

שאלון 471

התפלגות נורמלית



Classit

תוכן עינים

1.	ציוני תקן	
2.	הסבר	
4.	תרגול	
2.	התפלגויות רציפות	
7.	הקניה	
10.	תרגול	
3.	משפחת ההתפלגויות הנורמליות	
11.	הקניה	
14.	תרגול	
4.	התפלגות נורמלית וטבלת z	
19.	הקניה	
22.	תרגול	
5.	שאלות לקראת בגרות	
26.		
6.	תשובות לכל היחידות	
28.		
7.	נספחים	
33.	נספח א: שימוש בציוני תקן למציאת סטית התקן	
34.	נספח ב: טרנספורמציות בסטטיסטיקה	
36.	נספח ג: כרטיסי ניווט	
37.	נספח ד: דוגמאות לפתרון שאלות בגרות לתלמיד	
39.	נספח ה: דוגמאות לפתרון שאלות בגרות למורה	

יחידה ראשונה

ציוני תקן (ציוני z)



ציוני תקן

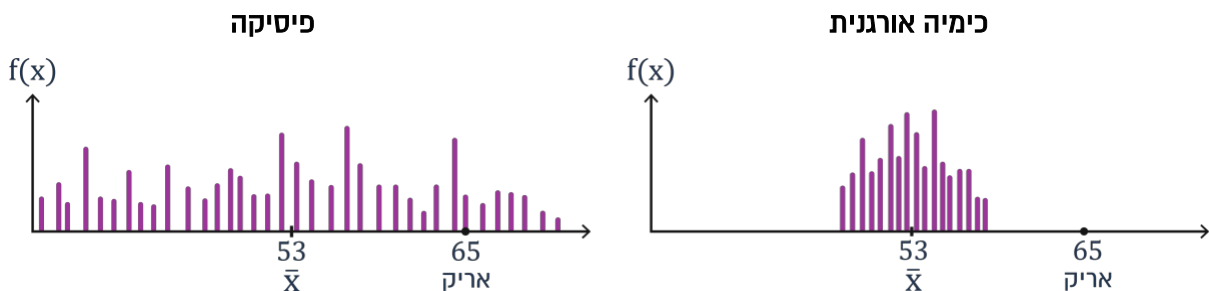
בפרק של סטטיסטיקה תיאורית למדנו להסתכל על ערכים של משתנה מסוים, למשל ציון במבחן, ולחשב לפי ערכי המשתנה מדדים שונים: שכיחות, ממוצע, חציון, סטית תקן ועוד. עם זאת, לפעמים, הערך הגולמי (האמיתי) של המשתנה לא אומר לנו הרבה.

למשל, סטודנט מסוים בטכניון קיבל ציון 65 במבחן קשה מאוד בכימיה אורגנית – האם זה אומר שהוא קיבל ציון נמוך? יתכן שכן, אבל לא בהכרח. למשל, אם יתברר שממוצע הציונים במבחן זה היה 53, והסטודנט קיבל את הציון הגבוה ביותר בכיתתו, אולי נחשוב אחרת על הציון 65.

דוגמה זו ממחישה את הצורך שלנו להשוות את הערך שקיבלנו לשאר הערכים בהתפלגות, כדי לדעת אם הציון 65 הוא "טוב" או "גרוע". מהדוגמה שראינו ברור שחשוב להשוות את הערך שהתקבל לממוצע של הכיתה. אבל האם זה מספיק כדי לקבוע עד כמה הציון גבוה או נמוך?

נניח שאותו תלמיד קיבל גם במבחן בקורס בפיסיקה 65, ונניח שגם במבחן השני הממוצע של הכיתה היה 53.... האם במצב כזה נוכל לקבוע שבשני המבחנים הסטודנט שלנו, כעת כבר נקרא לו אריק, הצליח באותה המידה?

לא בטוח. אם סטית התקן במבחן הראשון מאוד קטנה, נניח $S=2$, וסטית התקן במבחן השני מאוד גדולה, נניח $s=12$, זה ישנה את המסקנות שלנו. בגרפים זה יראה בערך כך:



ניכר לעין שבכימיה אורגנית 1 אריק "בולט בנוף": הציון שלו מאוד גבוה יחסית לכיתתו. בפיסיקה, הציון של אריק גם גבוה, אבל לא חריג עד כדי כך. במילים אחרות – באופן יחסי לשאר הכיתה, הציון של אריק בכימיה אורגנית הרבה יותר גבוה מאשר בפיסיקה.

מה למדנו? שכדי לדעת עד כמה ערך מסוים הוא בולט, או קיצוני, עלינו להשוות אותו לממוצע של ההתפלגות, וגם לפיזור של כל התצפיות מסביב לממוצע. ואיזה מזל שיש בשביל זה נוסחה:

$$Z = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$$

המרחק של התצפית מהממוצע

←

הפיזור של כל התצפיות מסביב לממוצע

בנוסחה אנחנו רואים מה שהדגמנו קודם: כדי לדעת עד כמה הציון של אריק בולט או שונה משאר הציונים, נבדוק כמה הוא רחוק מהממוצע (ואם הוא מעליו או מתחתיו). אחרי שנדע כמה הציון של אריק רחוק מהממוצע, נבדוק אם המרחק הזה גדול או קטן ביחס למרחק של שאר התצפיות מהממוצע. (המדד לפיזור של כל התצפיות סביב הממוצע הוא זכור – סטית התקן).

שימו לב

הנוסחה מאפשרת לנו לבטא את המרחק של אריק מהממוצע ביחידות של סטיות תקן:

בקורס כימיה אורגנית ($S=2$) אריק רחוק 6 סטיות תקן מהממוצע!

ואילו בקורס פיסיקה ($S=12$) אריק רחוק סטית תקן אחת בלבד מהממוצע.

המרחק הזה, שאנחנו סופרים "בצעדים" של סטיות תקן, נקרא **ציון תקן**, והוא מסומן באות Z .

נחשב בעזרת הנוסחה את ציוני התקן של אריק:

ציון התקן של אריק
בכימיה אורגנית

$$Z = \frac{x_i - \bar{x}}{S} = \frac{65 - 53}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

ציון התקן של אריק
בפיסיקה

$$Z = \frac{x_i - \bar{x}}{S} = \frac{65 - 53}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

גם בנוסחה (וגם בגרף) אנחנו רואים שאריק קיבל ציון גבוה מהממוצע בשני המבחנים, אבל הציון שלו בכימיה אורגנית "גבוה" יותר יחסית לציון שלו בפיסיקה (למרות שבשניהם קיבל ציון זהה).

דגשים

- כאשר ציון התקן הוא **חיובי** – המשמעות היא שהתצפית נמצאת **מעל הממוצע** ככל שערכו של ציון התקן גדול יותר המשמעות היא שהתצפית רחוקה יותר מהממוצע.
- כאשר ציון התקן הוא **שלילי** – המשמעות היא שהתצפית נמצאת **מתחת לממוצע** ככל שערכו של ציון התקן קטן יותר (שלילי יותר) המשמעות היא שהתצפית רחוקה יותר מהממוצע, כלפי מטה.
- כאשר ציון התקן הוא **0** – המשמעות היא שהתצפית בדיוק **שווה לממוצע**.

שינוי בערכים וציוני התקן

עוד תופעה מעניינת ושימושית היא העובדה שאם נעשה טרנספורמציה לינארית על הערכים (זה אולי נשמע כמו שם של מחלה אבל זה לא – זה חיבור/חיסור/כפל/חילוק) ציון התקן של התצפית לא ישתנה. ציון התקן של אריק בכימיה אורגנית הוא כזכור $Z=6$, אבל המרצה נתן בונוס של 10 נקודות לכל הציונים בגלל אחוז הנכשלים הגבוה. מה יהיה ציון התקן החדש של אריק?

ציון התקן של אריק לא ישתנה.

ואם המרצה היה מוסיף לכל הציונים בונוס של 10%? עדיין הציון של אריק היה נשמר. ואם המרצה היה מכפיל את כל הציונים פי 2? הבנתם את הרעיון.

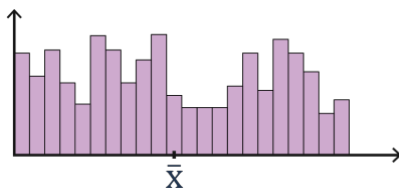
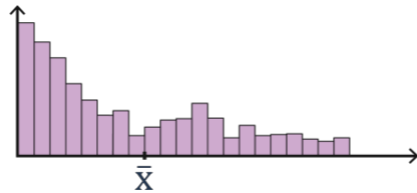
אבל אם המרצה היה מוסיף נקודות רק לציונים שמתחת ל-55? אז כבר לא טרנספורמציה לינארית, זו מחלה אחרת. ולכן במקרה הזה ציון התקן של אריק היה משתנה.

דגש אחרון

בדוגמה שהבאנו ידענו מהו הציון של אריק ($x_1 = 65$) הממוצע ($\bar{x} = 53$), וסטית התקן ($s = 2$), ומתוכם חישבנו את ציון התקן. לא תמיד זה יהיה המקרה, לפעמים נקבל גדלים אחרים בנוסחה, ונצטרך לחשב מתוכה את סטית התקן, או את הממוצע או את הציון עצמו.

א. הבנה של ציוני תקן בסיוע גרף

1. המורה חישב את ציוני התקן של ארבעה תלמידים בשני מבחנים. בכל אחד מהסעיפים הבאים מתואר גרף התפלגות. סמנו על גבי הגרף את מיקומם של ארבעת הילדים בצורה משוערת.



א.

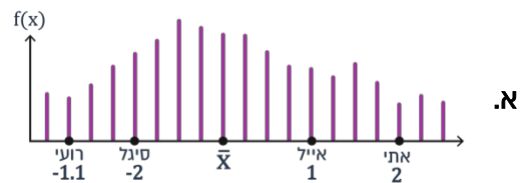
התלמיד	ציון התקן
אורי	2.5
בני	-1.5
גלעד	0
דוד	-0.5

ב.

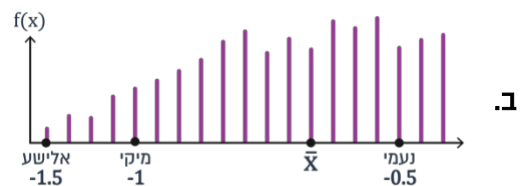
התלמיד	ציון התקן
אורי	1.2
בני	3
גלעד	-2.4
דוד	-1

2. בגרפים הבאים מופיעים ילדים וציוני התקן שלהם. בחלקם נפלה טעות בציוני התקן, סמנו את הטעות והסבירו.

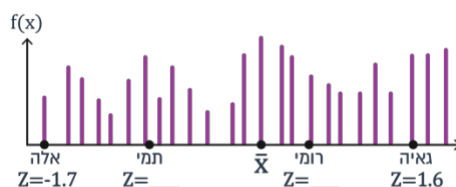
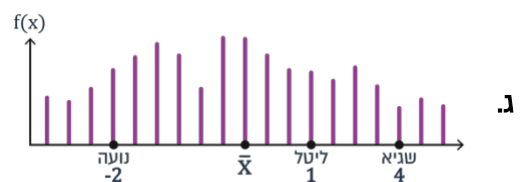
הסבר _____



הסבר _____

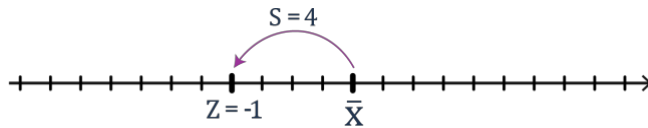


הסבר _____

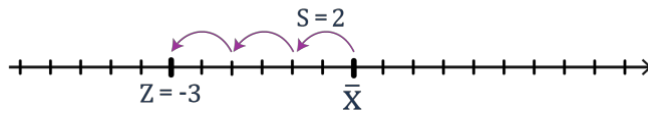


3. בגרף הבא מופיעים ילדים וציוני התקן שלהם. ציוני התקן של תמי ורומי נשמטו. הציעו ערך אפשרי לציון התקן שלהן.

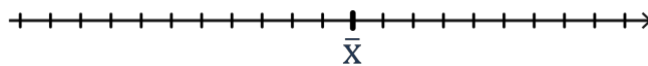
4. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתון גרף. סמנו נקודות מתאימות על גבי השרטוט לפי ההוראות בכל סעיף.



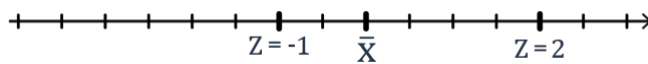
א. סמנו את ציוני התקן
 $z = 1$ $z = 1.5$ $z = -2$



ב. סמנו את ציוני התקן
 $z = 1.5$ $z = 3$ $z = -5$



ג. ידוע כי סטיית התקן היא 1.5.
 סמנו את ציוני התקן
 $z = -2$ $z = 3$ $z = -5$



ד. (1) חשבו את סטיית התקן
 (2) הוסיפו את ציוני התקן
 $z = 1.5$ $z = 3$

ב. חישוב ציוני תקן בעזרת הנוסחה: $Z = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$

5. המורה ערכה שני מבחנים בכיתה, במתמטיקה ובאנגלית, וחישבה את הממוצע ואת סטית התקן בכל מבחן. חשבו בעזרת הנתונים את ציוני התקן של התלמידות הבאות:

מבחן באנגלית	מבחן במתמטיקה
הממוצע 82 וסטית התקן 2	ממוצע 75 וסטית התקן 5
רונה קיבלה 88, ציון התקן שלה: _____	רונה קיבלה 88, ציון התקן שלה: _____
אליה קיבלה 80, ציון התקן שלה: _____	אליה קיבלה 75, ציון התקן שלה: _____
גאיה קיבלה 90, ציון התקן שלה: _____	גאיה קיבלה 90, ציון התקן שלה: _____
נעמה קיבלה 65, ציון התקן שלה: _____	נעמה קיבלה 65, ציון התקן שלה: _____

השוו את ציוני התקן של כל תלמידה בשני המקצועות, וקבעו עבור כל תלמידה אם היא טובה יותר באנגלית או במתמטיקה:

_____ גאיה טובה יותר ב-_____

_____ רונה טובה יותר ב-_____

_____ נעמה טובה יותר ב-_____

_____ אליה טובה יותר ב-_____

6. ידוע כי יעל קיבלה 86 בכל המבחנים שניגשה אליהם.

א. קבעו על כי נתוני המבחנים הבאים מהם ציוני התקן של יעל בכל מבחן.

מבחן בלשון: הממוצע 81 וסטית התקן 1	ציון התקן של יעל _____
מבחן בספרות: הממוצע 92 וסטית התקן 3	ציון התקן של יעל _____
מבחן ביהדות: הממוצע 80 וסטית התקן 1.5	ציון התקן של יעל _____
מבחן בפיסיקה: הממוצע 76 וסטית התקן 4	ציון התקן של יעל _____
מבחן בחינוך גופני: הממוצע 95 וסטית התקן 1.2	ציון התקן של יעל _____

ב. באיזה מבחן יעל הצליחה במידה הרבה ביותר? _____

באיזה מבחן יעל הצליחה במידה המועטה ביותר? _____

ג. חישוב ממוצע, סטיית תקן, ציון אמיתי וציון תקן בעזרת הנוסחה

7. להלן נתונים הנוגעים למשקל החבילות שנשלחות בדואר.

בכל שורה מופיעים 3 נתונים מבין ממוצע, סטיית תקן, ציון גלם וציון תקן, ויש להשלים את הנתון החסר באמצעות הנוסחה.

z ציון תקן	x_1 ציון גלם (אמיתי)	s סטית תקן	$\bar{x}$ ממוצע	
	24	4	21	א.
-2.25		6	31.5	ב.
1.4	14.1	1.5		ג.
-2	3.5		8	ד.
	37.4	2	40	ה.
-2.5	12		22	ו.
2.5		0.8	16	ז.
-0.2	3.9	3		ח.

יחידה שניה

התפלגויות רציפות



משתנה בדיד ורציף

עד כה עסקנו בעיקר משתנים בדידים, למשל: מספר ילדים במשפחה, מספר מרפסות בדירה, מספר מכוניות ברחוב וכו'. אולם משתנים רבים בעולם הם רציפים – למשל משקל, גובה, טמפרטורה, ועוד.

משתנה בדיד משתנה שבין כל שני ערכים סמוכים שלו (ילד אחד, שני ילדים) אין ערכים נוספים.

