

תוכנית הלימודים החדשה – חדו"א כיתה י"ב (לפחות 50 שעות)

טכניקה אלגברית - חזקות ולוגריתמים (לפחות 20 שעות)

תכנים – חזקות, משוואות מעריכיות ואי שוויונות מעריכיים

- חוקי חזקות: כל חוקי החזקות - כולל חזקה עם מעריך רציונלי.
- שורשים ריבועיים: מכפלת שורשים ומנתם, הכנסת גורם מתחת לשורש, הוצאת גורם מתוך השורש.
- פונקציה מעריכית: תכונותיה ותיאורה הגרפי.
- משוואות מעריכיות (על פי הנדרש ביישומים של חדו"א או בבעיות גדילה ודעיכה).
- אי-שוויונות מעריכיים פשוטים (אי-שוויונות שמהם ניתן להגיע לצורה $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$, a מספר קבוע, $a > 0$, והמובילים לכל היותר לאי-שוויון ריבועי).

תכנים – לוגריתמים

- הגדרת הלוגריתם בבסיס כלשהו כאחת הפעולות ההפוכות לפעולת החזקה.
- חוקי הלוגריתמים: לוגריתם של מכפלה, מנה, חזקה ושורש.
- פונקציה לוגריתמית: תכונותיה ותיאורה הגרפי.
- משוואות לוגריתמיות (על פי הנדרש ביישומים של חדו"א או בבעיות גדילה ודעיכה)
- אי-שוויונות פשוטים (אי-שוויונות שמהם ניתן להגיע לצורה $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$, a מספר קבוע, $a \neq 1$, $a > 0$, f ו- g פונקציות פשוטות, אשר מובילות לכל היותר לאי שוויון ריבועי).

בעיות גדילה ודעיכה

- גדילה מעריכית ודעיכה מעריכית.
- זמן מחצית חיים.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(לפחות 30 שעות)

חשבון דיפרנציאלי

נגזרות של פונקציות מעריכיות עם בסיס e , ופונקציות לוגריתמיות עם בסיס e - כולל שילוב שלהן עם פונקציות פולינום, ופונקציות רציונאליות.

עבור כל הפונקציות: נגזרת של סכום, מכפלה, מנה, נגזרת של פונקציה מורכבת (שני שלבים בלבד).

עבור כל הפונקציות, שימושי הנגזרת:

- לפתרון שאלות שיש בהן צורך במציאת שיפוע משיק, או במציאת משוואת משיק לגרף, בנקודה שעל גרף הפונקציה.
- לחקירת פונקציה ושרטוט סקיצה של גרף הפונקציה. החקירה תכלול: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון (מקומי ומוחלט), התנהגות בסביבת נקודת אי-הגדרה, אסימפטוטות מקבילות לצירים (בכל סוגי הפונקציות) בהתאם לפירוט הבא:
אסימפטוטות מקבילות לצירים ידרשו עבור הפונקציות: $e^x, \ln x$. עבור $e^{f(x)}, \ln f(x)$ ידרשו אסימפטוטות רק כאשר מציאתן פשוטה.
- הקשר בין $f(x)$ לבין $f'(x)$

הערה: התלמידים יידרשו ליישם את הידע לגבי טרנספורמציות של פונקציות (שנרכש בכיתות י"א/י"ב) בהקשר לפונקציות המעריכיות או הלוגריתמיות.

חשבון אינטגרלי

- חשבון אינטגרלי של פונקציות מעריכיות: אינטגרל של $e^x, e^{f(x)}$ כאשר $f(x)$ לינארית.
- חשבון אינטגרלי של פונקציות אשר הקדומה שלהן היא לוגריתמית: האינטגרל של $\frac{1}{x}, \frac{1}{f(x)}$ כאשר $f(x)$ לינארית.
עבור הפונקציות הנ"ל:
 - אינטגרל מידי.
 - אינטגרל של סכום פונקציות.
 - אינטגרל של כפל פונקציה בקבוע.
 - אינטגרל לא מסוים.
 - מציאת פונקציה על פי הנגזרת ונקודה על הפונקציה.
 - אינטגרל מסוים.
 - חישוב שטחים: חישוב שטח בין גרף הפונקציה לציר x (הפונקציה יכולה להיות חיובית, שלילית או לשנות סימן), חישוב שטח בין גרפים של שתי פונקציות, חישוב שטחים מורכבים.

