גאומטריה במרחב – כיתה י"ב (40 שעות)

מטרות כלליות

- התלמיד יפתח תפיסה מרחבית.
- התלמיד יכיר תכונות של גופים שונים במרחב.
- התלמיד ידע לקרוא את הסרטוטים של גופים נלמדים במרחב.
- התלמיד ידע להשתמש בווקטורים לצורך פתרון בעיות גאומטריות.
- התלמיד ישתמש בידע מכל תחומי הגאומטריה לצורך חישובים ויישומים שונים.
- התלמיד ידע להשתמש בשלושת הייצוגים בגאומטריה: ייצוג מילולי, ייצוג סימבולי, ייצוג ויזואלי, ולשלב ביניהם.
- התלמיד יבין את הצורך בבקרה של התוצאות המתקבלות, ויפתח מיומנות של בקרה.
- התלמיד יפתח מיומנויות בסיסיות בפעולות עם וקטור אלגברי כשלשה סדורה של מספרים ממשיים.

<u>דגשים והערות:</u>

1. בתרגילים יידרשו רק חישובים מספריים (ללא פרמטרים).
2. לכל תרגיל במרחב יצורף סרטוט.
3. יושם דגש על הקשר בין התכונות הגאומטריות והיישום שלהן בעזרת וקטורים (גאומטריים ואלגבריים).
4. חישובים של נפח גופים יתבססו על שימוש בידע ובמיומנויות שנרכשו בגאומטריה, טריגונומטריה ובווקטורים גאומטריים ואלגבריים.
5. מומלץ לשלב שימוש בטכנולוגיה במהלך למידת הנושא (כגון תוכנות דינמיות, יישומונים ובדומה). שילוב כזה עשוי לתרום להמחשת הנלמד והבנה טובה יותר של מושגים בסיסיים במרחב ותכונות הגופים.

ישרים, מישורים והמצב ההדדי ביניהם, ותכונות הגופים

תכנים

ישרים, מישורים והמצב ההדדי ביניהם:

א. מצב הדדי בין שני ישרים שונים:
- נחתכים
- מצטלבים
- מקבילים

ב. קביעת מישור על ידי:
- שני ישרים נחתכים
- שלוש נקודות שאינן על ישר אחד
- ישר ונקודה מחוץ לישר
- שני ישרים מקבילים

ג. מצב הדדי בין ישר למישור:
- ישר נמצא במישור
- ישר ומישור נחתכים בנקודה אחת
- ישר ומישור מקבילים

ד. מצב הדדי בין שני מישורים:
- מישורים נחתכים, ישר החיתוך
- מישורים מקבילים

ה. ישר מאונך למישור: הגדרה, התנאי המספיק

גופים ותכונותיהם:

1. מנסרה (לאו דווקא ישרה): הגדרה, מונחים עיקריים: בסיס, פאה, מקצוע, אלכסון, גובה. שטח מעטפת, שטח פנים.

מקרה פרטי: מקבילון.

מנסרה ישרה. מקרים פרטיים: תיבה, קובייה.

2. פירמידה (לאו דווקא ישרה): הגדרה, מונחים עיקריים: קודקוד הראש, בסיס, פאה, מקצועות, גובה. שטח מעטפת, שטח פנים.

פירמידה ישרה: הגדרה (מקצועות צדדיים שווים), תכונת גובה.

<u>הערות:</u>

1. התלמידים ינתחו שייכות של קודקודים לפאות ולמקצועות, שייכות מקצועות לפאות, יקבעו אלו קודקודים קובעים מישור פאה, מישור בסיס או מישור אחר, יקבעו מצבים הדדים שונים בעזרת הגופים הנ״ל.

2. מומלץ לשלב לימוד המושג <u>ישר מאונך למישור</u> והמושג <u>גובה בגופים</u> עם הנושא <u>ניצבות בין וקטור למישור</u> (במהלך לימוד מכפלה סקלרית בהמשך).

וקטור בגישה גאומטרית

תכנים

<u>המושג וקטור:</u>

וקטור (במישור ובמרחב) לפי הגישה הגאומטרית, סימון, וקטור האפס, אורך וקטור, וקטורים קולינאריים, וקטורים שווים, וקטורים נגדיים.