משתנה רציף משתנה שבין כל שני ערכים שלו (1.70 ס"מ, 1.71 ס"מ) יש אינסוף ערכים נוספים אפשריים. את המשתנה הבדיד קל מאוד למדוד, ולספור את ערכי המשתנה: ילד אחד, שני ילדים, שלושה ילדים... אבל במשתנה רציף זה מסובך יותר.

למשל, אחות בית הספר מדדה את גובהם של כל ילדי כיתה ט' בתיכון בנתניה, ורשמה את הנתונים במחברתה, בין היתר כתבה שם: יונית – 163 ס"מ.

האם הגובה של יונית הוא 163 ס"מ? בדיוק? או שאולי היא בעצם 163.001 ס"מ? או 163.00138627 ס"מ? קשה להיות בטוחים מהו הערך המדויק של גובהה של יונית. והאמת היא, שזה בעיקר תלוי עד כמה מכשיר המדידה של האחות הוא מדויק.

אבל יונית היא רק דוגמה שמסקפת בעיה רחבה יותר – למעשה קשה ואף בלתי אפשרי למדוד בצורה מדויקת משתנה רציף, כי תמיד אפשר לדייק את המדידה עוד ועוד עד אינסוף.

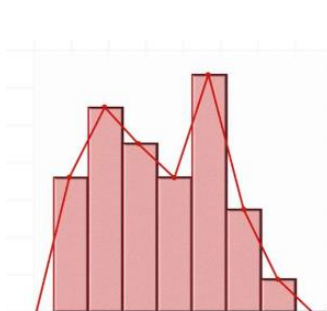
כדי לפתור את הבעיה הזו לא נתייחס לערכים נקודתיים במשתנים רציפים, אלא אך ורק לטווח של ערכים. בדוגמה שלפנינו, נאמר שהגובה של יונית נמצא בטווח שבין 162.5 ס"מ ל-163.5 ס"מ.

ייצוג גרפי של משתנה רציף

כשעסקנו במשתנה בדיד, תיארנו את השכיחות שלו בטבלת שכיחויות, ועל פיה בנינו דיאגרמת עמודות. ניתן לראות שבין העמודות בטבלה יש מרווחים – כי אין למשתנה רציפות.

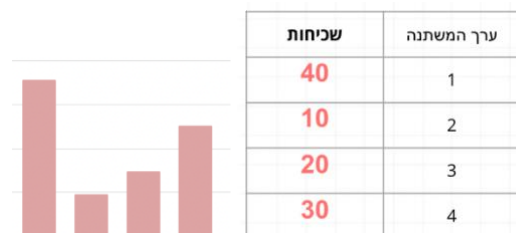
מאידך, כאשר נעבור לתאר משתנה רציף – לא יהיו יותר רווחים בין הערכים... כי המשתנה רציף! כדי לייצג את המשתנה ראשית נבנה את הטווחים בטבלה, ואז נציג אותם בייצוג גרפי שנקרא היסטוגרמה:

משתנה רציף



שכיחות	ערכי המשתנה
40	0.5-1.5
60	1.5-2.5
50	2.5-3.5
42	3.5-4.5
75	4.5-5.5
35	5.5-6.5
12	6.5-7.5

משתנה בדיד

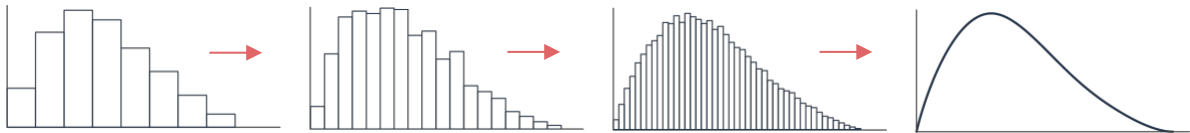


שכיחות	ערך המשתנה
40	1
10	2
20	3
30	4

ניתן לראות בגרפים, שבדיאגרמת עמודות יש "מרחקים" בין עמודה לעמודה, אבל בהיסטוגרמה העמודות צמודות זו לזו. וזה גם הגיוני – במשתנה הרציף, אין רווחים בין ערך לערך – יש רציפות.

מהיסטוגרמה לעקומה רציפה (עקומה חלקה)

היסטוגרמה היא צורת הצגה שמתאימה בעיקר למדגמים קטנים. אבל אם נרצה לתאר אוכלוסיות בצורה כללית יותר, כלומר כאשר נרצה לתאר כיצד נראית ההתפלגות הכללית של האוכלוסיה, עלינו למצוא את הפונקציה הכללית של התפלגות האוכלוסיה. כדי לתאר פונקציה זו יש להקטין עוד ועוד את רוחב העמודות – ככל שנקטין אותן נקבל התפלגות עם פחות "קפיצות", עד שנקבל התפלגות חלקה לגמרי, כלומר עקומה רציפה.



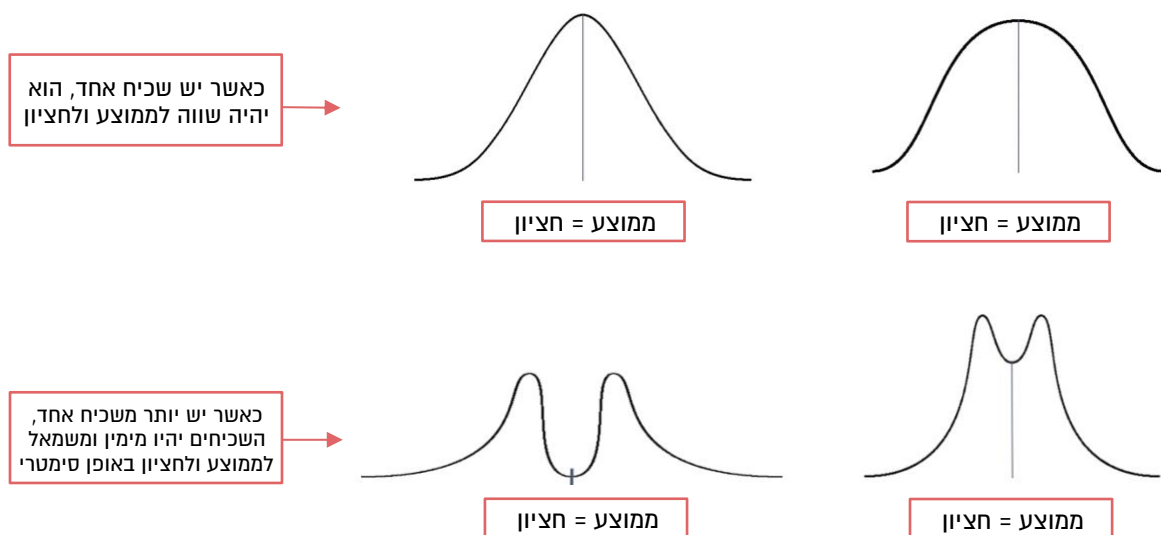
ההתפלגות שתתקבל בסוף היא למעשה פונקציה, אשר מתארת את ריכוז הערכים בכל אזור בגרף.

דגשים

1. התפלגויות רציפות נקראות "התפלגות צפיפות" או "התפלגות הסתברות" והן מתארות את צורת הפיזור של ערכי המשתנה באוכלוסיה. במילים פשוטות יותר, הן מעין "רנטגן" של האוכלוסיה כולה: בעזרתן ניתן למשל לקבוע כמה אחוז מהאוכלוסיה נמצאים בין גובה 1.70 לגובה 1.72, או איזה אחוז מהאוכלוסיה צפוי לפרוש לפנסיה בין הגילאים 65-67. וגם – מה הסיכוי שאדם יפתח מחלת לב בין הגילאים 50-55?
במילים אחרות, בעזרת התפלגות רציפה ניתן לקבל תשובות לשאלות פרקטיות ומעשיות בעולם סביבנו.
2. התפלגויות רציפות שנעסוק בהן תמיד מציגות שטח של 100% בין העקומה לבין ציר ה-x.

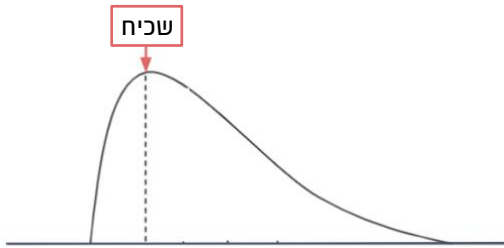
התפלגויות סימטריות ומיקום מדדי המרכז

בהתפלגויות סימטריות, פיזור הערכים מעל ומתחת למרכז ההתפלגות הוא זהה לחלוטין, זו תמונת מראה ממש. לכן, החציון והממוצע נמצאים במרכז ההתפלגות, באותה נקודה:



התפלגויות א-סימטריות ומיקום מדדי המרכז

במצב שבו ההתפלגות אינה סימטרית, מדדי המרכז יתחילו להתרחק זה מזה, וכבר לא יהיו באותה הנקודה במרכז ההתפלגות. לפנינו התפלגות **א-סימטרית עם זנב ימני**. ניתן לראות שבהתפלגות זו רוב הערכים נמוכים, ויש זנב ארוך של ערכים גדולים יותר ויותר שנמצאים מימין. נמצא את מיקום מדדי המרכז בהתפלגות זו:

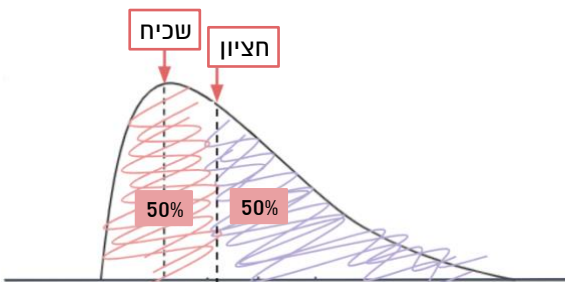


1. ראשית נמקם את השכיח.

השכיח יימצא בנקודה הגבוהה ביותר!
תמיד הכי קל וכשוט למצוא את השכיח:

2. איפה יהיה החציון?

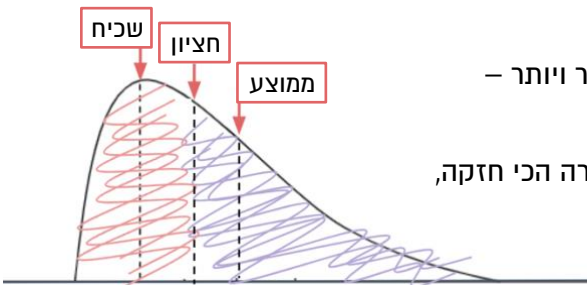
החציון מחלק את ההתפלגות לשני חלקים שווים בשטחם:
50% מהערכים עד לנקודת החציון,
ו-50% מהערכים מנקודת החציון ועד לסוף ההתפלגות.
במקרה הזה עלינו למקם את החציון מעט ימינה מהשכיח:



3. לבסוף הממוצע:

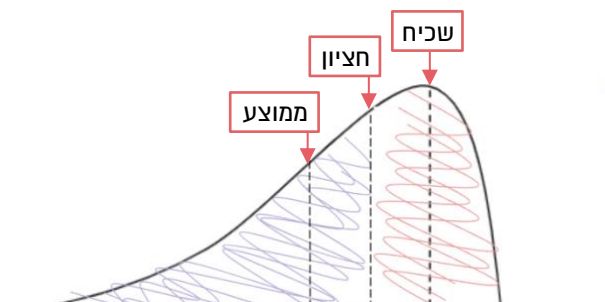
הממוצע הוא מדד המרכז הרגיש ביותר בהתפלגות.
מה זה אומר?

שככל שנרחיק את הערכים "בזנב" של ההתפלגות ימינה יותר ויותר –
הממוצע יושפע בצורה מאוד משמעותית.
הערכים הקיצוניים שנמצאים מימין, ימשכו אותו אליהם בצורה הכי חזקה,
והוא יתרחק עוד ימינה ביחס לחציון:



שימו לב:

כאשר ההתפלגות א-סימטרית שלילית
(כלומר התפלגות א-סימטרית עם זנב שמאלי) היחס בין
המדדים יתהפך יחד עם כיוון ההתפלגות:



א. מיקום מדדי המרכז בהתפלגויות

1. לפניכם שתי התפלגויות שמציגות את גובה הטמפרטורה היומית שנמדדה בשתי מדינות שונות, בין השנים 1990-2012. נתון כי בשתי ההתפלגויות השכיח הוא 36° מעלות.

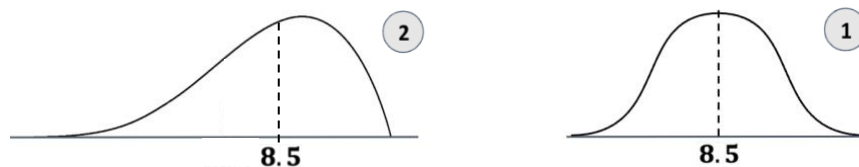


- א. האם נכון לומר שגם החציון בשתי ההתפלגויות שווה ל- 36° ?
כן. / לא. נמקו תשובתכם _____
- ב. האם נכון לומר שהממוצע בשתי ההתפלגויות שווה ל- 36° ?
כן. / לא. נמקו תשובתכם _____
- ג. האם נכון לומר שבהתפלגות 2 הממוצע גדול מהחציון?
כן. / לא. נמקו תשובתכם _____
- ד. סמנו על גבי ההתפלגויות את הממוצע, השכיח והחציון (מיקום משוער)

2. לפניכם שתי התפלגויות שמציגות את גובה השכר בשני מפעלים שונים.

השכר החציוני בשני המפעלים הוא 8.5 אלף ₪.

סמנו ליד כל אחד מהמשפטים הבאים אם הוא נכון ב כרח, לא נכון בהכרח, או שאי אפשר לדעת.



- | | |
|---|-------------------------------|
| א. בהתפלגות 1 כל מדדי המרכז שווים זה זה | נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת |
| ב. הממוצע זהה בשתי ההתפלגויות | נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת |
| ג. בהתפלגות 2 הממוצע קטן מהשכיח | נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת |
| ד. בהתפלגות 2 החציון קטן מהממוצע | נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת |
| ה. הממוצע בהתפלגות 1 גדול מהשכיח בהתפלגות 2 | נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת |
| ו. השכיח בהתפלגות 2 שווה ל- 10 אלף ₪ בחודש | נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת |
| ז. השכיח בהתפלגות 2 שווה ל- 8 אלף ₪ בחודש | נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת |

יחידה שלישית

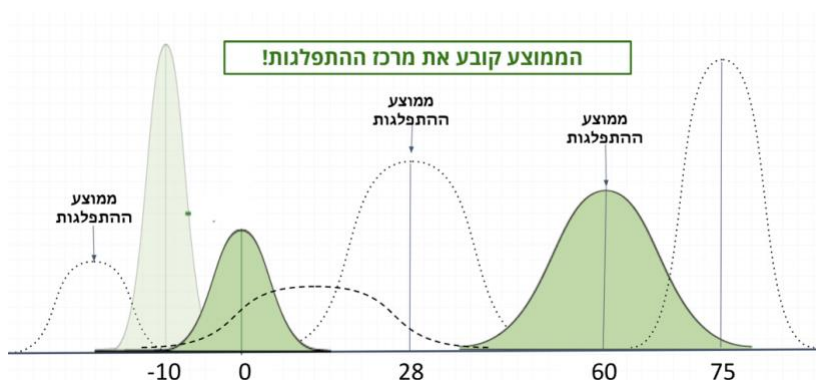
משפחת ההתפלגויות הנורמליות



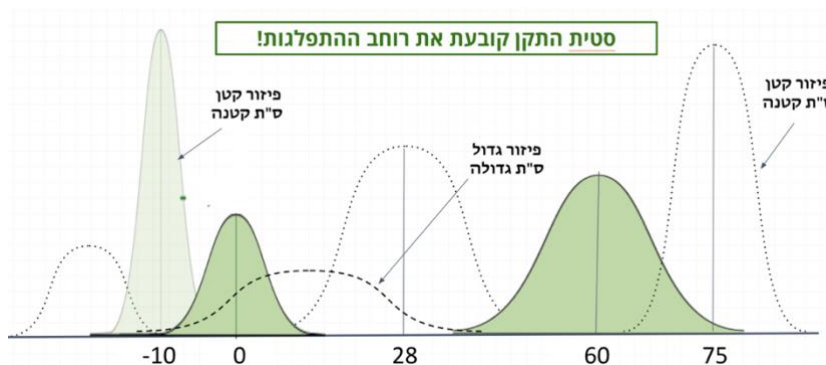
התפלגות נורמלית

מתוך כלל ההתפלגויות הרציפות, יש אחת שהיא המוכרת ביותר בעולם - ההתפלגות הנורמלית. ההתפלגות הנורמלית מסייעת בתיאור של תופעות רבות סביבנו, והיא מאפשרת לבצע מחקרים סטטיסטיים ולהסיק מהם מסקנות.