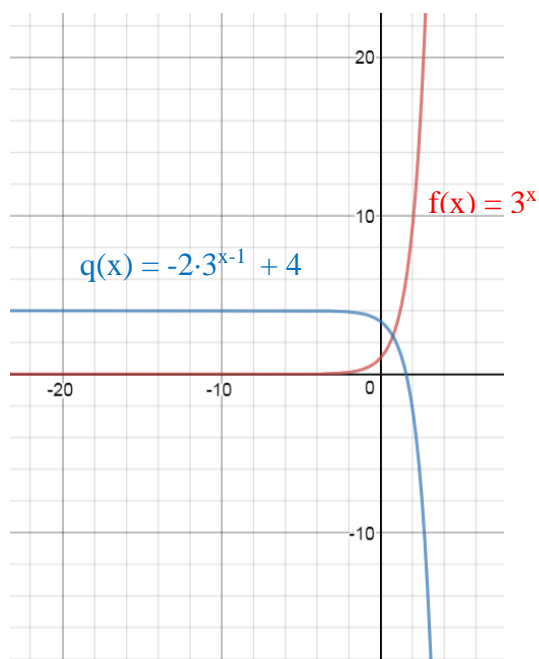
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות - דוגמאות

דוגמה ראשונה

- א. סרטטו סקיצה של הפונקציה: $f(x) = 3^x$
- ב. סרטטו סקיצה של הפונקציה: $g(x) = 3^{x-1}$
- ג. סרטטו סקיצה של הפונקציה: $h(x) = -2 \cdot 3^{x-1}$
- ד. סרטטו סקיצה של הפונקציה: $q(x) = -2 \cdot 3^{x-1} + 4$

פתרון

למשל, הפונקציות:



דוגמה שנייה

- א. סרטטו, באותה מערכת צירים, את שתי הפונקציות: $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- ב. השוו את שתי הפונקציות תוך התייחסות לתכונותיהן: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי חיוביות / שליליות, תחומי עלייה / ירידה, אסימפטוטות.

דוגמה שלישית

א. סרטטו סקיצה של הפונקציה: $f(x) = \log(x)$

ב. סרטטו סקיצה של הפונקציה: $f(x) = \log(x - 1)$

ג. סרטטו סקיצה של הפונקציה: $f(x) = 3 \cdot \log(x)$

ד. סרטטו סקיצה של הפונקציה: $f(x) = 3 \cdot \log(x) + 4$

דוגמה רביעית

א. סרטטו, באותה מערכת צירים, את שתי הפונקציות: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $f(x) = \log_2 x$

ב. השוו את שתי הפונקציות תוך התייחסות לתכונותיהן: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי חיוביות / שליליות, תחומי עלייה / ירידה, אסימפטוטות.

דוגמה חמישית

היעזרו [בישומון זה](#) לבדיקת הקשר בין $f(x) = a^x$ לבין $g(x) = \log_a x$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי - דוגמאות

דוגמה ראשונה

שאלה בין פונקציה מעריכית לבין פונקציה פולינומאלית. קשר בין ארץ פונקציה לארץ הנגזרת.

א. חקרו את הפונקציה: $f(x) = x \cdot e^{2x}$ וסרטטו סקיצה שלה.

ב. סרטטו סקיצה של $g(x) = f'(x)$.

דוגמה שנייה

שאלה בין פונקציה מעריכית לבין פונקציה פולינומאלית. פונקציה הנתונה בצורה פראמטרית.

גרף הפונקציה: $f(x) = (x^2 + ax + b) \cdot e^{-x}$ משיק לציר ה- x בנקודה שבה $x = -1$

א. חשבו את ערכי a ו- b .

ב. חקרו את הפונקציה וסרטטו סקיצה שלה.

דוגמה שלישית (לקוח מתוך בחינת בגרות קיץ תשע"ט, שאלון 035482 שאלה 4)

חקיפת פונקציה מעריכית. אפנספואמצינות של פונקציות.

נתונה הפונקציה $f(x) = -3e^x(2e^x - 4)$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ג. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = -\frac{1}{2}f(x)$.

(1) כתוב מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגה.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

דוגמה רביעית (לקוח מתוך בחינת בגרות קיץ תשע"ז, מועד ב', שאלון 035482 שאלה 4)

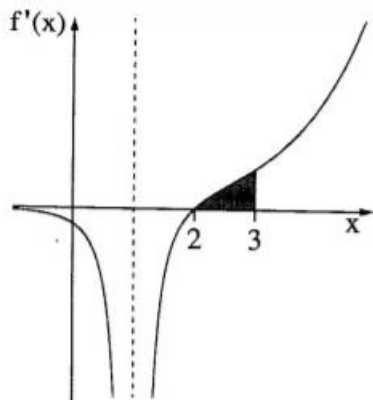
חקיית פונקציה מעריכית קשר בין אגף פונקציה לאגף הנגזרת. חישבו שטח באמצעות אינטגרל מסוים

נתונה הפונקציה $f(x) = e^{x^2 - x + 1}$. נתון: $f(x) = g'(x)$.

