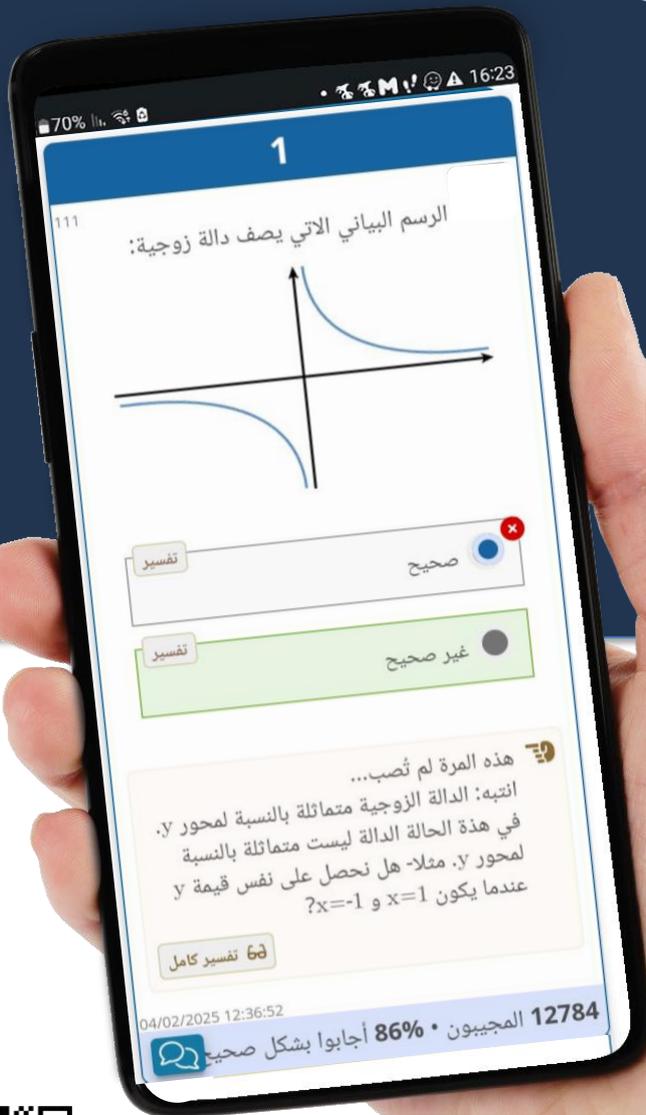


نموذج 471 التوزيع الطبيعي



Classit



واتساب للدعم



فتح حساب معلم



العلامة المعياريّة (علامات z)

معروضة



في قسم الإحصاء الوصفي تعلمنا أن ننظر إلى قيم متغيّر معيّن، على سبيل المثال علامة في إمتحان معين، وتعلّمنا أيضا أن نحسب مقاييس مختلفة وفقا لقيم المتغيّر: التكرارية، المعدّل، الوسيط، الانحراف المعياريّ الخ. بالرغم من ذلك، فإنّه في بعض الأحيان، القيمة الحقيقيّة للمتغير لا تدلّنا على الكثير من الأشياء.

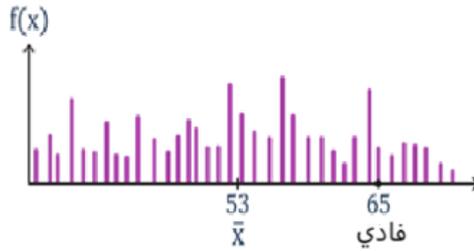
مثلاً، طالب معين في التخنيون والذي اسمه فادي حصل على علامة 65 في امتحان صعب جدّاً في الكيمياء العضوية – هل هذا يعني بأنّه حصل على علامة متدنيّة؟ ممكن أن تكون الإجابة نعم، ولكن ليس بالتأكيد. على سبيل المثال، إذا تبيّن بأنّ معدّل العلامات في هذا الامتحان كان 53، والطالب حصل على أعلى علامة في الصف، إذا ممكن أن ننظر بطريقة مختلفة على العلامة 65.