לפניכם התפלגויות נורמליות שונות:



ניתן לראות בשרטוט כי קיימות התפלגויות נורמליות רבות. את מיקומה של ההתפלגות על ציר ה-X קובע הממוצע.

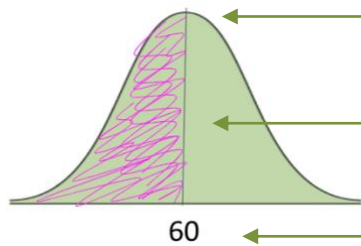


הפיזור של התצפיות סביב הממוצע מחושב על ידי סטית התקן. בהתפלגות נורמלית, סטית התקן קובעת את רוחב הפעמון - ככל שסטית התקן גדולה יותר רוחב הפעמון גדול יותר, ולהיפך.

דגשים חשובים:

1. ההתפלגות סימטרית.
 2. מאחר שההתפלגות היא סימטרית: הממוצע, החציון והשכיח שווים זה לזה.
 3. ככל שמתרחקים מהמרכז צפיפות הערכים (ריכוז הערכים) הולכת ויורדת.
 4. שטחה של ההתפלגות הנורמלית הוא 1.
- נבטא שטח זה באחוזים, כלומר השטח בין ההתפלגות לבין ציר ה-x הוא 100%.

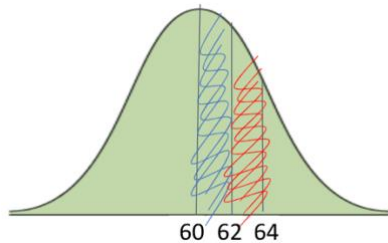
נדגים את תכונות ההתפלגות הנורמלית



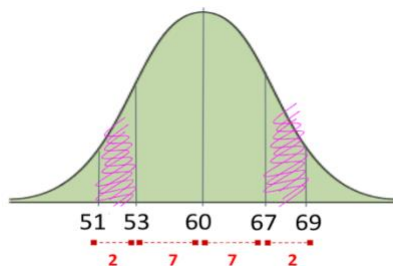
הנקודה הגבוהה ביותר נמצאת במרכז ההתפלגות
לכן שם נמצא השכיח.

השטח מימין ומשמאל למרכז ההתפלגות שווה ל-50%
לכן החציון נמצא במרכז.

ההתפלגות סימטרית לכן הממוצע
נמצא בדיוק במרכז ההתפלגות



ככל שנתרחק מהממוצע כמות הערכים תלך ותרד –
לכן ניתן לקבוע כי השטח בין 60-62 גדול יותר
מהשטח בין 62-64.



סימטריה שני השטחים הצבועים זהים זה לזה!
ניתן לראות כי הם נמצאים במרחק שווה מהממוצע,
כלומר הם סימטריים ביחס לממוצע.

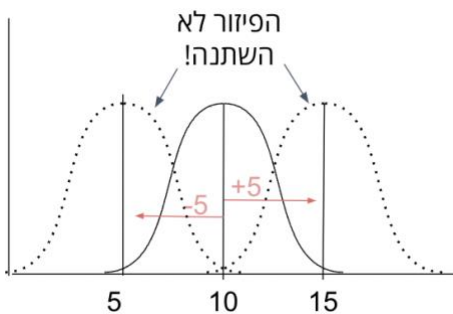
טרנספורמציות על פונקציות רציפות

א. הוספה והכפלה

בהוספה של קבוע לכל ערכי ההתפלגות, למשל כל ערכי
ההתפלגות גדלו ב-5, ההתפלגות כולה תזוז 5 יחידות ימינה לאורך
ציר ה-x.

מכאן, שגם השכיח, החציון והממוצע יגדלו ב-5.

עם זאת חשוב לשים לב שהפיזור לא ישתנה, כלומר סטית התקן
תישאר כשהיתה.



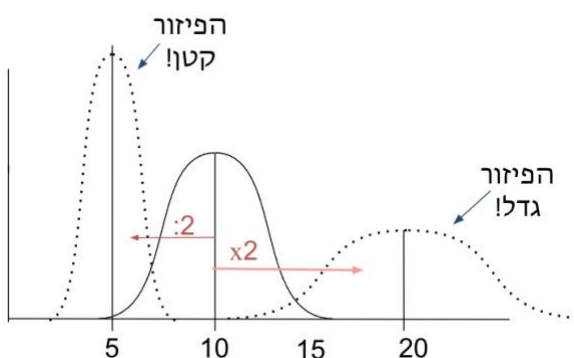
ב. הכפלה וחלוקה

בהכפלה של כל ערכי ההתפלגות כמובן שכולם יגדלו.
ויחד איתם יגדלו השכיח, החציון והממוצע. בדומה
להוספה והכפלה, גם בהכפלה ההתפלגות תנוע לאורך
ציר ה-x.

אבל בהכפלה קורה משהו נוסף: הפיזור של הערכים
סביב הממוצע גדל. כלומר לא רק הערכים עצמם גדלים,
אלא גדל גם המרחק שלהם מהמרכז, ואחד מהשני.
לכן ברור מדוע במצב כזה סטית התקן תגדל, כלומר
רוחב הפעמון של ההתפלגות יגדל.

אבל מדוע גובה הפעמון קטן?

חשוב לזכור - מאחר ששטח ההתפלגות חייב להישמר (הוא תמיד מייצג 100%), ומאחר שהרוחב גדל,
הגובה חייב לרדת...



- א. מצורפת נוסחת ההתפלגות הנורמלית. אין צורך לזכור או לדעת אותה, אך היא מצורפת כדי שנשים לב שההתפלגות הנורמלית היא לא משיכת עט אקראית אלא פונקציה מורכבת למדי:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- ב. חשוב לזכור שההתפלגות הנורמליות היא למעשה פונקציה תיאורטית, כלומר לא התפלגות שהתקבלה על בסיס קבוצת תצפיות אמיתית שדגמנו מתוך האוכלוסיה. בקבוצת תצפיות אמיתית שדגמנו מתוך האוכלוסיה נקבל לרוב היסטוגרמה "ששואפת לנורמליות". ככל שנדגום קבוצה גדולה יותר מתוך האוכלוסיה, ובהנחה שהמשתנה מתפלג נורמלית באוכלוסיה, תתקבל התפלגות שהולכת ומתקרבת להתפלגות התיאורטית. אולם, ברוב השאלות שבפרק זה וגם בבגרות - נזניח הבדל זה שבין המדגם והאוכלוסיה, ובמדגמים "גדולים" נתיחס למדגם עצמו כאילו הוא באמת מתפלג נורמלית.

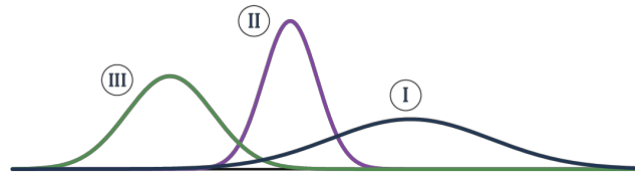
- ג. ההתפלגות הנורמלית היא אין סופית משני צדדיו של הממוצע, ונמשכת בצורה אסימפטוטית לציר ה-x. לרוב נזניח את החלקים שמרוחקים יותר מ-3 סטיות תקן מימין ומשמאל לממוצע, שכן הם ניתנים להזנחה.

- ד. שימו לב שנעסוק אך ורק בהתפלגויות ששטחן מייצג 100% מהמקרים. התפלגויות אלו נקראות "התפלגויות הסתברות" והשטח שלהן מייצג את הסיכוי או ההסתברות לקבל את ערכי המשתנה.

- ה. קיימות גם התפלגויות נורמליות ששטחן משקף שכיחות "אמיתית" ולא יחסית, כלומר התפלגויות ששטחן משקף את גודל האוכלוסיה ממש (למשל, ניתן ליצור התפלגות לתיאור גובה האוכלוסייה ביבשת אמריקה, שבה שטח ההתפלגות הנורמלית ישקף את גודל האוכלוסיה ביבשת אמריקה שהיא 1,035,298,985 איש) הבדל זה בין התפלגויות שונות מקביל לשוני שיש בין טבלת שכיחות וטבלת שכיחות יחסית.

א. ממוצע וסטיית תקן בהתפלגות נורמלית

1. התבוננו בגרפים של ההתפלגויות הנורמליות הבאות, וענו על הסעיפים הבאים:



- ההתפלגות בעלת הממוצע הגדול ביותר היא _____
- ההתפלגות בעלת הממוצע הקטן ביותר היא _____
- ההתפלגות בעלת סטיית התקן הגדולה ביותר היא _____
- ההתפלגות בעלת סטיית התקן הקטנה ביותר היא _____

2. ידוע כי גבהים מתפלגים נורמלית. ממוצע הגבהים במדינות אסיה נמוך מממוצע הגבהים במדינות אירופה, וסטיית התקן של התפלגות הגבהים באסיה קטנה מסטיית התקן באירופה. נתונה התפלגות הגבהים באסיה:



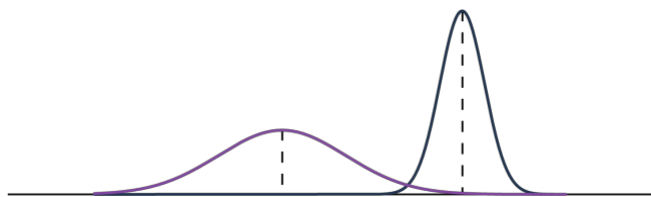
- שרטטו בקו חופשי את התפלגות הגבהים באירופה.
- ידוע כי בצפון אמריקה ממוצע הגבהים גבוה יותר מאשר באסיה ואירופה, וגם סטיית התקן גדולה יותר. שרטטו בקו חופשי את התפלגות הגבהים בצפון אמריקה.
- במקסיקו סטיית התקן של הגבהים היא הקטנה ביותר, ואנשים בה הנמוכים ביותר. הוסיפו את התפלגות הגבהים במקסיקו.

3. נבדקה טמפרטורת הגוף של האדם ביחס לחיות שונות: כלבים, חתולים וציפורים. (כל הטמפרטורות שנבדקו מתפלגות נורמלית). נמצא כי טמפרטורת הגוף של האדם נמוכה מזו של כלבים, וסטיית התקן של גוף האדם קטנה יותר מזו של כלבים. מתוארת ההתפלגות של טמפרטורת הגוף של הכלבים, הוסיפו לגרף ביד חופשית את ההתפלגות של בני האדם.



- טמפרטורת הגוף של חתולים גבוהה מזו של כלבים, וסטיית התקן שלה גדולה יותר. הוסיפו לגרף ביד חופשית את ההתפלגות של החתולים.
- טמפרטורת הגוף של ציפורים היא הגבוהה ביותר מבין החיות שנבדקו. עם זאת סטיית התקן שלה קטנה יותר מזו של בני האדם. הוסיפו לגרף ביד חופשית את ההתפלגות של ציפורים.

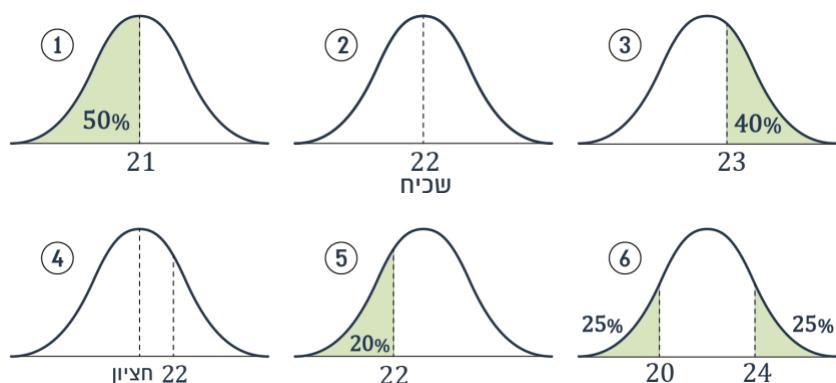
4. ידוע כי משתנה הטמפרטורה מתפלג נורמלית: נבדקה הטמפרטורה הממוצעת בצפון רוסיה, לעומת ההתפלגות הממוצעת באזור קו המשווה.
- נמצא כי הטמפרטורה הממוצעת בצפון רוסיה נמוכה מאוד, ובקו המשווה הטמפרטורה גבוהה יותר, עוד נמצא סטית התקן בצפון רוסיה גדולה יותר. נתונות ההתפלגויות של הטמפרטורות הממוצעות בשני האזורים:



- א. סמנו על כל גרף איזה אזור הוא מייצג.
- ב. ידוע כי הטמפרטורה הממוצעת בישראל גבוהה מאשר בצפון רוסיה, אך נמוכה מאזור קו המשווה. עוד ידוע כי סטית התקן בישראל קטנה מצפון רוסיה, אך גדולה מאזור קו המשווה. ציירו ביד חופשית את ההתפלגות של ישראל.

ב. תכונות ההתפלגות הנורמלית

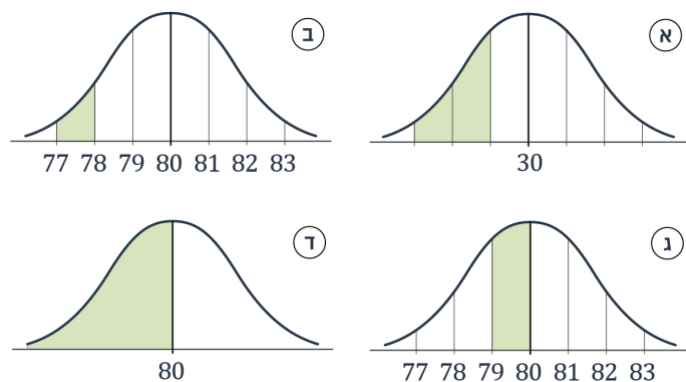
5. נתונה התפלגות נורמלית, שהממוצע שלה 22.
- א. אילו מהגרפים הבאים עשוי להתאים לנתון?
- ב. הסבירו עבור כל אחד מהשרטוטים שפסלתם מדוע הוא אינו מתאים לנתונים.



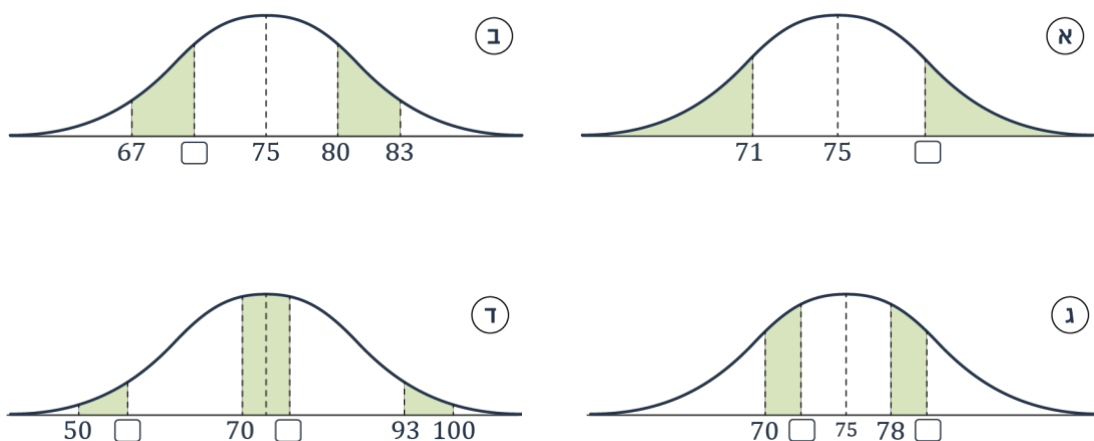
6. לפניכם התפלגויות נורמליות, ומסומנים בהם 2 שטחים.
- קבעו בכל אחת מההתפלגויות הבאות האם שטח I גדול/קטן/זהה לשטח II, נמקו.