- א. (1) מצא את משוואת הפונקציה $g(x)$.
- (2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
- (3) מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.
- (4) הראה שהפונקציה $g(x)$ עולה בכל תחום הגדרתה.
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- ג. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי הצירים.

דוגמה חמישית (לקוח מתוך בחינת בגרות חורף תשע"ז, שאלון 035482 שאלה 4)

שאלה בין פונקציה מעריכית לפונקציה רציונלית. פונקציה רציונלית בצורה פרמטרית. קשר בין אגף הפונקציה לאגף הנגזרת.



בציור שלפניך מוצג גרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$

של הפונקציה $f(x) = \frac{e^{x-2}}{x-c}$. c הוא פרמטר.

- היעזר בנתונים מן הציור וענה על הסעיפים א-ד.
- א. גזור את הפונקציה $f(x)$ וחשב את c .
- הצב $c = 1$ וענה על הסעיפים ב-ד.
- ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ג. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.
- ד. חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $2 \leq x \leq 3$ (השטח האפור בציור). תוכל להשאיר e בתשובתך.

דוגמה שישית (לקוח מתוך בחינת בגרות חורף תשע"ז, שאלון 035482 שאלה 5)

פונקציה לאריתמטית קשי בין ארץ הפונקציה ארץ הנלנית

נתונה הפונקציה $f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
- ג. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. מצא את התחום שבו גם $f(x)$ חיובית וגם $f'(x)$ חיובית.
- ו. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $x > 0$. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $g(x)$, וקבע את סוגן.

דוגמה שביעית (לקוח מתוך בחינת בגרות קיץ תשע"ז, מועד ב', שאלון 035482 שאלה 5)

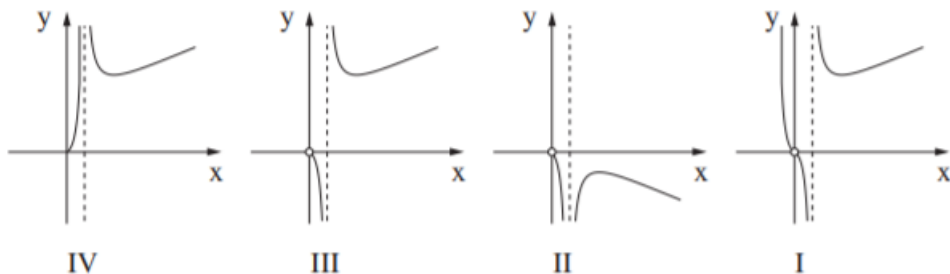
חקיפה של פונקציה האמאנת בין פונקציה לאריתמטית לבין פונקציה רציונלית. פונקציה פראמטרית.

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x}{\ln x - a}$. $a > 0$ הוא פרמטר.

נתון: הישר $y = 2x$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = e^3$.

- א. מצא את a .
- הצב $a = 2$ וענה על הסעיפים ב-ג.
- ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המאונכת לציר ה- x .
- (3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.
- (4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- (5) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ג. לפניך ארבעה גרפים, IV-I. איזה מהם הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$? נמק.



גדילה ודעיכה - דוגמאות

דוגמה ראשונה (לקוח מתוך בחינת בגרות חורף תשע"ד, שאלון 035805 שאלה 3 סעיף א) יובל פתח חשבון חדש בבנק והפקיד בו 10,000 שקלים.

הסכום שהפקיד גדל בכל חודש ב- 2%.

כעבור שנה מרגע ההפקדה משך יובל מחשבונו 5,000 שקלים.

(הסכום שנשאר ממשיך לגדול בכל חודש ב- 2%).

כעבור כמה חודשים מרגע המשיכה, שוב יהיו בחשבונו של יובל 10,000 שקלים?

דוגמה שנייה (לקוח מתוך בחינת בגרות תשע"ה, דצמבר 2014, שאלון 035805 שאלה 3) דנה הפקידה סכום של 20,000 שקלים בתוכנית חיסכון בבנק לפי ריבית של 4% לשנה.

א. מה היה הסכום בתוכנית לאחר 5 שנים?

לאחר 5 שנות החיסכון הוסיפה דנה לסכום שהצטבר בתוכנית עוד 6,000 שקלים, והמשיכה באותה תוכנית חיסכון.

ב. לאחר הוספת הכסף, כעבור כמה שנים יהיה בתוכנית החיסכון סכום של 39,916 שקלים?

ג. לאחר הוספת הכסף, כעבור כמה שנים יגדל הסכום שבתוכנית פי 3?