<u>פעולות בווקטורים גאומטריים:</u>

חיבור, חיסור, כפל בסקלר.

תכונות הפעולות בווקטורים: חוק הקיבוץ וחוק החילוף של החיבור, חוק הקיבוץ של כפל בסקלרים $t\cdot(s\cdot\underline{u})=(t\cdot s)\cdot\underline{u}$, חוק הפילוג של כפל בסקלרים $(t+s)\underline{u}=t\underline{u}+s\underline{u}$,

חוק הפילוג בווקטורים $t(\underline{u}+\underline{v})=t\underline{u}+t\underline{v}$.

תנאי הכרחי ומספיק לקולינאריות של וקטורים.

<u>צירוף ליניארי של וקטורים:</u>

המושג צירוף ליניארי של וקטורים.

משפט (ללא הוכחה): כל וקטור במישור ניתן להצגה יחידה כצירוף ליניארי של שני וקטורים לא קולינאריים במישור, וכל צירוף כזה נמצא במישור שנקבע על ידי שני וקטורים לא קולינאריים, או במישור מקביל אליו.

קביעה אם ישר נמצא במישור או מקביל למישור בעזרת וקטורים.

משפט (ללא הוכחה): כל וקטור במרחב ניתן להצגה יחידה כצירוף ליניארי של שלושה וקטורים שלא נמצאים באותו מישור.

<u>הערה:</u> יישום מושגים בווקטורים ייעשה בעזרת צורות במישור וגופים במרחב .

וקטור בגישה אלגברית

תכנים

<u>מערכת צירים במרחב:</u>

הכרת מערכת צירים במרחב. שיעורי נקודה במרחב.

מקרים פרטיים: שיעורי נקודות הנמצאות באחד המישורים xy, xz, yz . שיעורי נקודות הנמצאות על הצירים.

<u>הצגה אלגברית של וקטור:</u>

וקטורי היחידה של הצירים. הגדרת הצגה אלגברית של וקטור.

שוויון, חיבור, כפל בסקלר של וקטורים בהצגה אלגברית. וקטורים קולינאריים בהצגה אלגברית.

מכפלה סקלרית של וקטורים

תכנים

הערה: בפרק זה כל הווקטורים שונים מווקטור אפס.

<u>זווית בין שני וקטורים:</u>

הגדרה, זיהוי.

קוסינוס של זווית ישרה וקהה - הגדרה באמצעות הקשר $cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

<u>המכפלה הסקלרית של שני וקטורים גאומטריים:</u>

הגדרה.

תכונות המכפלה הסקלרית: אורך וקטור: $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} = \sqrt{\underline{u}^2}$,

חוק החילוף: $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$, הומוגניות: $\underline{u} \cdot t\underline{v} = t(\underline{u} \cdot \underline{v})$,

חוק הפילוג: $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ (ללא הוכחה),

מכפלה סקלרית מקוצרת: $(\underline{u} + \underline{v})^2 = \underline{u}^2 + 2 \cdot \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v}^2$,

$(\underline{u} + \underline{v}) \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = \underline{u}^2 - \underline{v}^2$.

חישובים של אורכים וזוויות בעזרת מכפלה סקלרית. חישובי שטחים של הצורות הגאומטריות שנלמדו ב- י', י"א.

<u>ניצבות של וקטורים:</u>

וקטורים מאונכים זה לזה אם ורק אם המכפלה הסקלרית שלהם שווה ל- 0 .

ניצבות בין וקטור למישור:

הגדרה. התנאי המספיק: אם וקטור מאונך לשני וקטורים לא קולינאריים שמגדירים מישור אז הווקטור מאונך למישור.

מכפלה סקלרית של וקטורים בהצגה אלגברית:

חישוב המכפלה הסקלרית. אורך וקטור בהצגה אלגברית.

חישובי אורכים וזוויות בעזרת המכפלה הסקלרית. חישובי שטחים של הצורות הגאומטריות שנלמדו ב- י', י"א.

שימוש במכפלה הסקלרית להוכחות ניצבות בין שני וקטורים, ניצבות בין וקטור למישור.