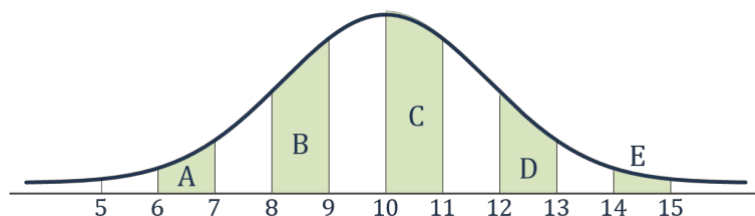
7. בהתפלגויות הבאות הממוצע הוא 80, ובכל אחת מהן מסומן שטח כלשהו משמאל לממוצע. סמנו מימין לממוצע שטח זהה לשטח המסומן.



8. בהתפלגויות הבאות הממוצע הוא 75, ובכל אחת מהן מסומנים שני שטחים שווים. בהסתמך על הסימטריה של ההתפלגות הנורמלית, כתבו ערך מתאים בריבוע הריק.



9. נתונה התפלגות נורמלית עם ממוצע 10, מסומנים בה 5 שטחים.



א. קבעו בכל אחד מהזוגות הבאים איזה שטח גדול יותר:

A _____ B ■

A _____ E ■

C _____ B ■

D _____ A ■

ב. איזה מהשטחים הוא הגדול ביותר?

ג. איזה מהשטחים הוא הקטן ביותר?

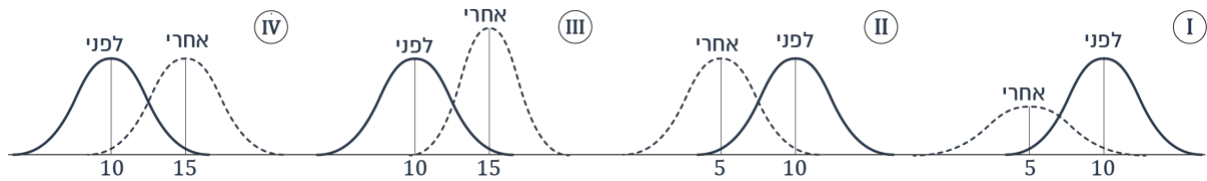
ד. סדרו את השטחים מהקטן לגדול.

ג. טרנספורמציות על התפלגות נורמלית

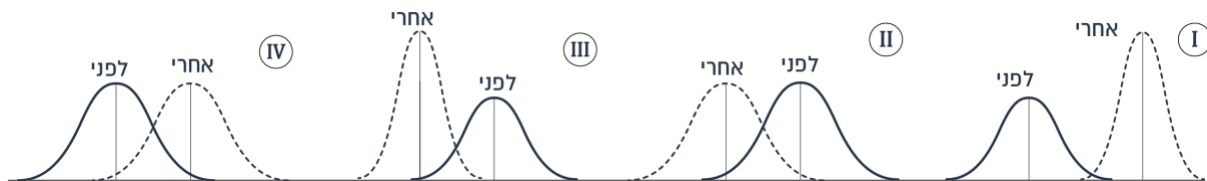
10. נתונות התפלגויות שונות.

בכל אחד מהסעיפים הבאים ערכו שינוי על כל ערכי ההתפלגות.
בחרו מיהו הגרף המתאר את ההתפלגות לפני השינוי ואחריו, נמקו את בחירתכם.

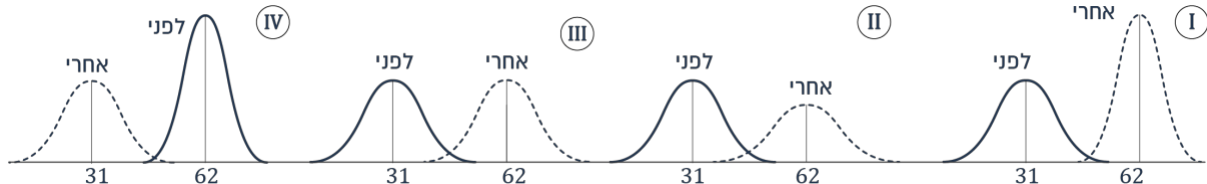
א. הוספת 5



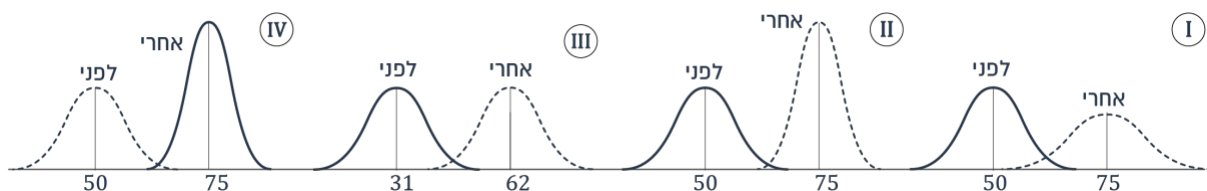
ב. ירידה ב-35%



ג. הכפלה פי 2



ד. תוספת של 50%



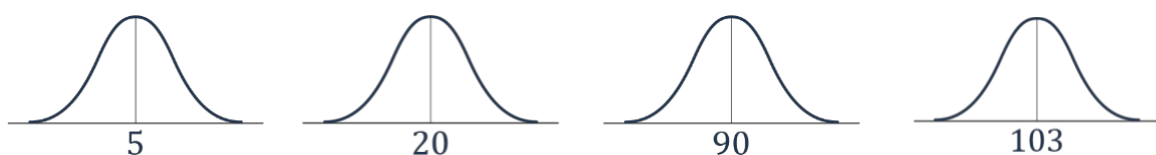
11. בכל אחד מהסעיפים הבאים ערכו שינוי על כל ערכי ההתפלגות.
הוסיפו ביד חופשית את הגרף המתאר את ההתפלגות לאחר השינוי.

א. הפחתה של 10

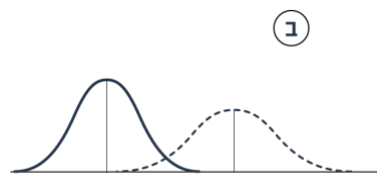
ב. הפחתה של 50%

ג. תוספת של 2

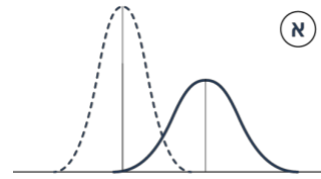
ד. הכפלה פי 2



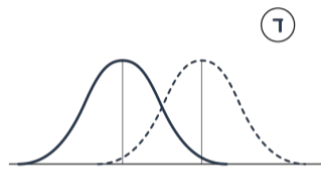
12. בכל אחד מהסעיפים מתוארת התפלגות שעברה טרנספורמציה.
הגרף החלק מתאר את ההתפלגות לפני השינוי, והמקווקו אחרי השינוי.
קבעו בכל סעיף איזו טרנספורמציה בוצעה.



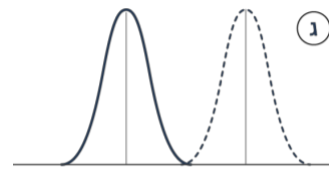
הוספה / הפחתה / הכפלה / חלוקה



הוספה / הפחתה / הכפלה / חלוקה



הוספה / הפחתה / הכפלה / חלוקה



הוספה / הפחתה / הכפלה / חלוקה

יחידה רביעית

התפלגות נורמלית וטבלת z



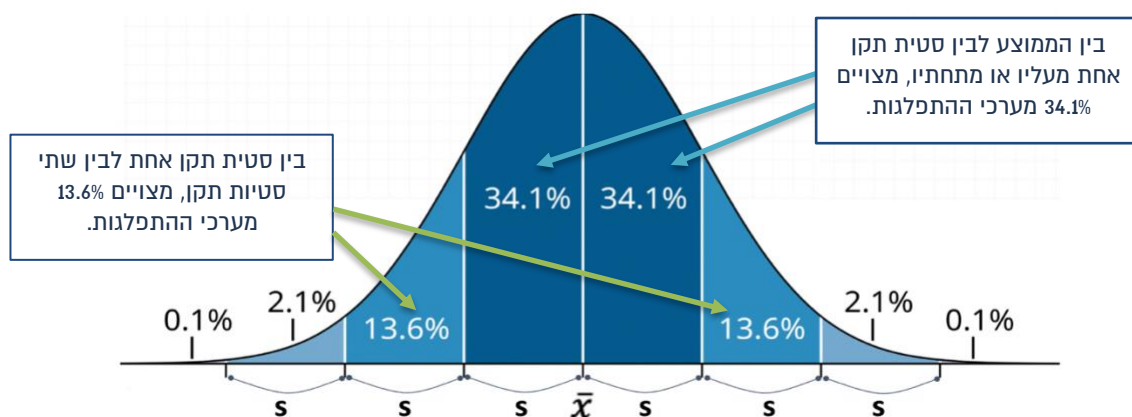
הסבר על טבלת ציוני Z

בפרק הקודם הכרנו את ההתפלגות הנורמלית ואת התכונות שלה. ראינו שההתפלגות סימטרית, ולכן לפעמים ניתן להסיק על שטחים בהתפלגות גם בלי לחשב אותם. למשל - אם השטחים סימטריים ביחס למרכז ההתפלגות, נוכל לקבוע כי הם שווים זה לזה ללא חישוב.

בחלק זה נלמד לחשב שטחים בהתפלגות הנורמלית בצורה מדויקת יותר. כדי לעשות זאת עלינו להרחיב את הידע שלנו לגבי השטחים מתחת לעקומת ההתפלגות.

באיור הבא נתונה התפלגות נורמלית כלשהי. נוכל לראות שאם אנחנו מתרחקים מהממוצע במרחקים קבועים, במקרה זה "בקפיצות" של סטיות תקן - מתקבלים שטחים קבועים מימין ומשמאל לממוצע.

למשל, אם נתרחק מהממוצע סטית תקן אחת ימינה (או שמאלה) נקבל שטח של 34.1%. ואם נתקדם מסטית תקן אחת לשתי סטיות תקן מהממוצע - נראה שמתקבל שטח של 13.6%.



חשוב: התופעה הזו מתקיימת בכל ההתפלגויות הנורמליות בעולם, ואינה תלויה בממוצע הספציפי או בסטיית התקן של ההתפלגות!

אבל.... "הקפיצות" במרחקים של סטיות תקן הן קצת מוגבלות... הרי לא תמיד נרצה להתרחק מהממוצע בדיוק בסטית תקן. לפעמים נרצה להתרחק רק רבע סטית תקן מהממוצע. לפעמים שליש סטית תקן. ולפעמים בכלל נרצה לבדוק את הכיוון ההפוך - כלומר כמה צריך להתרחק מהממוצע כדי לתחום שטח של 20%?

אם כן, אנחנו צריכים כלי שאם נזין בו את המרחק מהממוצע הוא יחזיר לנו חזרה את השטח מתחת לעקומה. או להיפך - אם נזין בו את השטח שאנחנו רוצים, נניח 25% מתחת לממוצע, הוא יחזיר לנו חזרה כמה עלינו להתרחק מהממוצע. הכלי הזה הוא טבלת Z.

בשורה זו מופיעה
הספרה השניה
בציין Z

טבלת התפלגות נורמלית

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0046	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0135	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0227	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0238	0.0233
-1.8	0.0359	0.0350	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0550	0.0540	0.0530	0.0520	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0670	0.0650	0.0640	0.0630	0.0620	0.0610	0.0590	0.0580	0.0570	0.0560
-1.4	0.0810	0.0790	0.0780	0.0760	0.0750	0.0740	0.0720	0.0710	0.0690	0.0680
-1.3	0.0970	0.0950	0.0930	0.0920	0.0900	0.0890	0.0870	0.0850	0.0840	0.0820
-1.2	0.1150	0.1130	0.1110	0.1090	0.1070	0.1060	0.1040	0.1020	0.1000	0.0980
-1.1	0.1360	0.1340	0.1310	0.1290	0.1270	0.1250	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1590	0.1560	0.1540	0.1520	0.1490	0.1470	0.1450	0.1420	0.1400	0.1380
-0.9	0.1840	0.1810	0.1790	0.1760	0.1740	0.1710	0.1680	0.1660	0.1630	0.1610
-0.8	0.2120	0.2090	0.2060	0.2030	0.2000	0.1980	0.1950	0.1920	0.1890	0.1870
-0.7	0.2420	0.2390	0.2360	0.2330	0.2300	0.2270	0.2240	0.2210	0.2180	0.2150
-0.6	0.2740	0.2710	0.2680	0.2640	0.2610	0.2580	0.2550	0.2510	0.2480	0.2450
-0.5	0.3080	0.3050	0.3010	0.2980	0.2950	0.2910	0.2880	0.2840	0.2810	0.2780
-0.4	0.3450	0.3410	0.3370	0.3340	0.3300	0.3260	0.3230	0.3190	0.3160	0.3120
-0.3	0.3820	0.3780	0.3750	0.3710	0.3670	0.3630	0.3590	0.3560	0.3520	0.3480
-0.2	0.4210	0.4170	0.4130	0.4090	0.4050	0.4010	0.3970	0.3940	0.3900	0.3860
-0.1	0.4600	0.4560	0.4520	0.4480	0.4440	0.4400	0.4360	0.4320	0.4290	0.4250
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4800	0.4760	0.4720	0.4680	0.4640
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5200	0.5240	0.5280	0.5320	0.5360
0.1	0.5400	0.5440	0.5480	0.5520	0.5560	0.5600	0.5640	0.5680	0.5710	0.5750
0.2	0.5790	0.5830	0.5870	0.5910	0.5950	0.5990	0.6030	0.6060	0.6100	0.6140
0.3	0.6180	0.6220	0.6250	0.6290	0.6330	0.6370	0.6410	0.6440	0.6480	0.6520
0.4	0.6550	0.6590	0.6630	0.6660	0.6700	0.6740	0.6770	0.6810	0.6840	0.6880
0.5	0.6920	0.6950	0.6990	0.7020	0.7050	0.7090	0.7120	0.7160	0.7190	0.7220
0.6	0.7260	0.7290	0.7320	0.7360	0.7390	0.7420	0.7450	0.7490	0.7520	0.7550
0.7	0.7580	0.7610	0.7640	0.7670	0.7700	0.7730	0.7760	0.7790	0.7820	0.7850
0.8	0.7880	0.7910	0.7940	0.7970	0.8000	0.8020	0.8050	0.8080	0.8110	0.8130
0.9	0.8160	0.8190	0.8210	0.8240	0.8260	0.8290	0.8320	0.8340	0.8370	0.8390
1.0	0.8410	0.8440	0.8460	0.8480	0.8510	0.8530	0.8550	0.8580	0.8600	0.8620
1.1	0.8640	0.8660	0.8690	0.8710	0.8730	0.8750	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8850	0.8870	0.8890	0.8910	0.8930	0.8940	0.8960	0.8980	0.9000	0.9020
1.3	0.9030	0.9050	0.9070	0.9080	0.9100	0.9110	0.9130	0.9150	0.9160	0.9180
1.4	0.9190	0.9210	0.9220	0.9240	0.9250	0.9260	0.9280	0.9290	0.9310	0.9320
1.5	0.9330	0.9350	0.9360	0.9370	0.9380	0.9390	0.9410	0.9420	0.9430	0.9440
1.6	0.9450	0.9460	0.9470	0.9480	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9650	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9954	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

התאים בתוך הטבלה
מבטאים את האחוז, או
הסיכוי לקבל ערך נמוך
או שווה לציין תקן זה

Z = -1.53

P = 0.0630

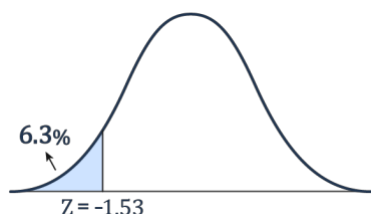
Z = -0.72

P = 0.2360

הטבלה מקשרת בין ציוני תקן (מופיעים בעמודה הראשונה ובשורה הראשונה) לבין שברים עשרוניים שנמצאים בתוך תאי הטבלה. בחלק זה נסביר מהם שברים עשרוניים אלו, וכיצד ניתן לעבוד עם הטבלה בפועל, נתחיל במשמעותם של תאי הטבלה.

הסתברות – סיכוי – אחוז – שטח – והכל בתא אחד קטן!

בטבלה לעיל ראינו שהערך המתאים עבור ציון התקן $Z = -1.53$ הוא 0.0630 (מסומנים בצבע אדום). מה המשמעות של מספר עשרוני זה?