هذا المثال يبين لنا ضرورة مقارنة القيمة التي حصلنا عليها مع بقيّة القيم في التوزيع، حتى نحدّد ما إذا كانت العلامة 65 هي علامة "جيدة" أو "سيئة". من خلال هذا المثال رأينا بأنّه من الضروريّ مقارنة العلامة مع المعدّل في الصف، ولكن هل هذا كافٍ حتى نحدّد ما إذا كانت العلامة مرتفعة أم متدنيّة؟

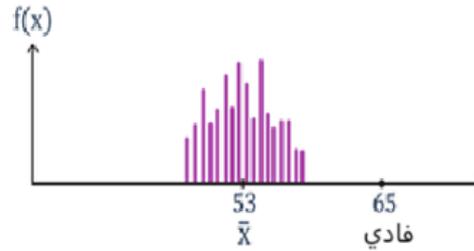
نفترض بأنّ فادي حصل على علامة 65 في امتحان الفيزياء، ونفترض أيضاً بأنّ معدّل العلامات في هذا الامتحان أيضا كان 53 ... هل من الممكن أن نحدّد حسب هذه المعطيات، بأنّ فادي نجح في الامتحان بنفس المقدار؟

ليس بالضرورة. إذا كانت قيمة الانحراف المعياري في الامتحان الأول صغيرة جدا، نفترض $2=S$ ، وقيمة الانحراف المعياري في الامتحان الثاني كبيرة جدا، نفترض $12=S$ ، هذا سوف يغيّر استنتاجاتنا. في الرسمين ستبدو المعطيات بهذا الشكل:

فيزياء



الكيمياء العضويّة



نرى بشكل واضح بأنّ فادي يبرز أكثر في امتحان الكيمياء العضوية: علامته عالية جدا بالمقارنة مع بقيّة العلامات في الصف.

في امتحان الفيزياء، علامته مرتفعة أيضاً، ولكنها ليست استثنائية. بكلمات أخرى – إذا قمنا بمقارنة علامة فادي مع بقيّة العلامات في الصف، فإنّ علامته في الكيمياء العضوية أعلى بكثير من علامته في الفيزياء. ماذا تعلمنا؟ لكي نحدّد بالنسبة لقيمة معينة، لأيّ مدى هي بارزة أو استثنائية، علينا مقارنتها بمعدل التوزيع وأيضا بتوزيع كل المشاهدات حول المعدّل. هذا ما يوفره لنا هذا القانون:

$$Z = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$$

بُعد المشاهدة
عن المعدل

توزيع جميع المشاهدات
حول المعدل

نرى من خلال القانون المثال الذي تحدثنا عنه سابقاً: حتى نفحص لأيّ مدى علامة فادي استثنائية أو مختلفة عن بقيّة العلامات، نفحص بُعدها عن المعدّل (إذا كانت أكبر أو أصغر من المعدل). بعد معرفة بُعد العلامة عن المعدّل، نفحص هل هذا البعد كبير أم صغير مقارنة ببعد بقيّة العلامات عن المعدّل. (المقياس الذي يدلّ على توزيع كلّ المشاهدات حول المعدّل يُسمّى – الانحراف المعياريّ).

انتبهوا:

القانون أعلاه يمكننا أن نعبّر عن بُعد علامة فادي عن المعدل بوحدات الانحراف المعياري:
في الكيمياء العضوية ($S=2$) علامة فادي تبعد 6 وحدات من الانحراف المعياري عن المعدل.
في الفيزياء ($S=12$) علامة فادي تبعد وحدة واحدة فقط من الانحراف المعياري عن المعدل.
هذا البعد، والذي نقيسه بـ "قفزات" الانحراف المعياري، يسمى العلامة المعيارية، ونرمز له بالحرف Z.
نحسب بواسطة القانون العلامات المعيارية لفادي:

العلامة المعيارية
لفادي في الكيمياء

$$Z = \frac{x_i - \bar{x}}{S} = \frac{65 - 53}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

العلامة المعيارية لفادي
في الفيزياء

$$Z = \frac{x_i - \bar{x}}{S} = \frac{65 - 53}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

في القانون (وأيضا في الرسم) نرى بأن فادي حصل على علامة أعلى من المعدل في كلا الامتحانين. ولكن علامته في امتحان الكيمياء العضوية كانت "أعلى" نسبياً من علامته في الفيزياء (على الرغم من أنه حصل على نفس العلامة في الامتحانين).