חישובי נפחים של גופים

תכנים

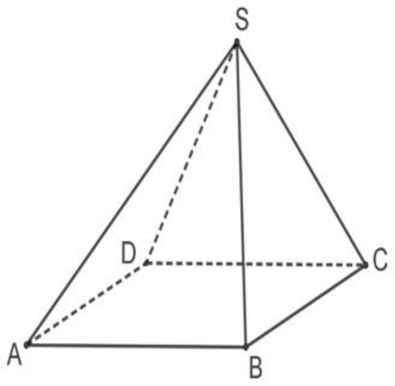
חישוב נפחים של הגופים הבאים:

מנסרה, פירמידה.

הערות:

1. חישובי נפח של מנסרה או פירמידה שאינן ישרות יהיו רק במצבים הבאים:
    - נתונים שיעורי קצוות הגובה.
    - אפשר לזהות את הגובה (כגון, פירמידה שאחד המקצועות מאונך לבסיס).
    - הוכח על ידי מכפלה סקלרית שווקטור הוא גובה של הגוף.
    - אפשר לחשב את אורך הגובה בעזרת משפט פיתגורס או שימוש בפונקציות טריגונומטריות במשולש ישר זווית או שימוש בווקטורים.
2. בשאלות של חישובי נפחים יופיעו פירמידות ומנסרות שבסיסיהם מצולעים, שדרכי חישוב שטחיהם מוכרות לתלמידים לפי התוכנית של י' ו-י"א.

דוגמאות לשאלות ותרגילים



דוגמה 1

נתונה פירמידה SABCD שבסיסה הוא מקבילית ABCD .

א.(1) רשמו נקודה וישר שבעזרתם אפשר להגדיר את מישור הבסיס.

(2) רשמו שני ישרים נחתכים שבעזרתם אפשר להגדיר את מישור הבסיס.

(3) רשמו שני ישרים מקבילים שבעזרתם אפשר להגדיר את מישור הבסיס.

ב. הישר AB הוא ישר החיתוך של אלו שני מישורים?

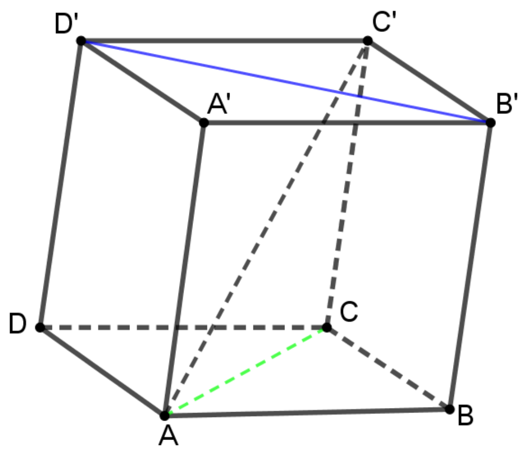
ג. מהו המצב ההדדי:

(1) בין מישור הבסיס למישור SAB?

(2) בין הישר DC למישור הבסיס?

(3) בין הישר DC למישור SAB?

(4) בין הישר DC לישר SB?



דוגמה 2

נתון מקבילון $ABCDA'B'C'D'$.

א. (1) רשמו נקודה וישר בעזרתם אפשר להגדיר את מישור הבסיס ABCD.

(2) רשמו שני ישרים נחתכים שבעזרתם אפשר להגדיר את מישור הבסיס ABCD.

(3) רשמו שני ישרים מקבילים שבעזרתם אפשר להגדיר את מישור הבסיס ABCD.

ב. הישר BB’ הוא ישר החיתוך של המישורים.

ג. מהו המצב ההדדי:

(1) בין מישור הבסיס ABCD למישור B’C’CB?
אם הם נחתכים, רשמו מיהו ישר החיתוך.

(2) בין המישורים ABCD ו- A’B’C’D’ ?

(3) בין הישר AD למישור AA’D’D ?

(4) בין הישר AC’ למישור ABCD?

(5) בין הישר A’D’ למישור ABCD?

(6) בין הישר AC לישר B’D’ ?

ד. (1) באלו מישורים נמצאת הנקודה A?

(2) באלו מישורים לא נמצאת הנקודה A?

<u>דוגמה 3</u>

בטרפז $ABCD$ ($AD \parallel BC$) נתון: $AD = 2BC$.