- משמעות גרפית – הערך 0.0630 המופיע בטבלה מציין את השטח**
שמתחת לעקומה הנורמלית משמאל לציון התקן, עד לציון תקן $Z = -1.53$.
התא בטבלה אומנם מופיע כמספר עשרוני, אך כאשר נרצה לייצג את השטח
נהפוך את המספר לאחוזים: השטח יהיה 6.3%.
- הסתברות או סיכוי – ההתפלגות הנורמלית מסייעת לנו לחשב את הסיכוי או**
ההסתברות לקבל ערכים בהתפלגות. במקרה שלפנינו, ההסתברות לקבל ערכים
שהם קטנים או שווים לציון תקן $Z = -1.53$ היא 0.0630.
נוכל גם לכתוב: $P(z \leq -1.53) = 0.063$

דגשים

- כדי לעבור מהתא שמופיע בטבלה לשטח או לאחוז, נצטרך לכפול את הערך ב-100 (נזיז את הנקודה העשרונית שני מקומות ימין).
- בשאלות בהמשך ניתקל בארבעת המושגים כל הזמן: אחוז / שטח / הסתברות / סיכוי – הם מושגים שמציגים משמעות זהה ומהות אחת – לפעמים מכיוון ההתפלגות והשטח, ולעיתים מכיוון הסיכוי וההסתברות. חשוב להתרגל אליהם, ולעבור ביניהם בנוחות מבלי להיבהל משינויי נוסחים בשאלות.

מיומנויות נוספות במציאת שטחים (או הסתברויות) בטבלת Z

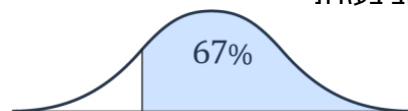
מציאת ציון תקן על פי אחוז נתון

בדוגמה זו נצטרך לחשב את ציון התקן מנתוני השאלה (או שהוא יהיה נתון לנו) ואז לחפש את התא המתאים בטבלה. תא זה נתון כשבר עשרוני, ואם נדרש, נהפוך אותו לאחוזים.
במקרה שלפנינו **ציון התקן המתאים בטבלת Z הוא $Z = 0.74$** .



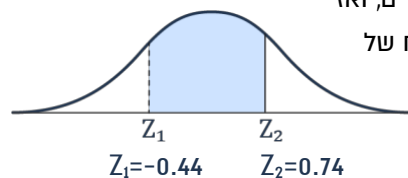
מציאת ציון תקן בעזרת האחוז המשלים

בדוגמה שלפנינו נתון השטח **מעל** ציון תקן מסוים. שטח זה מייצג את הסיכוי להיות מעל ציון התקן, ולא מתחתיו. מאחר שידוע שהשטח הכולל מתחת לעקומה הוא 100%, נוכל לחשב בעזרת האחוז המשלים את השטח משמאל לציון התקן ולא מימין.
האחוז המשלים: $100\% - 67\% = 33\%$. נבטא את האחוז שמצאנו כשבר עשרוני (0.330).
בטבלת Z נוכל לראות **שציון התקן המתאים הוא $Z = -0.44$** .



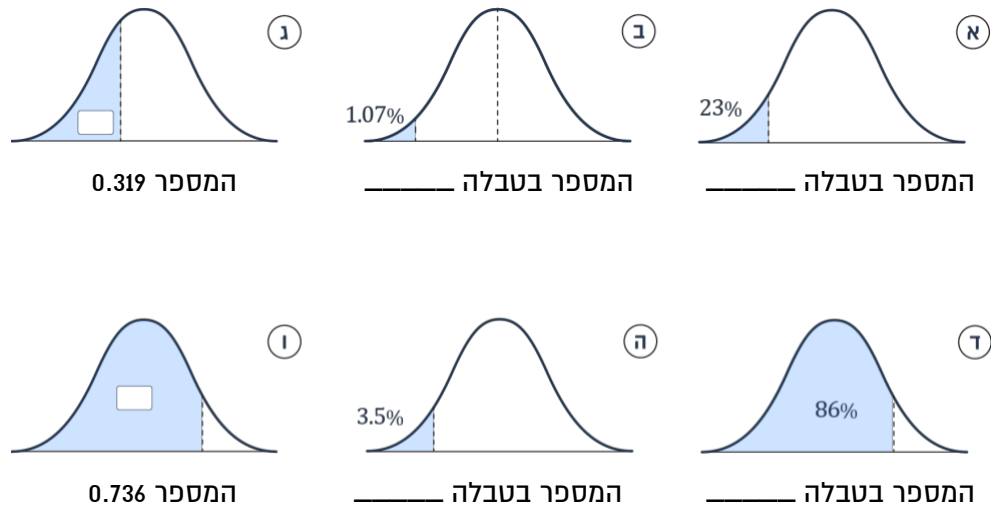
מציאת השטח בין שני ציוני תקן נתונים

כדי למצוא שטח בין שני ציוני תקן, עלינו למצוא את השטח משמאל לציון התקן הגדול בין השניים, ואז להחסיר ממנו את השטח שנמצא משמאל לציון התקן הקטן בין השניים. במקרה שלפנינו השטח של ציון התקן הימני הוא (77%) והשטח של ציון התקן השמאלי הוא (33%). ההפרש בין השטחים הוא $77\% - 33\% = 44\%$. אם כן החלק הצבוע זהה ל-44% משטח ההתפלגות.



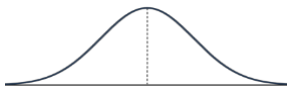
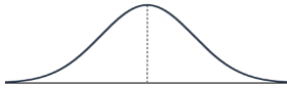
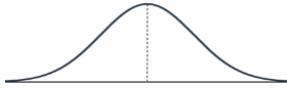
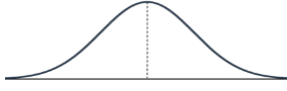
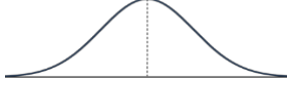
א. מיומנויות בעבודה עם טבלת Z

1. לפיככם התפלגויות נורמליות שונות. התאימו בין האחוז לבין המספר העשרוני המתאים.



2. לפיככם ציוני תקן שונים. עבור כל אחד מהם:

- כתבו מה ערכו של התא המתאים בטבלת Z.
- מהו האחוז המצטבר בהתפלגות הנורמלית עד לציון זה.
- סמנו על גבי ההתפלגות ביד חופשית את השטח המתאים לנתונים.

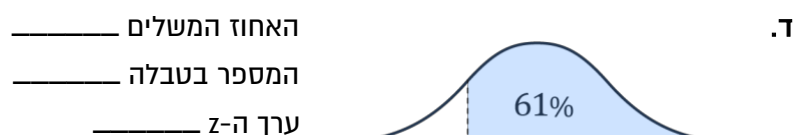
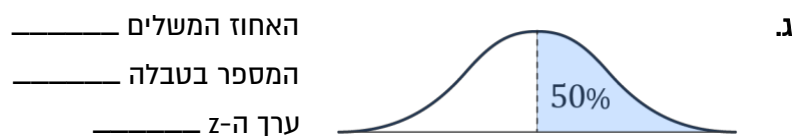
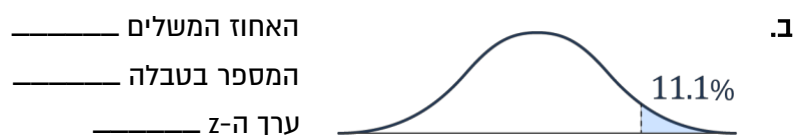
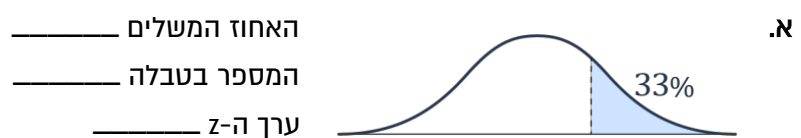
ציון תקן	ערך התא בטבלה	אחוז	השטח המתאים בגרף
א. $z=1.22$			
ב. $z=-2.1$			
ג. $z=0$			
ד. $z=1.55$			
ה. $z=0.96$			
ו. $z=0.5$			

3. לפניכם ציוני תקן שונים. עבור כל אחד מהם, עבור כל אחד מהם יש לחשב את השטח מימין.

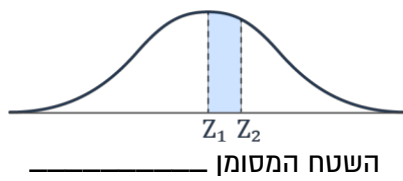
- סמנו את ציון התקן ואת השטח הנדרש על גרף ההתפלגות.
- כתבו מה ערכו של התא המתאים בטבלת Z, ואת האחוז המצטבר.
- חשבו את האחוז המשלים.

ציון תקן	ערך התא בטבלה	האחוז	האחוז המשלים	השטח המתאים בגרף
א. $z=1.6$				
ב. $z=-0.7$				
ג. $z=0.92$				
ד. $z=1.34$				
ה. $z=-1.55$				
ו. $z=0.39$				

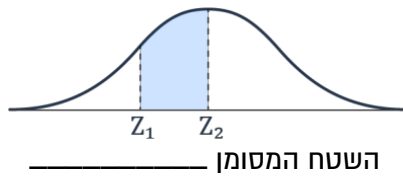
4. לפניכם התפלגויות נורמליות שונות ובהן מסומנים שטחים. בעזרת חישוב האחוז המשלים ל-100%, עליכם למצוא בכל התפלגות את התא המתאים בטבלת Z, ואת ערך ה-Z המתאים:



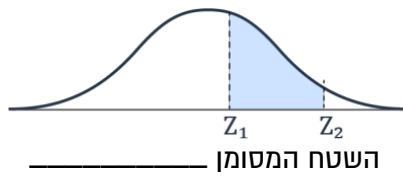
5. לפניכם התפלגויות נורמליות עם שטחים שונים שמוצגים בהן. בכל התפלגות יש לחשב בעזרת חיבור שטחים את השטח המוצג.



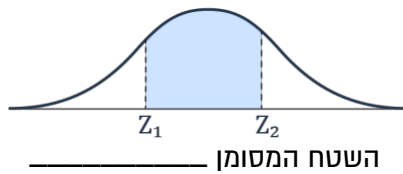
א. $z_1 = 0$ $z_2 = 1.21$
שטח מתאים _____ שטח מתאים _____



ב. $z_1 = -1.34$ $z_2 = 0$
שטח מתאים _____ שטח מתאים _____



ג. $z_1 = 0.52$ $z_2 = 2.4$
שטח מתאים _____ שטח מתאים _____



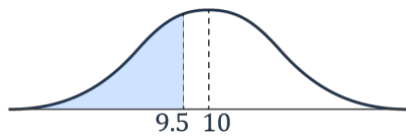
ד. $z_1 = -1.25$ $z_2 = 1.03$
שטח מתאים _____ שטח מתאים _____

6. נתונה התפלגויות נורמלית שונות.

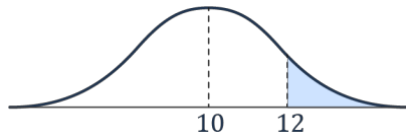
בכל אחד מהסעיפים העזרו בנתונים וחשבו את ציון התקן ואת הציון הגולמי והוסיפו גרף מתאים.

אחוז	ציון תקן	ממוצע סטיית התקן	ציון גולמי	גרף מתאים
א. 89.3%		$\bar{x} = 20$ $s = 25$		
ב. 22.4%		$\bar{x} = 900$ $s = 500$		
ג. 98.78%		$\bar{x} = 122$ $s = 16$		
ד. 3.59%		$\bar{x} = 9$ $s = 1.5$		
ה. 72.6%		$\bar{x} = 16$ $s = 2$		

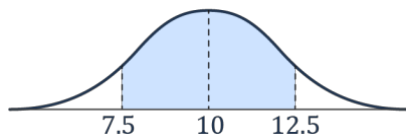
7. לפניכם התפלגויות נורמליות, שבכולן הממוצע הוא 10 וסטית התקן היא 2.5. השלימו את הנתונים החסרים:



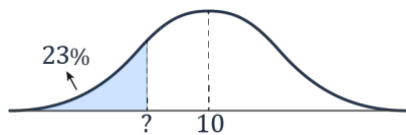
- א. ציון z של 9.5 הוא _____
 הערך בטבלת z הוא _____
 השטח המסומן הוא _____



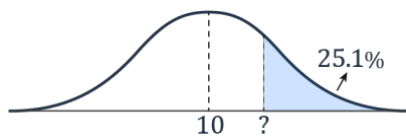
- ב. ציון z של 12 הוא _____
 הערך בטבלת z הוא _____
 השטח המסומן הוא _____



- ג. ציון z של 12.5 הוא _____
 ציון z של 7.5 הוא _____
 השטח המסומן הוא _____

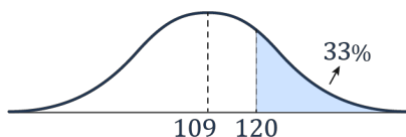


- ד. ציון ה- z המתאים הוא _____
 הערך הגולמי (האמיתי) המתאים הוא _____

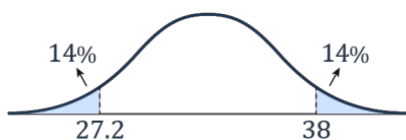


- ה. ציון ה- z המתאים הוא _____
 הערך הגולמי (האמיתי) המתאים הוא _____

8. לפניכם התפלגויות נורמליות שונות. היעזרו בנתונים שבשרטוט והשלימו את הנתונים החסרים:

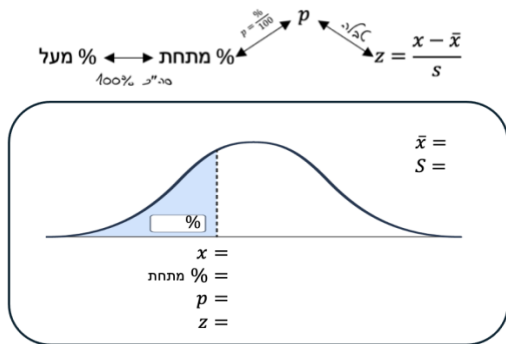


- א. ציון התקן של 120 הוא _____
 סטית התקן של ההתפלגות _____



- ב. ציון התקן של 38 הוא _____
 ציון התקן של 27.2 הוא _____
 ממוצע ההתפלגות הוא _____
 סטית התקן היא _____

יחידה מסכמת שאלות לקראת בגרות



לפניך כרטיס ניווט שימושי מאוד שיכול לסייע לך בבגרות. מומלץ לגזור אותו (נמצא בעמוד 36) ולהשתמש בו בפתרון השאלות הבאות:

שאלה 1

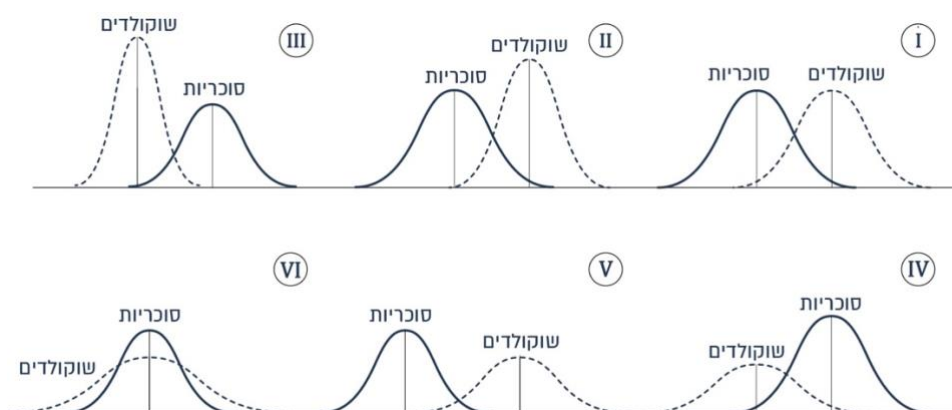
בדוכן בקרקס קערת סוכריות. מי שמנחש נכון את כמות הסוכריות בקערה מנצח, וזוכה בכל תכולת הקערה. בכל יום מנהלי הדוכן ממלאים את הקערה מחדש.

ידוע כי כמות הסוכריות בקערה מתפלגת נורמלית עם ממוצע 150 וסטיית תקן 5.