تشديدات:

- عندما تكون العلامة المعيارية موجبة – هذا يعني بأن المشاهدة تقع فوق المعدل.
كلما كانت قيمة العلامة المعيارية أكبر فإنّ هذا يدلّ على أنّ المشاهدة تبعد أكثر عن المعدل.
- عندما تكون العلامة المعيارية سالبة – هذا يعني بأن المشاهدة تقع تحت المعدل.
كلما كانت قيمة العلامة المعيارية أصغر (سالبة أكثر) فإنّ هذا يدلّ على أنّ المشاهدة تبعد أكثر عن المعدل، نحو الأسفل.
- عندما تكون قيمة العلامة المعيارية هي 0 – هذا يدلّ بأنّ المشاهدة مساوية تماماً للمعدل.

التغيير في القيم والعلامات المعيارية

ظاهرة أخرى مثيرة للاهتمام، هي الحقيقة بأنه إذا أجرينا تحويل خطي على القيم (جمع/ طرح/ ضرب/ قسمة) فإنّ العلامة المعيارية لا تتغير.
العلامة المعيارية لفادي في الكيمياء هي $Z=6$ ، ولكنّ المحاضر قرّر بأن يمنح 10 علامات إضافية لكلّ الطلاب بسبب نسبة الفشل العالية في الامتحان. ماذا سوف تكون العلامة المعيارية الجديدة لفادي؟
العلامة المعيارية لفادي لن تتغير.
وإذا أضاف المحاضر لكلّ العلامات علامة مضافة (بونوس) بنسبة 10%؟ أيضاً في هذه الحالة علامة فادي المعيارية لن تتغير. وإذا قرر المحاضر بأن يضاعف علامة كلّ طالب؟ فهتمم الفكرة.
ولكن لو قرّر المحاضر أن يضيف علامات فقط للطلاب الذين حصلوا على علامة أقل من 55؟ هذا لا يسمى تحويل خطي! في هذه الحالة العلامة المعيارية لفادي سوف تتغير.

نقطة مهمة أخيرة

في المثال الذي ذكرناه علمنا ما هي علامة فادي ($x_1 = 65$)، المعدل ($\bar{x} = 53$)، والانحراف المعياري ($S = 2$) وبواسطتهم حسبنا العلامة المعيارية. ولكن لن يكون لدينا نفس الحالة دائماً! أحيانا يكون معطى لدينا قيم أخرى في القانون، وبناءً عليهم يجب علينا أن نحسب الانحراف المعياري، المعدل أو العلامة نفسها.



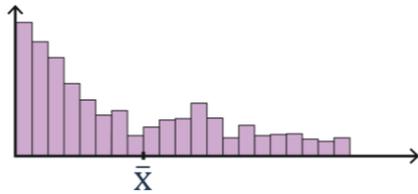
علامة معيارية | تلخيص



علامة معيارية | أساس

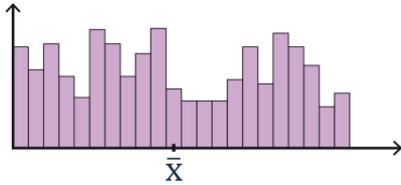
فهم العلامة المعيارية بمساعدة رسم بياني

حسب المعلم العلامات المعيارية لأربعة طلاب في امتحانين. في كل واحد من البنود التالية وصف للرسم البياني للتوزيع. أشيروا بشكل تقريبي على الرسم إلى موقع كل واحد من الطلاب الأربعة.



| الطالب | العلامة المعيارية |
|--------|-------------------|
| شادي | 2.5 |
| عدي | -1.5 |
| حسام | 0 |
| فريد | -0.5 |

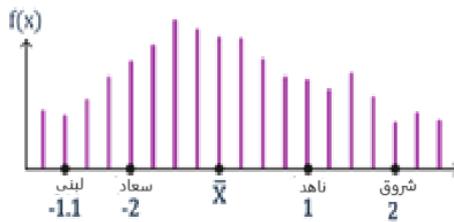
ب.