הנקודה O מחלקת את האלכסון AC

ביחס של $OC: AO = 1: 2$.

הנקודות M ו- N הן אמצעי הצלעות BC ו- AD

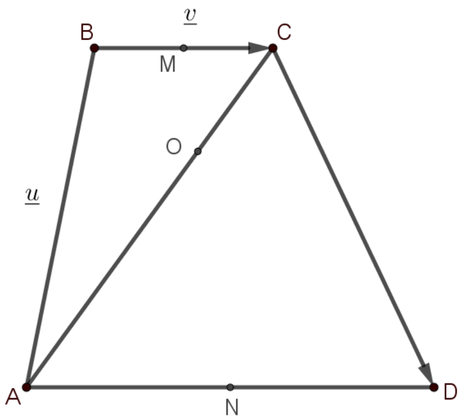
בהתאמה.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$.

א. הציגו את הווקטורים $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CA}$ ו- $\overrightarrow{CO}$

כצירוף לינארי של $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ב. הראו כי הנקודות M, O, N נמצאות על אותו ישר.



<u>דוגמה 4</u>

בפירמידה משולשת $ABCD$:

$\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{w}$.

הנקודה M מחלקת את AD ביחס של

$AM: MD = 3: 1$.

הנקודה N מקיימת : $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{8} \cdot (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$.

א. באיזה מישור נמצאת הנקודה N? נמקו.

ב. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ באמצעות

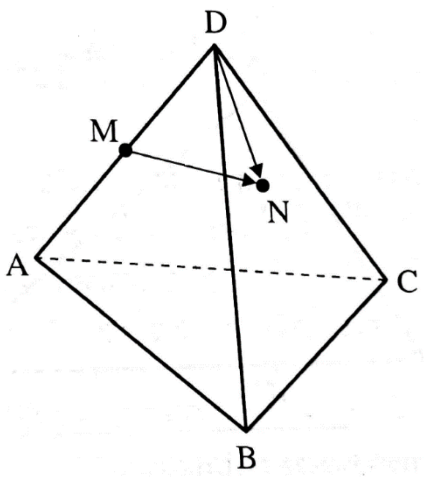
$\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$.

ג. האם MN מקביל למישור ABC? נמקו.

ד. הנקודה F היא אמצע המקצוע BC.

(1) הביעו את הווקטור $\overrightarrow{AF}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$.

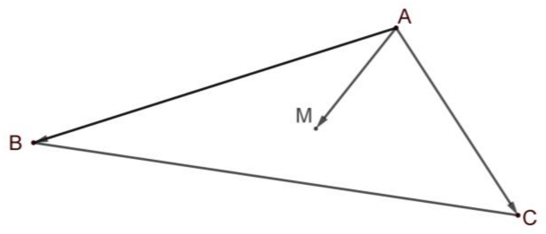
(2) האם הישרים MN ו- AF מקבילים? נמקו.



דוגמה 5

במשולש ABC התיכונים נפגשים בנקודה M .

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.



א. הביעו את הווקטור $\overrightarrow{AM}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ב. נתונים שיעורי הנקודות: $A(3,-4,1)$, $B(4,1,8)$, $C(2,0,7)$.

(1) הראו שהנקודות לא נמצאות על אותו ישר.

(2) מצאו את ההצגה האלגברית של הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

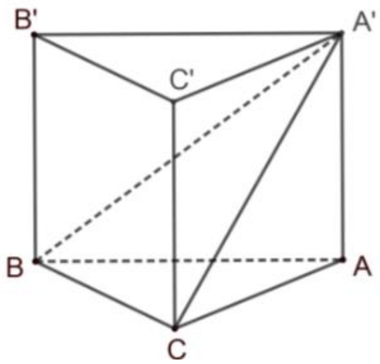
(3) בהסתמך על סעיף א', מצאו את שיעורי מפגש התיכונים M של המשולש ABC .

(4) חשבו פי כמה גדול שטח המשולש ABC משטח המשולש BMC .

דוגמה 6

במנסרה ישרה הבסיסים הם משולשים שווי צלעות בעלי צלע שאורכה 3 .

אורך המקצוע הצדדי הוא 4 .



נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

א. הביעו את $\overrightarrow{A'C}$ ו- $\overrightarrow{A'B}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$.

ב. חשבו את האורכים של $A'C$ ו- $A'B$.

ג. חשבו את:

(1) המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

(2) גודל הזווית $BA'C$.

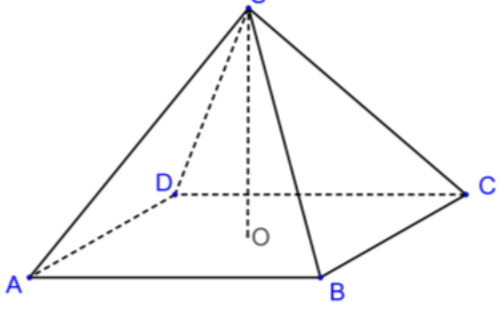
(3) שטח המשולש $BA'C$.

דוגמה 7

בפירמידה ישרה SABCD הבסיס ABCD הוא מלבן.

SO הוא גובה בפירמידה.

נתון: SO=5 , BC=3 , AB=4 .



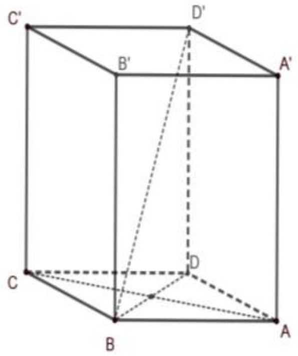
נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{OS} = \underline{w}$.

א. הביעו את $\overrightarrow{SB}$ ואת $\overrightarrow{SC}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$.

ב. חשבו את גודל הזווית BSC .

ג. חשבו פי כמה קטן שטח המשולש BOC משטח הפאה SBC .

<u>דוגמה 8</u>



בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ הבסיס ABCD הוא מלבן.

אורך אלכסון המלבן ABCD הוא 5

והזווית החדה בין אלכסוני המלבן היא $60°$.

הזווית בין אלכסון התיבה BD' לאלכסון הבסיס BD היא 30°.

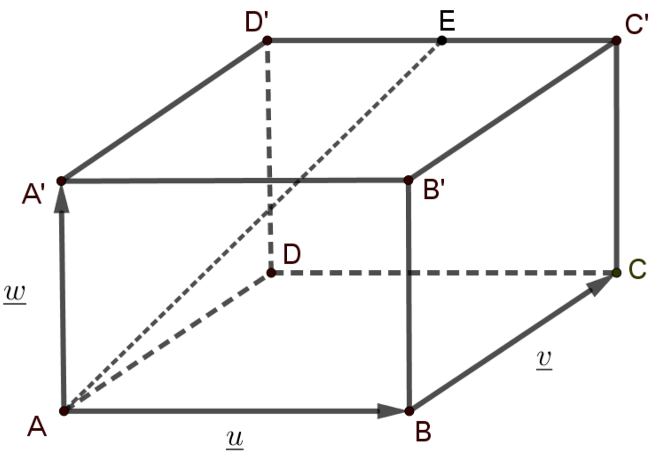
א. (1) מדוע משולש BDD' הוא ישר זווית? נמקו.

(2) חשבו את אורך המקצוע הצדדי של התיבה.

ב. חשבו את נפח התיבה.

ג. פי כמה גדול נפח התיבה מנפח הפירמידה $ABDD'$?

<u>דוגמה 9</u>



במנסרה ישרה $ABCDA'B'C'D'$

הבסיס $ABCD$ הוא מקבילית.

הנקודה E היא אמצע המקצוע $D'C'$.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

נתון: $|\underline{v}| = |\underline{u}| = 8$, $|\underline{w}| = 5$, $|\overrightarrow{AE}| = 11$.

א. הביעו את הווקטור $\overrightarrow{AE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ב. חשבו את $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

ג. חשבו את הזווית BAD.

ד. (1) חשבו את שטח בסיס המנסרה $ABCD$.

(2) חשבו את נפח המנסרה.

ה. האם $\measuredangle AD'E = 90°$? נמקו.