- מה הסיכוי שבקערה יש פחות מ-159 סוכריות?
- קבעו מה מהבאים גדול יותר, נמקו את קביעתכם.
 - הסיכוי שבקערה יש בין 150 ל-153 סוכריות
 - הסיכוי שבקערה יש בין 153 ל-156 סוכריות

לאור הצלחת תחרות קערת הסוכריות, החליטו בדוכן הצמוד לפתוח תחרות קערת שוקולדים. גם כמות השוקולדים מתפלגת נורמלית, עם סטיית תקן של 20. נתון כי הסיכוי שיש פחות מ-142 שוקולדים בקערת שוקולדים שווה לסיכוי שיש פחות מ-147 ממתקים בקערת הסוכריות.

- איזה מהממוצעים גדול יותר: ממוצע כמות השוקולדים או ממוצע כמות הממתקים? הסבירו
- קבעו איזה מהגרפים הבאים מתאים לתיאור שתי ההתפלגויות, נמקו.



שאלה 2

בחברת הייטק גדולה משכורות העובדים מתפלגות נורמלית, עם חציון של 15 אלף ש"ח. נתון כי 84.4% מהעובדים בחברה מרוויחים יותר מ-10.96 אלף ש"ח.

א. מהי סטיית התקן?

לקראת הדו"ח השנתי, החברה הגדירה את המשכורות כך:

משכורות שנמצאות ב-10% התחתונים של התפלגות השכר הן "משכורות נמוכות"

משכורות שנמצאות ב-10% העליונים של התפלגות השכר הן "משכורות גבוהות"

שאר המשכורות הן משכורות בינוניות.

ב. (1) אם בחברה מועסקים 30,000 עובדים, כמה מהם משתכרים שכר בינוני?

(2) לפי הגדרות החברה, מהו טווח המשכורות אשר נחשבות משכורות בינוניות?

בעקבות הצלחת החברה בשוק, כלל העובדים קיבלו בONUS חד פעמי של 3 אלף ש"ח.

ג. (1) מה יקרה לממוצע?

(2) מה יקרה לסטיית התקן?

בחברה מתחרה (חברה ב'), משכורת העובדים מתפלגת א-סימטרית עם זנב ימני. ידוע כי חציון משכורות שתי החברות זהה.

לאחד העובדים בחברה א' ששכרו שווה לשכר הממוצע בחברה, הוצע לעבור לחברה ב'. חברה ב' הציעה לו להרוויח גם כן את הממוצע בחברה.

ד. האם ההצעה משתלמת לעובד? נמקו.

שאלה 3

כמות הבמבוק שפנדות אוכלות ביום מתפלגת נורמלית.

ידוע ש-59.9% אוכלות פחות מ-20 ק"ג במבוק ליום, ו-50% מהפנדות אוכלות מעל 18 ק"ג ביום.

א. מהי סטיית התקן של כמות הבמבוק שפנדות אוכלות ביום?

ב. מה ההסתברות שפנדה תאכל בין 17 ל-19 ק"ג במבוק ביום?

ג. כל הפנדות אשר אוכלות פחות מ-15.44 ק"ג במבוק ביום נמצאות בתת תזונה. מה אחוז הפנדות שנמצאות בתת תזונה?

ידוע כי הבמבוק מורכב ברובו מסיבים, ולכן רק 20% ממנו נספג במערכת העיכול של דוב הפנדה.

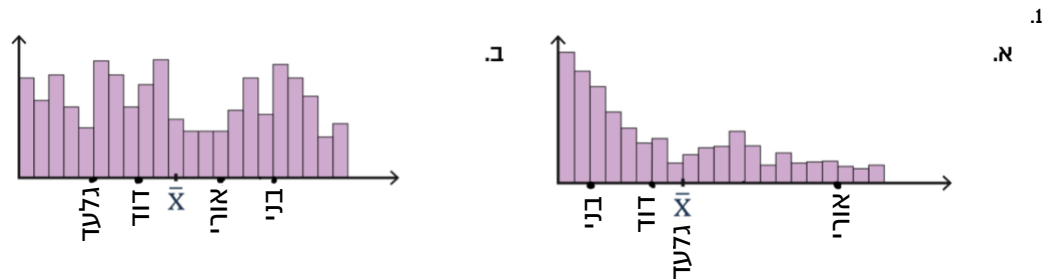
ד. (1) מה הוא הממוצע של כמות הבמבוק שנספגת במערכת העיכול של הפנדה?

(2) מהי היא סטיית התקן של כמות הבמבוק שנספגת במערכת העיכול של הפנדה?

(3) מבין הפנדות שנמצאות בתת תזונה, מהי כמות הבמבוק המקסימלית שנספגת במערכת

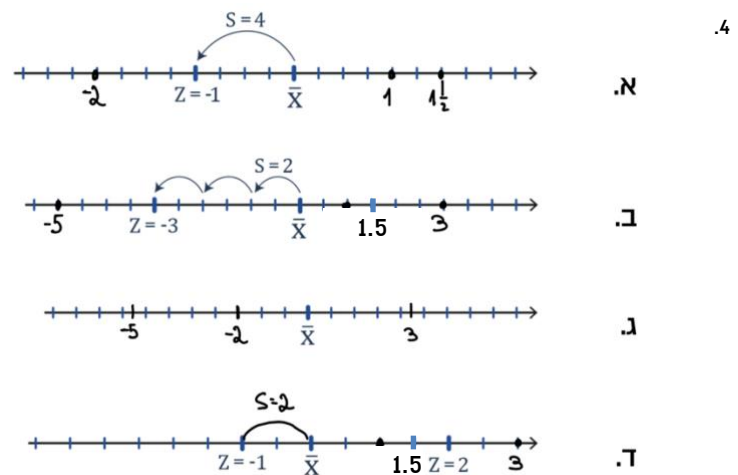
העיכול שלהן?

תשובות ליחידה ראשונה



2. א. סיגל ורועי החליפו מקום. ככל שציון התקן קטן יותר הוא ממוקם שמאלה יותר.
 ב. ציון התקן של נעמי שלילי, הוא צריך להיות נמוך מהממוצע.
 ג. ציון התקן של שגיאל לא יכול להיות במרחק דומה לנועה מהממוצע, הוא צריך להיות רחוק יותר ימינה.

3. רומי: 0.6 תמי: -0.8

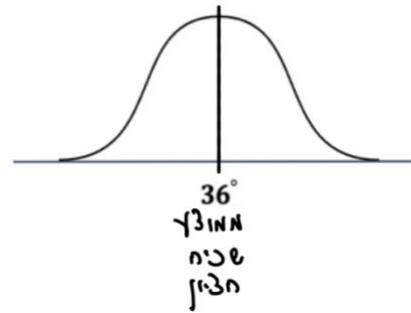
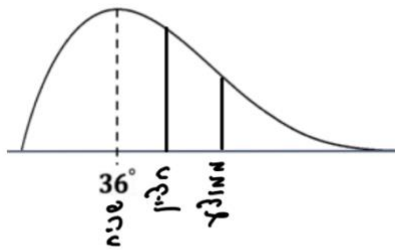


5. מתמטיקה: רונה $z=2.6$, אליה $z=0$, גאיה $z=3$, נעמה $z=-2$
 אנגלית: רונה $z=3$, אליה $z=-1$, גאיה $z=4$, נעמה $z=-8.5$
 רונה-אנגלית, אליה-מתמטיקה, גאיה-אנגלית, נעמה-מתמטיקה
6. לשון $z=5$, ספרות $z=-2$, יהדות $z=4$, פיסיקה $z=2.5$, חינוך גופני $z=-7.5$
 הצליחה ביותר לשון, נכשלה ביותר חינוך גופני

7. א. 0.75, ב. 18, ג. 12, ד. 2.25, ה. -1.3, ו. 4, ז. 18, ח. 4.5

תשובות יחידה שניה

1. א. לא. בהתפלגות עם זנב ימני, החציון מימין לשכיח.
 ב. לא. בהתפלגות עם זנב ימני הממוצע מימין לשכיח.
 ג. כן, בהתפלגות עם זנב ימני הממוצע הוא המדד הימני ביותר.
 ד.



2. א. נכון.
 ב. לא נכון.
 ג. נכון.
 ד. לא נכון.
 ה. לא נכון.
 ו. אי אפשר לדעת.
 ז. לא נכון.

תשובות יחידה שלישית

1. א. i, ב. iii, ג. i, ד. ii

2.



3.



4.



5. א. גרף 2, גרף 3, גרף 6

ב. בהתפלגות נורמלית הממוצע השכיח והחציון ממוקמים במרכז ההתפלגות.

גרף 1 מסומן חציון ושכיח ב 21, ולכן הממוצע איננו 22.

גרף 4 הציון 22 מימין לחציון וממילא גם לממוצע.

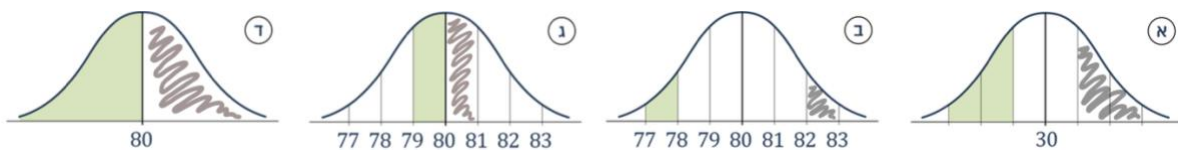
גרף 5 הציון 22 מסמן 20% ולא 50% כנדרש.

6. א. שטח 1 גדול יותר, יש לו רוחב זהה אך הוא ממוקם קרוב יותר למרכז ההתפלגות.

ב. זהה. יש להם אותו רוחב ובמרחקים סימטרים מהממוצע.

ג. שטח 1 גדול יותר, הוא כולל שטח סימטרי, אך גם שטח נוסף.

7.



8. א. 79, ב. 70, ג. 80, ד. 80, 57

9. א. $A > B$, $B > A$, $A > E$, $C > B$, $D > A$, ב. C, ג. E, ד. $E < A < D < B < C$

10. ככל שסטיית התקן גדולה יותר, הפיזור גדול: הגרף רחב ונמוך יותר.

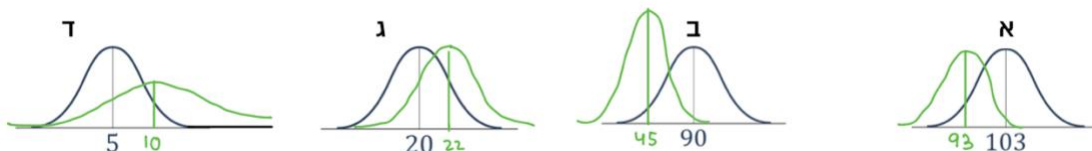
א. גרף 4. הוספת קבוע מגדילה את הממוצע אך לא משנה את סטיית התקן.

ב. גרף 3. הקטנה באחוז מקטינה את הממוצע ואת סטיית התקן.

ג. גרף 2. הכפלה פי 2 מגדילה את הממוצע ואת סטיית התקן.

ד. גרף 1. הוספת אחוזים מגדילה את הממוצע ואת סטיית התקן.

11.



12. א. חלוקה, ב. הכפלה, ג. הוספה, ד. הוספה

תשובות ליחידה רביעית

א. 0.23 ב. 0.0107 ג. 31.9% ד. 0.86 ה. 0.035 ו. 73.6%

2.	ציון תקן	ערך התא בטבלה	אחוז	השטח המתאים בגרף
א.	$z=1.22$	0.8890	88.9	
ב.	$z=-2.1$	0.0179	1.79	
ג.	$z=0$	0.5	50	
ד.	$z=1.55$	0.9390	93.9	
ה.	$z=0.96$	0.8320	83.2	
ו.	$z=0.5$	0.6920	69.2	

3.	ציון תקן	ערך התא בטבלה	האחוז	האחוז המשלים	השטח המתאים בגרף
א.	$z=1.6$	0.9450	94.5	5.5	
ב.	$z=-0.7$	0.2420	24.2	75.8	
ג.	$z=0.92$	0.8210	82.1	17.9	
ד.	$z=1.34$	0.9100	91	9	
ה.	$z=-1.55$	0.0610	6.1	93.9	
ו.	$z=0.39$	0.6520	65.2	34.8	

4.	אחוז משלים	אחוז בטבלה	ערך ה-z
א	67	0.6700	0.44
ב	88.9	0.8890	1.22
ג	50	0.5000	0
ד	39	0.3900	-0.28

5.	שטח z_1	שטח z_2	שטח מסומן
א	0.5000	0.8870	0.3870
ב	0.0900	0.5000	0.4100
ג	0.6990	0.9918	0.2928
ד	0.1060	0.8480	0.7420

6.	אחוז	ציון תקן	ממוצע סטיית התקן	ציון גולמי	גרף מתאים
א.	89.3%	1.24	$\bar{x} = 20$ $s = 25$	51	
ב.	22.4%	-0.76	$\bar{x} = 900$ $s = 500$	520	
ג.	98.78%	2.25	$\bar{x} = 122$ $s = 16$	158	
ד.	3.59%	-1.8	$\bar{x} = 9$ $s = 1.5$	6.3	
ה.	72.6%	0.6	$\bar{x} = 16$ $s = 2$	17.2	

7.

א	$z=-0.2$	ערך בטבלה 0.421	שטח 42.1
ב	$z=0.8$	ערך בטבלה 0.7880	שטח 21.2
ג	$z=1$	$z=-1$	שטח 68.2
ד	$z=-0.74$	ציון 8.15	
ה	$z=0.67$	ציון 11.675	

8.

א	$z=0.44$	$s=25$	
ב	$z=-1.08, z=1.08$	ממוצע הוא 32.6	$s=5$

תשובות לשאלות מסכמות

שאלה 1

- א. א. 96.41%
ב. ב. הסיכוי שבקערה יש בין 150 ל-153 ממתקים גדול יותר מהסיכוי שיש בקערה בין 153-156, כי אלו ערכים יותר קרובים לממוצע.
ג. ג. ציון התקן של 147 סוכריות הוא $Z = -0.6$ והממוצע 150.
ציון התקן של 142 שוקולדים זהה, $Z = -0.6$, כלומר הממוצע הוא 154.
ממוצע כמות השוקולדים גדול יותר.
ד. ד. גרף V

שאלה 2

- א. א. 4
ב. ב. 24,000
ג. ג. 2. טווח המשכורות הבינוניות: בין 9.88 אלף ל-20.12 אלף.
ג. ג. 1. יגדל ב-3 אלף ש"ח.
2. לא תשתנה
ד. ד. כן, כי הממוצע בהתפלגות א-סימטרית עם זנב ימני גדול מהחציון.

שאלה 3

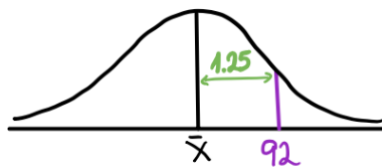
- א. א. 8
ב. ב. בערך 10%
ג. ג. 37.5%
ד. ד. 1. 3.6
2. 1.6
3. 3.088

נספח א: שימוש בציוני תקן למציאת סטית התקן (ללא פתרון מערכת משוואות)

לעיתים השאלה תכיל נתונים בנוגע לציוני התקן ולציוני הגלם, אך לא תכלול נתונים נוספים לגבי הממוצע וסטיית התקן. לדוגמא, נתבונן בשאלה הבאה (מתוך אוסף שאלות אתר מכפ"ר)

- לקראת בחינת הבגרות, בבית ספר "דקל" נערך מבחן מסכם. אילה ופנינה נבחנו במבחן. הציון שקיבלה אילה במבחן היה 92 וציון התקן שלה היה 1.25. הציון שקיבלה פנינה היה 64 וציון התקן שלה היה -0.5.
- מה המשמעות של ציון התקן של אילה?
 - מה המשמעות של ציון התקן של פנינה?
 - חשבו את סטיית התקן של ציוני כל התלמידים במבחן המסכם.
 - חשבו את ממוצע הציונים של התלמידים במבחן המסכם.

א. ציון התקן של אילה הוא 1.25.



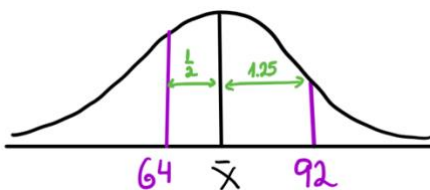
המשמעות היא שהציון הגולמי של אילה (92) גבוה ב-1.25 סטיות תקן מהממוצע.

ב. ציון התקן של פנינה הוא $-\frac{1}{2}$.



