפרבולה היא בת 120^0. ידוע כי ההיפרבולה עוברת דרך הנקודה $(-4, -2)$. מצאו את משוואתה של ההיפרבולה. מצאו שני מקרים.

תשובה: $3x^2 - y^2 = 44$ ו- $x^2 - 3y^2 = 4$

43. מצאו על ההיפרבולה $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ את הנקודות ברביעים הראשון והשני שמכפלת מרחקיהן מהמוקדים הוא 32.

תשובה: $\left(\pm 4, \sqrt{15}\right)$

44. קודקודי מלבן ששטחו 12 והיקפו 16 נמצאים על היפרבולה. מצאו את המשוואה של ההיפרבולה אם צלעותיו של המלבן מקבילות לצירים.

תשובה: $x^2 - y^2 = \pm 8$

45. נתונה ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. a, b הם פרמטרים חיוביים. מצאו על האסימפטוטה בעלת השיפוע החיובי את הנקודה ברביע הראשון ממנה רואים את המוקדים בזווית ישרה.

תשובה: (a,b)

46. על ההיפרבולה $x^2 - 3y^2 = 3$ מצאו נקודה ברביע הראשון שסכום מרחקיה משני המוקדים הוא 6.

תשובה: $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

47. מצאו לאילו ערכים של k, חותך הישר $y = 2x + k$ היפרבולה שוות שוקיים שמוקדה בנקודה $(-2\sqrt{6},0)$

תשובה: $k > 6$ או $k < -6$

48. מוקד היפרבולה שוות שוקיים שמשוואתה קנונית נמצא בנקודה $(4,0)$.
מצאו נקודה על ההיפרבולה שמרחקה מהמוקד הזה הוא $\sqrt{2}$.

תשובה: $(3,\pm 1)$

49. אסימפטוטה של היפרבולה מאונכת לישר $4x + 3y - 20 = 0$ העובר דרך המוקד הימני שלה. מצאו את משוואתה של ההיפרבולה.

תשובה: $9x^2 - 16y^2 = 144$

50. הוכיחו כי כל ישר המקביל לאסימפטוטה של היפרבולה חותך אותה בנקודה אחת בלבד.

51. הוכיחו כי מרחקו של מוקד ההיפרבולה מאחת האסימפטוטות שווה לחצי הציר המדומה שלה.

52. הוכיחו כי מכפלת מרחקיה של נקודה כלשהי על היפרבולה משני האסימפטוטות שלה הוא גודל קבוע.

53. נתונה ההיפרבולה $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. הנקודה P נמצאת על ההיפרבולה. נסמן ב- A את הקודקוד הימני של ההיפרבולה וב- B את קודקודה השמאלי. הישר AP עובר דרך הנקודה $(-4,t_1)$, והישר BP עובר דרך הנקודה $(4,t_2)$. הוכיחו כי $t_1\cdot t_2=-36$.

מקומות גאומטריים – היפרבולה

1. מצאו את המקום הגאומטרי של הנקודות שהפרש מרחקיהן מהנקודות $F_1(-4,0)$ ו-$F_2(4,0)$ הוא 6.

תשובה: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$

2. מצאו את המקום הגאומטרי של הנקודות שהפרש מרחקיהן מהנקודות $F_1(-3,0)$ ו-$F_2(3,0)$ הוא 4.

תשובה: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

3. מצאו היפרבולה שהיא המקום הגאומטרי של הנקודות שהפרש מרחקיהן משתי נקודות נתונות על ציר ה-x הוא 6.

4. נתונה ההיפרבולה $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

מצאו את המקום הגאומטרי של אמצעי הקטעים המחברים את ראשית הצירים עם הנקודות שעל ההיפרבולה.

תשובה: $9x^2-4y^2=9$

5. מצאו את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמכפלת מרחקיהן מן הישרים $y=2x$ ו- $y=-2x$ היא 5.

תשובה: $x^2-4y^2=25$ ו- $4x^2-y^2=25$

6. מצאו את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקיהן מן הישר $x = 2$ קטן פי 2 ממרחקיהן מן הנקודה $(8,0)$.

תשובה: $3x^2 - y^2 = 48$

7. מצאו את המקום הגאומטרי של אמצעי הקטעים המחברים נקודות שמונחות על ההיפרבולה $x^2 - y^2 = 4$ עם ראשית הצירים.