<u>דוגמה 10</u>

במקבילון $ABCDA'B'C'D'$

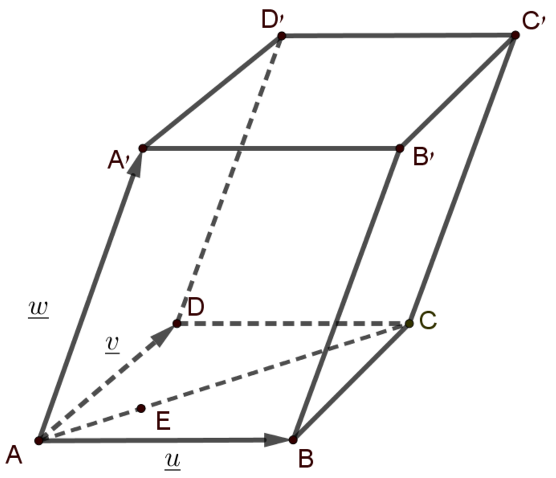
הבסיס $ABCD$ הוא מעוין.

אורך צלע המעוין שווה ל- 1.

נתון: $\measuredangle BAD = \measuredangle A'AB = \measuredangle A'AD = 60°$,

$AA' = 1.2$.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.



א. חשבו את המכפלות הסקלריות הבאות:

(1) $\underline{u} \cdot \underline{v}$ (2) $\underline{u} \cdot \underline{w}$ (3) $\underline{v} \cdot \underline{w}$.

הנקודה E נמצאת על האלכסון AC

ומחלקת אותו ביחס $AE: EC = 2: 3$.

ב. הביעו את הווקטור $\overrightarrow{A'E}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ג. הראו כי $\overrightarrow{A'E}$ מאונך למישור הבסיס $ABCD$.

ד. (1) חשבו את $\left|\overrightarrow{A'E}\right|$.

(2) חשבו את נפח המקבילון.

<u>דוגמה 11</u>

במרובע ABCD נתונים הקודקודים

$A(3,0,1)$, $B(3,1,-1)$, $C(-2,-1,-7)$, $D(-2,-4,-1)$.

א. (1) מדוע DCllAB?

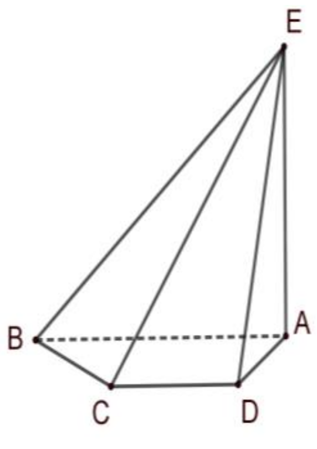
(2) הוכיחו שהמרובע הוא טרפז ישר זווית.

ב. חשבו את שטח הטרפז.

ג. בפירמידה ABCDE נתון גם קודקוד E(-1 ,4,3) .

(1) הוכיחו: המקצוע AE מאונך למישור ABCD.

(2) מצאו את נפח הפירמידה.



<u>דוגמה 12</u>

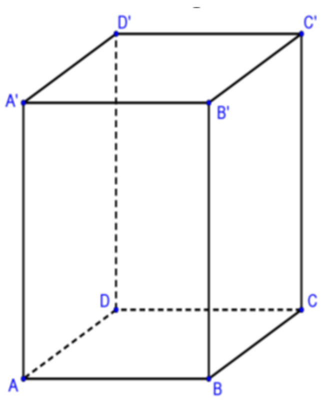
במנסרה $ABCDA'B'C'D'$ הבסיס $ABCD$ הוא מקבילית.

נתון: $A(3,3,2)$, $B(5,1,0)$, $D(2,3,1)$, $C'(10,13,-7)$.

א. מצאו את שיעורי הקודקוד C.

ב. הוכיחו כי המנסרה היא תיבה.

ג. חשבו את נפח התיבה.



<u>דוגמה 13</u>

OACBS פירמידה מרובעת וישרה שבסיסה

מלבן. SD מאונך למישור הבסיס.