המשמעות היא שהציון הגולמי של פנינה (64) נמוך ב- $\frac{1}{2}$ סטיית תקן מהממוצע.

ג. כדי לחשב את סטית התקן ניתן ליצור מערכת משוואות בשני נעלמים (הנעלמים יהיו x ו- y). אך פשוט יותר לחשב את סטיית התקן בצורה הבאה, שנשענת על משמעותם של ציוני התקן:



1. נחשב את המרחק בין ציוני התקן: $\frac{1}{2} S + 1.25 S = 1.75 S$

2. נחשב את המרחק בין ציוני הגלם (הציונים האמיתיים): $92 - 64 = 28$

3. כעת נשווה בין המרחק בין ציוני הגלם למרחק בין ציוני תקן, ונמצא את סטית התקן:

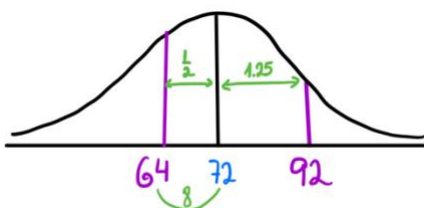
$$1.75 \cdot S = 28$$

$$S = \frac{28}{1.75} = 16$$

ד. לאחר שמצאנו שסטית התקן היא 16, נוכל לחשב את הממוצע:

ציון התקן של פנינה נמוך ב- $\frac{1}{2}$ סטיית תקן מהממוצע, ומאחר שהסטייה היא 16, נוכל לדעת שהציון של פנינה

נמוך מהממוצע ב-8 נקודות: $\bar{x} = 64 + 8 = 72$. מכאן שהממוצע הוא 72:



לסיכום, נוכל להכליל ולומר:

$$S = \frac{\text{המרחק בין ציוני הגלם}}{\text{המרחק בין ציוני התקן}}$$

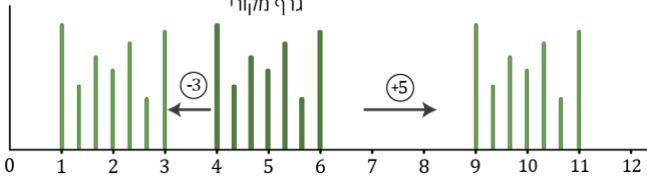
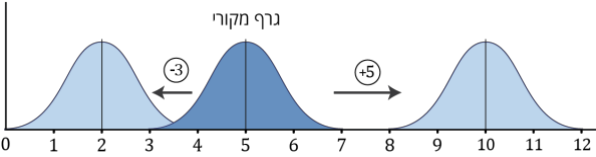
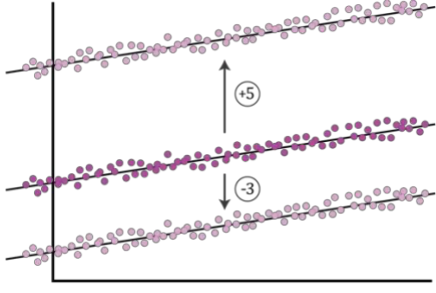
נספח ב: טרנספורמציות בסטטיסטיקה (שינוי אחד על כל הערכים של המשתנה)

הוספה והפחתה

ידוע כי זמן התיקון הממוצע למחשב במעבדת המחשבים הוא 5 שעות.

דוגמה 1: באחד הימים החליט מנהל המעבדה להוסיף כחלק שגרתי מתיקון המחשב הרצת תוכנת אנטייורוס, דבר אשר הוסיף 5 שעות לזמן התיקון של כל מחשב. כיצד הדבר ישפיע על ההתפלגות, ועל מדדי המרכז והפיזור?

דוגמה 2: במעבדה סמוכה, החליט מנהל המעבדה לשלב בבדיקת המחשבים תוכנה אוטומטית לאיתור תקלות, דבר אשר קיצר את משך התיקון ב-3 שעות. כיצד הדבר ישפיע על ההתפלגות, ועל מדדי המרכז והפיזור?

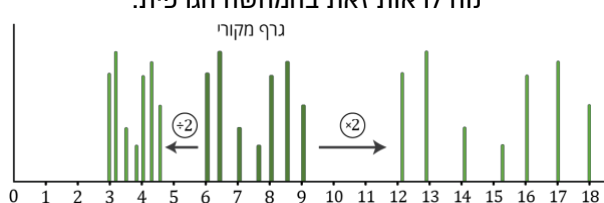
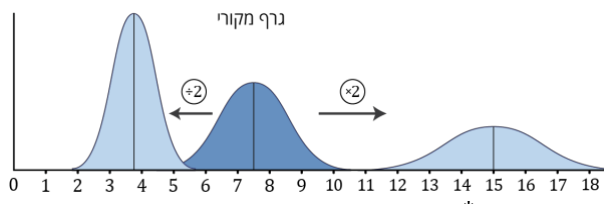
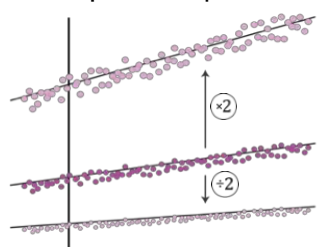
דוגמה 2	דוגמה 1	
$(\bar{x}) - 3$ -3 (חציון) -3 (שכיח) טווח ללא שינוי ס. תקן ללא שינוי	$(\bar{x}) + 5$ $+5$ (חציון) $+5$ (שכיח) טווח ללא שינוי ס. תקן ללא שינוי	סטטיסטיקה תיאורית כל הערכים ישתנו, וגם כל מדדי המרכז: שכיח, חציון וממוצע. מדדי הפיזור לא ישתנו. גרף מקורי 
$(\bar{x}) - 3$ ס. תקן ללא שינוי	$(\bar{x}) + 5$ ס. תקן ללא שינוי	התפלגות נורמלית בדומה לתיאורית, כל הערכים ישתנו, וכן מדדי המרכז. מדדי הפיזור לא ישתנו. בהתפלגות נורמלית בדרך כלל נתייחס לממוצע $(\bar{x})$ ולסטיית התקן (SD)  * שימו לב: ציוני התקן גם לא ישתנו.
$\bar{y} - 3$ ס. תקן ללא שינוי שיפוע הקו ללא שינוי משוואת הקו: $\tilde{y} = mx + b - 3$ r ללא שינוי	$\bar{y} + 5$ ס. תקן ללא שינוי שיפוע הקו ללא שינוי משוואת הקו: $\tilde{y} = mx + b + 5$ r ללא שינוי	רגרסיה הטרנספורמציה תתבצע רק על משתנה y. משתנה y יושפע כמו בתיאורית ובנורמלית: הממוצע ישתנה וסטית התקן לא תשתנה. מבחינת קו הרגרסיה השיפוע לא ישתנה, אך משוואת הקו תשתנה כיון שתתבצע הזזה של הקו בערכי ה-y:  * ערכי x יהיו ללא כל שינוי.

הכפלה וחלוקה

בתחילת העונה, מהירות הריצה של קבוצת אצנים חובבים היתה 7.5 דקות לקילומטר. כדי לשפר את הביצועים, קבוצת האצנים החלה בשגרת אימונים אינטנסיביים.

דוגמה 1: סט האימונים ההתחלתי של הקבוצה כלל הוספת משקל גבוה על הגב בעת הריצה. הוספת המשקל הכפילה את משך הריצה עבור כל אצן. כיצד הדבר ישפיע על ההתפלגות, ועל מדדי המרכז והפיזור?

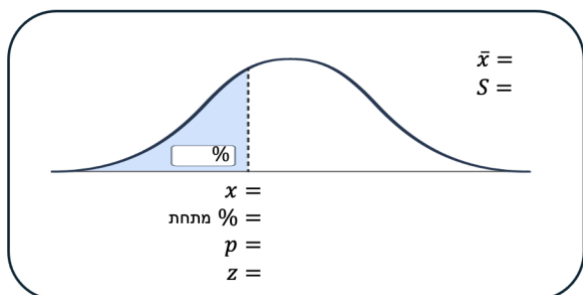
דוגמה 2: לקראת סוף העונה נמדדה שוב מהירות הריצה של האצנים, ונמצא שמשך זמן הריצה של כל אצן התקצר בחצי ביחס לתחילת העונה. כיצד הדבר ישפיע על ההתפלגות, ועל מדדי המרכז והפיזור?

דוגמה 2	דוגמה 1	
$(\bar{x}): 2$ $(\text{חציון}): 2$ $(\text{שכיח}): 2$ $(\text{ס. תקן}): 2$ $(\text{טווח}): 2$ $(\text{שונות}): 2^2$	$(\bar{x}) \cdot 2$ $(\text{חציון}) \cdot 2$ $(\text{שכיח}) \cdot 2$ $(\text{ס. תקן}) \cdot 2$ $(\text{טווח}) \cdot 2$ $(\text{שונות}) \cdot 2^2$	סטטיסטיקה תיאורית הערכים של כל האיברים ישתנו, אך גם המרחקים ביניהם ישתנו. לכן נראה שינוי גם במדדי המרכז וגם במדדי הפיזור. נוח לראות זאת בהמחשה הגרפית:  - אין שינוי <u>בשכיחות</u> הערכים. - נוכל לראות בגרפים שהעמודות נשארות באותו גובה גם לאחר השינוי. - על שונות כמעט לא שואלים, אבל שימו לב שהיא תוכפל פי 2^2 (השינוי).
$(\bar{x}): 2$ $(\text{ס. תקן}): 2$	$(\bar{x}) \cdot 2$ $(\text{ס. תקן}) \cdot 2$	התפלגות נורמלית מדדי המרכז ישתנו, ומדדי הפיזור ישתנו. שימו לב שגם צורת ההתפלגות תשתנה – "רוחב" ההתפלגות ישתנה (יהפוך צר או רחב יותר) ובהתאם ישתנה <u>גובה</u> ההתפלגות. למרות השינוי בצורת ההתפלגות, שטח ההתפלגות לא ישתנה.  * שימו לב: ציוני התקן לא ישתנו.
$\bar{y}: 2$ $S_y: 2$ $\tilde{y} = (mx + b): 2$ $m: 2$ r ללא שינוי	$\bar{y} \cdot 2$ $S_y \cdot 2$ $\tilde{y} = (mx + b) \cdot 2$ $m \cdot 2$ r ללא שינוי	רגרסיה הטרנספורמציה תתבצע רק על משתנה y. משתנה y יושפע כמו בתיאורית ובנורמלית: נראה שינוי גם בממוצע וגם בסטיית התקן. מבחינת קו הרגרסיה, הוא ימתח/יתכווץ בעקבות השינוי, ולכן נראה שינוי גם בשיפוע הישר וגם בנקודת החיתוך שלו עם ציר y:  * ערכי x יהיו ללא כל שינוי.

נספח ג: כרטיסי ניווט

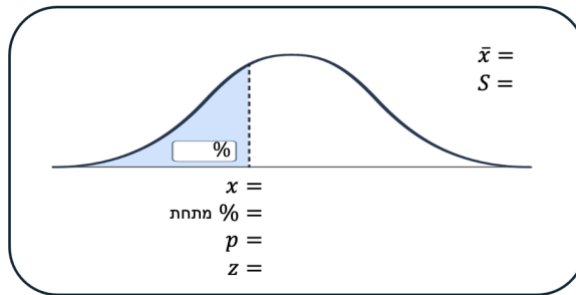
$$p = \frac{\%}{100} \quad \swarrow \quad \searrow \quad \sqrt{C} \quad z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

מתחת % $\longleftrightarrow$ מעל %
הי"ג 100%



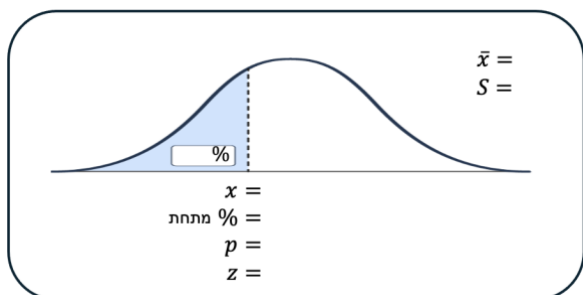
$$p = \frac{\%}{100} \quad \swarrow \quad \searrow \quad \sqrt{C} \quad z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

מתחת % $\longleftrightarrow$ מעל %
הי"ג 100%



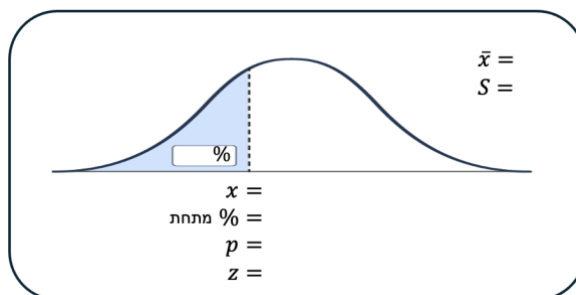
$$p = \frac{\%}{100} \quad \swarrow \quad \searrow \quad \sqrt{C} \quad z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

מתחת % $\longleftrightarrow$ מעל %
הי"ג 100%



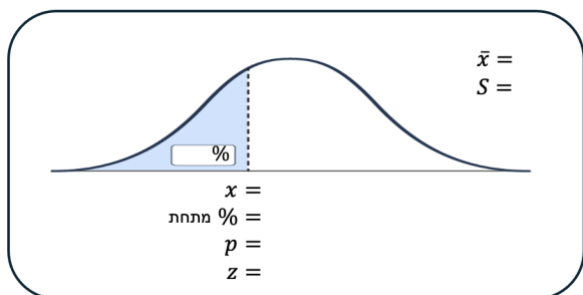
$$p = \frac{\%}{100} \quad \swarrow \quad \searrow \quad \sqrt{C} \quad z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

מתחת % $\longleftrightarrow$ מעל %
הי"ג 100%



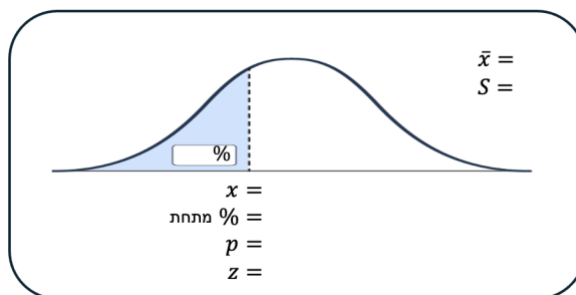
$$p = \frac{\%}{100} \quad \swarrow \quad \searrow \quad \sqrt{C} \quad z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

מתחת % $\longleftrightarrow$ מעל %
הי"ג 100%



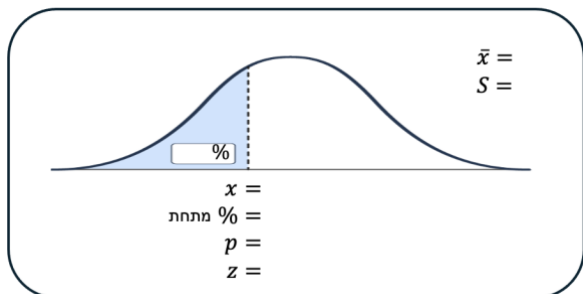
$$p = \frac{\%}{100} \quad \swarrow \quad \searrow \quad \sqrt{C} \quad z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

מתחת % $\longleftrightarrow$ מעל %
הי"ג 100%



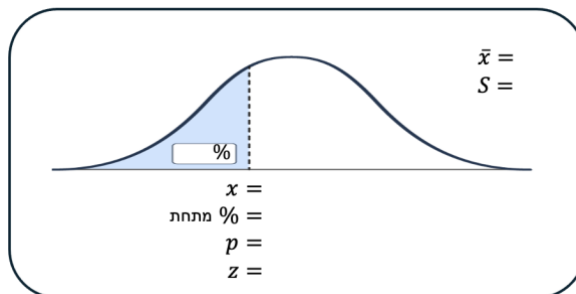
$$p = \frac{\%}{100} \quad \swarrow \quad \searrow \quad \sqrt{C} \quad z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

מתחת % $\longleftrightarrow$ מעל %
הי"ג 100%



$$p = \frac{\%}{100} \quad \swarrow \quad \searrow \quad \sqrt{C} \quad z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

מתחת % $\longleftrightarrow$ מעל %
הי"ג 100%



1. במפעל מסוים אורזים מלפפונים על פי אורכם. האורכים של המלפפונים מתפלגים נורמלית.

כל המלפפונים שאורכם קטן מ- 12 ס"מ נארוזים בקופסאות שימורים רגילות.