תשובה: $x^2 - y^2 = 1$

8. מצאו את המקום הגאומטרי של אמצעי הקטעים המחברים נקודות שמונחות על ההיפרבולה $x^2 - y^2 = a^2$ עם ראשית הצירים. (התרגיל מרחיב את התרגיל הקודם)

תשובה: $x^2 - y^2 = \frac{a^2}{4}$

9. מצאו את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים שווה לממוצע הגאומטרי של מרחקיהן מהנקודות $(4,0)$ ו- $(-4,0)$.

תשובה: $x^2 - y^2 = 8$

10. נתון המעגל $(x + 3)^2 + y^2 = 4$. מצאו את המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים למעגל הנתון מבחוץ ועוברים דרך הנקודה $(3,0)$.

תשובה: $8x^2 - y^2 = 8$ (הענף הימני)

11. מצאו את המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים המקצים על ציר ה- x קטע שאורכו 2a ועל ציר ה- y קטע שאורכו 2b .

תשובה: $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$

13. שני הקטעים AB ו- CD, ניצבים זה לזה וחוצים זה את זה בנקודה O (O ראשית הצירים).

נתון $a \neq b$, $AB = 2a$, $CD = 2b$.

הוכיחו: המקום הגאומטרי של כל הנקודות P המקיימות: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ הוא היפרבולה.

14. נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 + 4x = 0$, והנקודה: $A(2,0)$ מחוצה לו.

הוכיחו כי המקום הגאומטרי של מרכזי כל המעגלים העוברים דרך הנקודה A והנוגעים במעגל הנתון הוא היפרבולה. מצאו את משוואתה, ומצאו את האסימפטוטות של ההיפרבולה.

תשובה: א. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ ב. $y = \pm\sqrt{3}x$

15. מצאו וזהו את המקום הגאומטרי של מרכזי כל המעגלים המשיקים מבחוץ למעגלים $(x+3)^2+y^2=16$ ו- $(x-3)^2+y^2=1$.

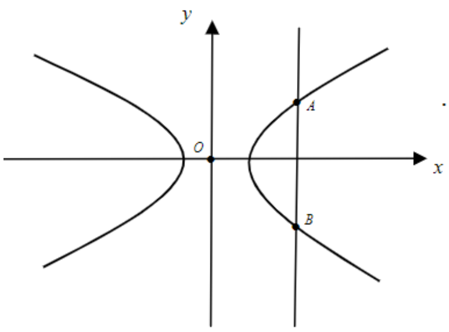
תשובה: $12x^2-4y^2=27$

שאלות מבגרויות ישנות

1. מנקודה P שעל ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ מעבירים מקבילים לשתי האסימפטוטות של ההיפרבולה. הוכיחו כי שטח המקבילית הנוצרת על ידי שתי האסימפטוטות ועל ידי שני המקבילים הוא $\frac{ab}{2}$.

2. נתונה היפרבולה $x^2-y^2=1$.

הישר $x=a$ חותך את ההיפרבולה בנקודות A ו-B. (ראו ציור). דרך הנקודה A מעבירים ישר המקביל לאסימפטוטה אחת של ההיפרבולה, ודרך הנקודה B מעבירים ישר המקביל לאסימפטוטה האחרת. הישרים נחתכים בנקודה E.



חשבו את שטח המשולש AEB.

תשובה: a^2-1

3. נתון מעוין ABCD שאינו ריבוע.

יש להוכיח כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות P, המקיימות $PA\cdot PB=PC\cdot PD$, הוא היפרבולה.

הדרכה: בחרו את מערכת הצירים כך שאלכסוני המעוין יהיו על הצירים.

4. נתונה היפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. P ו-Q הם קודקודי ההיפרבולה (נקודות החיתוך של ההיפרבולה עם ציר ה-x). דרך הנקודה P הורידו לאחת האסימפטוטות של ההיפרבולה אנך החותך את ציר ה- y בנקודה C. האנך מהנקודה Q לאותה אסימפטוטה חותך את ציר ה-y בנקודה D.

הביעו את אורך הקטע CD באמצעות a ו-b.

תשובה: $\frac{2a^2}{b}$

5. ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ עוברת דרך הנקודה $(\sqrt{80}, 2)$.

הישר $y = -\frac{1}{2}x$ הוא אסימפטוטה להיפרבולה זו.

א. מצאו את משוואת ההיפרבולה.

ב. מהו המקום הגאומטרי של אמצעי כל הקטעים המחברים את ראשית הצירים עם נקודות על ההיפרבולה הנתונה?

תשובה: א. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1$

ב. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$