נתון: A(4,0,0), B(0,8,0) . כמו כן ידוע כי אורך

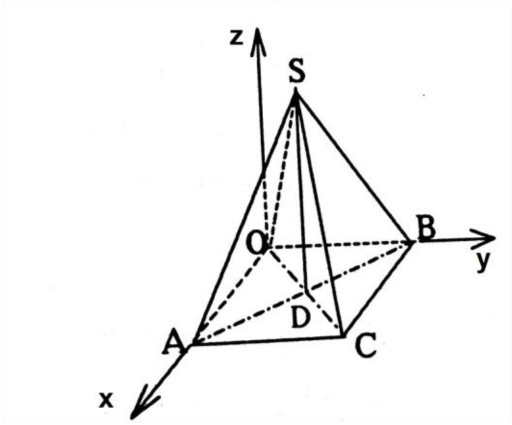
SD שווה 12.

א. חשבו את נפח הפירמידה.

ב. מצאו את שיעורי הקודקוד S.

ג. חשבו את הזוויות SOA ו- SOB.

ד. חשבו את שטח המעטפת של הפירמידה.



<u>דוגמה 14</u>

בפירמידה מרובעת SABCD קודקודי הבסיס הם

A(0,0,0), B(4,0,0), C(4,4,0) ,D(0,4,0)

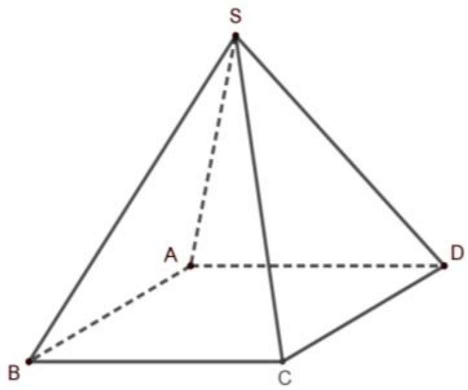
וקודקוד הראש הוא S(2,2,5) .

א. הוכיחו כי הפירמידה ישרה.

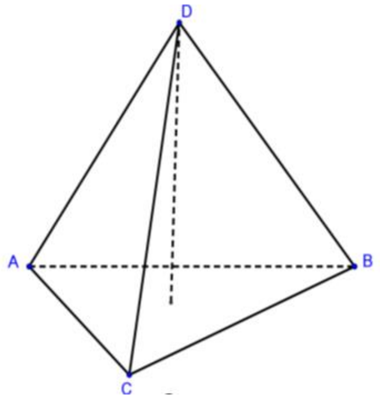
ב. הוכיחו כי בסיס הפירמידה הוא ריבוע.

ג. מדוע בסיס הפירמידה נמצא במישור xy?

ד. חשבו את נפח הפירמידה.



דוגמה 15



בפירמידה ABCD נתונים הקודקודים

. A(-1,1,0) , B(0,1,1), C(-4,3,-1), D(0,6,0)

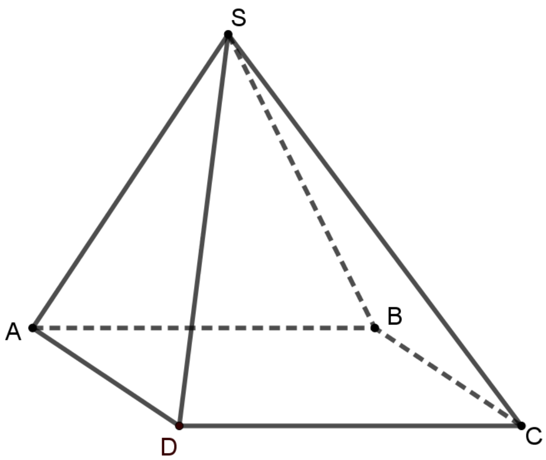
א. הוכיחו כי הפירמידה ישרה.

ב. חשבו את גודל הזווית BAC ואת רדיוס המעגל החוסם את משולש ABC.

ג. (1) מדוע גובה הפירמידה DO מאונך ל- AO ?

(2) חשבו את האורך של גובה הפירמידה DO.

דוגמה 16



בפירמידה $SABCD$ נתונים הקודקודים:

, $C(0,4,-9)$, $B(6,1,0)$, $A(3,-5,9)$

. $S(6,-19,-10)$, $D(-3,-2,0)$

א.(1) הוכיחו כי המרובע $ABCD$ הוא מקבילית.

(2) חשבו את גודל הזווית החדה של המקבילית.