שאר המלפפונים נארוזים בקופסאות שימורים גדולות.

ידוע כי האורך הממוצע של מלפפונים הוא 10.56 ס"מ, וסטיית התקן היא 3 ס"מ.

א. מצאו את אחוז המלפפונים שנארוזים בקופסאות שימורים רגילות.

התברר שיש ביקוש למלפפונים קצרים במיוחד, לכן הוחלט כי המלפפונים יעברו מיון מחדש.

נמצא כי רבע מן המלפפונים שאורכם קטן מ- 12 ס"מ נחשבים מלפפונים קצרים במיוחד.

ב. (1) מצאו את אחוז המלפפונים הקצרים במיוחד.

(2) מצאו את אורכו של המלפפון הארוך ביותר מבין המלפפונים הקצרים במיוחד.

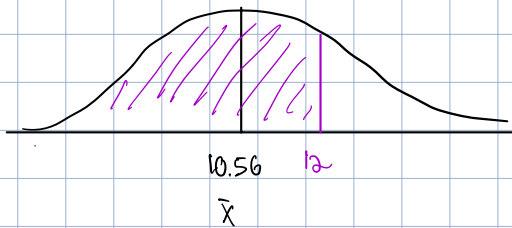
לאחר זמן מה הגיע למפעל משלוח חדש של מלפפונים. גם במשלוח זה האורכים של המלפפונים מתפלגים נורמלית.

50% מן המלפפונים במשלוח זה היו קצרים מ- 11.5 ס"מ.

12.5% מן המלפפונים במשלוח זה היו ארוכים מ- 14.26 ס"מ.

ג. מצאו את סטיית התקן של אורכי המלפפונים במשלוח החדש.

1c

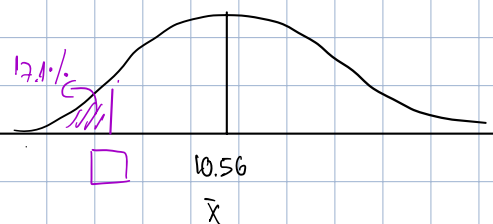


$$Z = \frac{12 - 10.56}{3} = 0.48$$

$$p = 0.684 \rightarrow 68.4\%$$

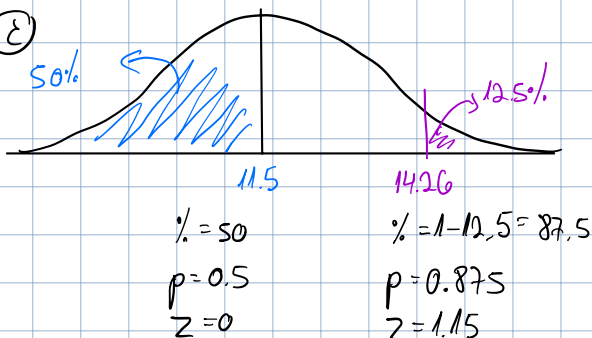
1) $\frac{1}{4} \cdot 68.4 = 17.1\%$

2



$$\left. \begin{array}{l} \% = 17.1 \\ p = 0.171 \\ Z = -0.95 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{X - 10.56}{3} = -0.95 \\ X - 10.56 = -2.85 \\ X = 7.71 \end{array}$$

3



$$\frac{14.26 - 11.5}{S} = 1.15 \rightarrow 2.76 = 1.15 \cdot S$$

$$2.4 = S$$

1. במשתלה מסוימת האורכים של גבעולי פרחים מתפלגים נורמלית. הממוצע של אורך גבעולי הפרחים במשתלה הוא 20 ס"מ.

במשתלה ממיינים את הפרחים לשלוש קבוצות:

קבוצה א' – פרחים שאורך הגבעול שלהם קצר מ- 22 ס"מ.

קבוצה ב' – פרחים שאורך הגבעול שלהם בין 22 ס"מ ל- 26 ס"מ.

קבוצה ג' – שאר הפרחים.

נתון כי שיעור הפרחים בקבוצה א' הוא 65.5%.

א. מצאו את סטיית התקן של אורך גבעולי הפרחים במשתלה.

ב. מצאו מהו אחוז הפרחים שבקבוצה ג' מתוך כל הפרחים במשתלה.

יום אחד היו במשתלה 2,000 פרחים סך הכול.

במשתלה החליטו להכין זרים מכל הפרחים שבקבוצה ב' כך שבכל זר יהיו 10 פרחים.

ג. על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית, כמה זרים הכינו במשתלה ביום זה?

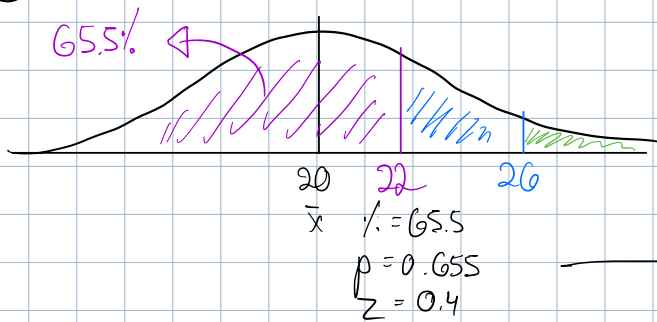
במשתלה אחרת, שגם בה האורכים של גבעולי הפרחים מתפלגים נורמלית, אחוז הפרחים שאורך הגבעול שלהם

ארוך מ- 24 ס"מ שווה לאחוז הפרחים שבקבוצה ב'.

נתון כי סטיית התקן של אורך גבעולי הפרחים בשתי המשתלות זהה.

ד. מצאו את הממוצע של אורך גבעולי הפרחים במשתלה האחרת.

(1)

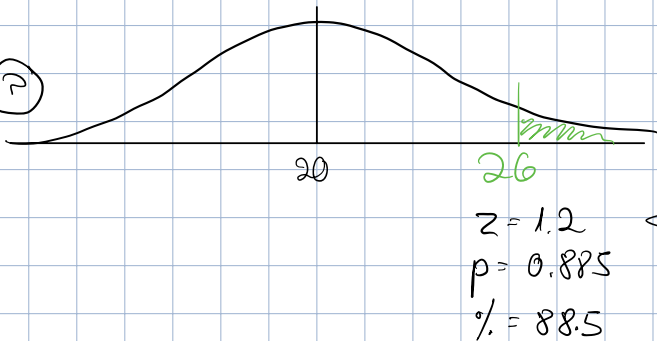


$$\frac{22-20}{S} = 0.4$$

$$2 = 0.4 \cdot S$$

$$5 = S$$

(2)



$$\frac{26-20}{5} = 1.2$$

$$100 - 88.5 = 11.5\%$$

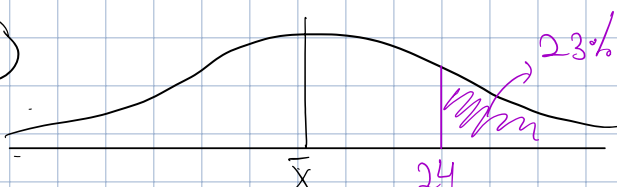
(3)

$$65.5 \quad | \quad 11.5$$

$$100 - 88.5 - 11.5 = 23\%$$

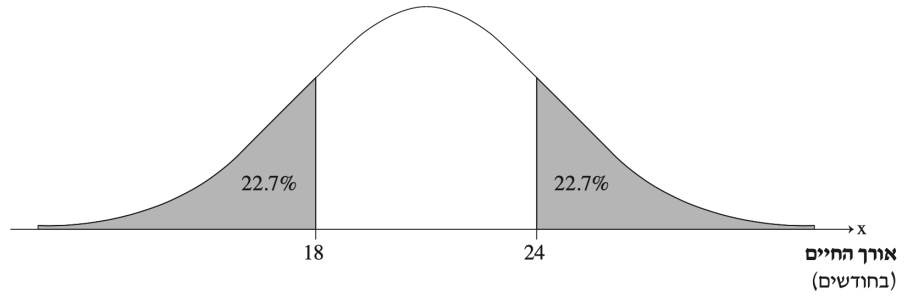
$$2000 \cdot \frac{23}{100} = 460$$

(3)



$$\left. \begin{array}{l} \% = 77 \\ p = 0.77 \\ z = 0.74 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{24 - \bar{x}}{5} = 0.74 \\ 24 - \bar{x} = 3.7 \\ 20.3 = \bar{x} \end{array}$$

לפניכם גרף ההתפלגות הנורמלית של אורך חיי הטלפונים ועליו חלק מנתוני אורך החיים (בחודשים).



א. מצאו את ממוצע אורך החיים של הטלפונים ואת סטיית התקן.

ב. 3.5% מן הטלפונים – אלה שאורך החיים שלהם הוא הקטן ביותר – נחשבים פגומים.

ג. מהו אורך החיים הגדול ביותר של טלפון שנחשב פגום?

ד. בחודש מסוים ייצרו במפעל 2,000 טלפונים.

ה. על פי גרף ההתפלגות הנורמלית, לכמה מן הטלפונים שייצרו בחודש זה יש אורך חיים גדול מ-26 חודשים?

ו. מהנדסים הצליחו להגדיל פי 1.5 את אורך החיים של כל הטלפונים שהמפעל מייצר.

ז. (1) מהו ממוצע אורך החיים החדש של הטלפונים ומהי סטיית התקן החדשה, לאחר ההגדלה?

ח. (2) מצאו את אחוז הטלפונים שאורך החיים שלהם קטן מ-18 חודשים, לאחר ההגדלה.

בשתי מילים: אין הפתעות.

השאלה נפתחת בסעיף אומנם איכותני באופי שלו, אבל

מאוד פשוט.

לאחריו מופיעים סעיפים מוכרים מאוד בהתפלגות נורמלית

שמזכירים מועדים קודמים-

1. מציאת ערך גולמי לפי אחוז נתון (3.5%)

2. מציאת האחוז המשלים בטבלת Z, ויחד עם נתון לגבי

הסה"כ - הפיכת האחוז לכמות ממשית.

3. טרנספורמציה של כפל פי 1.5 (טרנספורמציה קלה

יותר לתלמידים מאחוזים, אל תקצרו להם את הדרך

בתרגילים שהיא מתוארת כאחוז).

הערה חשובה: חשוב לעבוד עם תלמידים על

מעבר מאחוזים לשבר עשרוני בטבלה.

אומנם במספרים נוחים זו לא בעיה, אבל כשהאחוז

הוא 3.5% רבים מהם יחפשו את הערך 0.350

במקום את הערך 0.035.

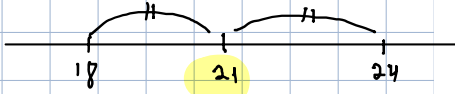
גם בסעיף א' של השאלה, מופיע בגרף 22.7% על

פניו המעבר לעשרוני קל, אבל תלמידים פזיזים

יתקלו בעמודה הראשונה בטבלה בתא 0.0227

ובקלות עלולים להתבלבל....

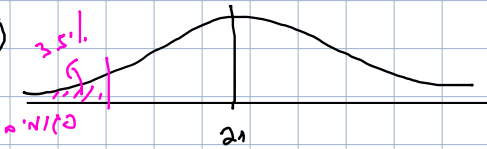
1c)



$$\begin{array}{l} \% \quad 22.7 \\ p \quad 0.227 \\ z \quad -0.75 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \% \\ p \\ z \end{array}} \right\} \quad \frac{18 - 21}{4} = -0.75$$

$$\frac{-3}{-0.75} = 4 = s$$

2c)

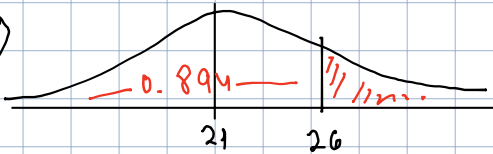


$$\begin{array}{l} \% \quad 3.5 \\ p \quad 0.035 \\ z \quad -1.81 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \% \\ p \\ z \end{array}} \right\} \quad \frac{x - 21}{4} = -1.81$$

$$x = 4 \cdot (-1.81) + 21$$

$$x = 13.76$$

3c)



$$\frac{26 - 21}{4} = 1.25$$

$$\begin{array}{l} \% \quad 0.8944 \\ p \quad 0.8944 \\ z \quad 1.25 \end{array} \quad 1 - p = 0.106$$

$$2000 \cdot 0.106 = 212$$

$$1) \quad \bar{x} = 21 \cdot \frac{1}{2} = 21.5$$

$$s = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$2) \quad \frac{18 - 21.5}{2} = -1.75$$

$$z = 0.0122 \rightarrow 1.22\%$$

מרחק הקפיצה הממוצע היה 4.6 מטרים.

69.2% מן המשתתפים קפצו למרחק קטן מ-4.8 מטרים.

א. מצאו את סטיית התקן של מרחק הקפיצה.

המשתתפים שמרחק הקפיצה שלהם היה גדול מ-5.24 מטרים זכו במדליה.

ב. מהו אחוז המשתתפים שזכו במדליה?

נתון כי 11 משתתפים זכו במדליה.

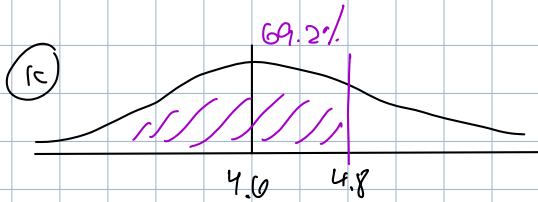
ג. על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית, כמה משתתפים התחרו בקפיצה לרוחק?

בבית הספר נערכה גם תחרות קפיצה לגובה. גם בתחרות זו התוצאות שהשיגו המשתתפים התפלגו נורמלית.

גובה הקפיצה הממוצע היה 1.5 מטרים, וסטיית התקן הייתה 0.2 מטר.

אלון השתתף בשתי התחרויות. התוצאה שלו בקפיצה לרוחק הייתה 5 מטרים ובקפיצה לגובה 1.75 מטרים.

ד. באיזו מן התחרויות, קפיצה לרוחק או קפיצה לגובה, הייתה התוצאה של אלון מדורגת במקום גבוה יותר בהשוואה למשתתפים האחרים? נמקו את תשובתכם.



$$p: 0.692$$

$$z = 0.5$$

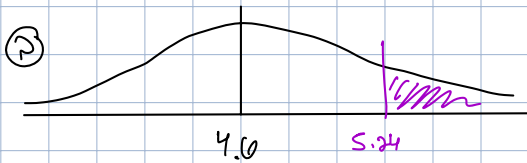
$$\frac{4.8 - 4.6}{s} = 0.5$$

$$0.2 = 0.5 \cdot s$$

$$0.4 : 5$$

שאלה מתונה ורכה לפתיחת השאלון.
סעיפים ראשון ושני קלאסיים ופשוטים.

הסעיף של חישוב כמויות התיחס הפעם לכמות של חלק מהאוכלוסיה, ועל פיה חישוב של כל האוכלוסיה. חשוב לתרגל עם התלמידים את שני הכיוונים - חישוב חלק משלם, וחישוב שלם על פי חלקו.



$$z = \frac{5.24 - 4.6}{0.4} = 1.6$$

$$p = 0.9450 \quad 1 - 0.9450 = 0.055 \rightarrow 5.5\%$$

הסעיף האחרון היה שאלה של השוואת ציוני תקן זה לזה - שילוב מעניין של ציוני התקן בבגרות. מבחינת החישוב השאלה היתה קלה, כמעט טריוויאלית, ואפילו לא דרשה לחזור לטבלה. מצד שני, העובדה שרוב מכריע של תלמידים כן חזר לטבלה אומרת דרשני...

התלמידים לא ערים לעובדה שאפשר להתייחס לציוני תקן ללא הטבלה. חשוב להביא בכיתה דוגמאות נוספות לשאלות דומות.

דרך נוספת להבין ציוני תקן בלי הטבלה היא לשנות את סדר ההוראה וללמד ציוני תקן לפני ולא אחרי התפלגות נורמלית.

$$\text{c)} \quad 11 \rightarrow 5.5\% \quad \frac{11 \cdot 100}{5.5} = 200$$

$$x \rightarrow 100\%$$

$$\text{d)} \quad z = \frac{1.75 - 1.5}{0.2} = 1.25 \quad \text{ז'פ'נה לאיה}$$

$$z = \frac{5 - 4.6}{0.4} = 1 \quad \text{ק'פ'נה לחחק}$$

אלון מפורג גבוה יותר מק'פ'נה לאיה.