(3) חשבו את שטח המקבילית.

נתון כי הנקודה K מקיימת: $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.

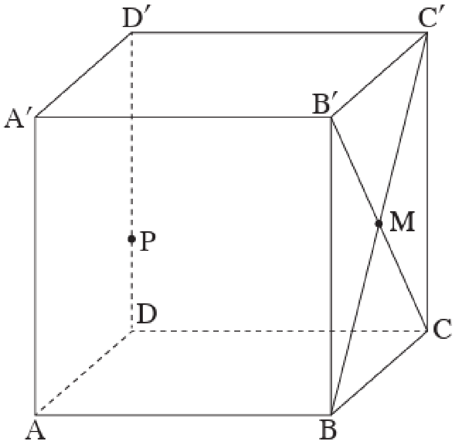
ב.(1) הסבירו מדוע הנקודה K נמצאת על האלכסון DB .

(2) מצאו את שיעורי הנקודה K.

(3) הראו כי SK מאונך למישור הבסיס $ABCD$.

ג. חשבו את נפח הפירמידה $SABCD$.

דוגמה 17



בסרטוט שלפניכם תיבה $ABCDA'B'C'D'$.

הנקודה M היא מפגש האלכסונים בפאה $BCC'B'$.

נקודה P נמצאת על המקצוע DD' ומקיימת $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DD'}$.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו־ $\overrightarrow{MP}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו־ $\underline{w}$.

נתון: $|\underline{v}| = 6$, $|\underline{w}| = |\underline{u}| = 18$.

ב. **(1)** הוכיחו כי הווקטור $\overrightarrow{AP}$ מאונך לווקטור $\overrightarrow{MP}$.

(2) חשבו את שטח המשולש APM .

נתון: $D(0, 0, 0)$.

הקודקוד A נמצא על החלק החיובי של ציר ה־ x ,

הקודקוד C נמצא על החלק החיובי של ציר ה־ y והקודקוד D' נמצא על החלק החיובי של ציר ה־ z .

ג. **(1)** מצאו את שיעורי הקודקודים C , B , C' .

(2) מצאו את שיעורי הנקודה M .

ד. מצאו את גודל הזווית PMB .

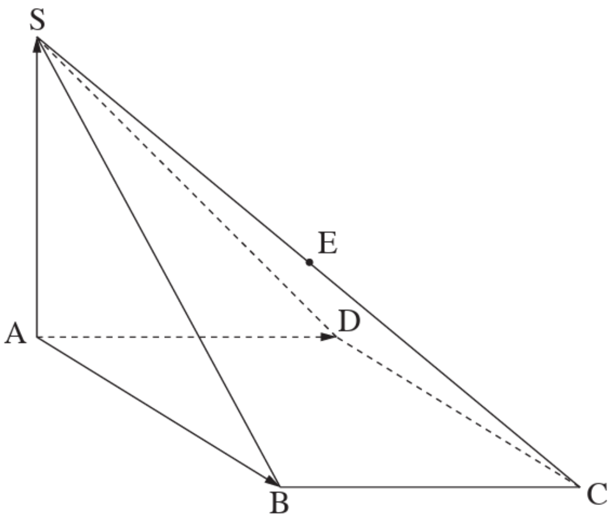
דוגמה 18

בסרטוט שלפניכם פירמידה מרובעת $SABCD$ שבסיסה $ABCD$ הוא מעוין.

הנקודה E היא אמצע המקצוע SC .

AS מאונך לבסיס הפירמידה.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$.



א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, ו־ $\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{EB}$ ו־ $\overrightarrow{ED}$.

נתון: $|\underline{u}| = |\underline{w}|$, $\sphericalangle BAD = 60^o$.

ב. הוכיחו כי $\overrightarrow{EB}$ מאונך ל־ $\overrightarrow{ED}$.

נתון: $A(0, 0, 0)$, $B(2\sqrt{3}, 2, 0)$.

הקודקוד D נמצא על החלק החיובי של ציר ה־ y .

שיעור ה־ z של הקודקוד S הוא חיובי.

ג. **(1)** מצאו את אורך המקצוע AB ואת שיעורי הקודקוד S .

(2) חשבו את נפח הפירמידה $SABCD$.