| الطالب | العلامة المعيارية |
|--------|-------------------|
| شادي | 1.2 |
| عدي | 3 |
| حسام | -2.4 |
| فريد | -1 |

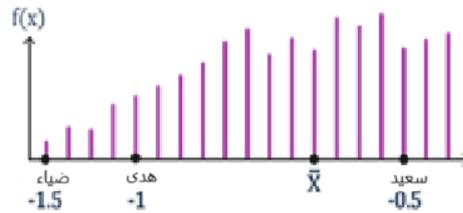
2. في الرسوم البيانية التالية تظهر العلامات المعيارية لعدة طلاب. وقعت أخطاء في قسم من العلامات المعيارية، أشيروا إلى الخطأ وشرحوها.

فسّر



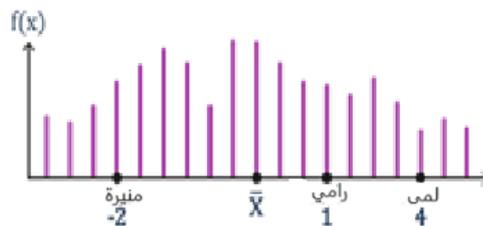
أ.

فسّر



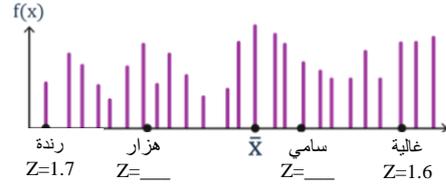
ب.

فسّر

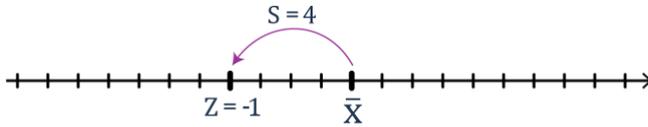


ج.

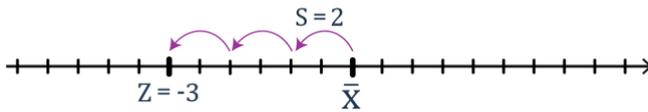
3. في الرسم البياني التالي تظهر العلامات المعيارية لعدة طلاب. العلامات المعيارية لسامي وهزار حُذفت، اقترحوا قيم ممكنة لعلاماتهم المعيارية.



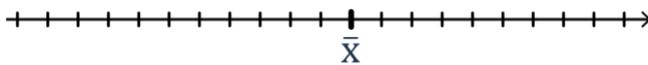
4. في كل واحد من البنود التالية معطى رسم بياني. عينوا نقاط ملائمة على الرسم حسب التعليمات في كل بند.



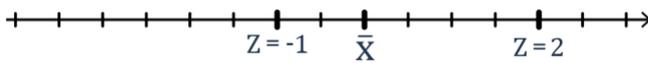
أ. أشيروا إلى العلامة المعيارية
 $z = 1$ $z = 1.5$ $z = -2$



ب. أشيروا إلى العلامة المعيارية
 $z = 1.5$ $z = 3$ $z = -5$



ت. معلوم بأن الانحراف المعياري هو 1.5. أشيروا إلى العلامة المعيارية
 $z = -2$ $z = 3$ $z = -5$



ث (1) احسبوا العلامة المعيارية

(2) أضيفوا العلامة المعيارية

$z = 1.5$ $z = 3$

ب. حساب العلامات المعيارية بواسطة القانون: $Z = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$

1. أجرت المعلمة امتحانين للطلاب، في الموضوعين الرياضيات والإنجليزية، ثم حسبت المعدل والانحراف المعياري لكل امتحان. احسبوا بواسطة المعطيات أدناه العلامات المعيارية للطلاب الآتية:

| إمتحان اللغة الانجليزية المعدّل 82 والانحراف المعياري 2 | إمتحان الرياضيات المعدّل 75 والانحراف المعياري 5 |
|--|---|
| رَبى حصلت على 88، علامتها المعيارية هي: _____ | رَبى حصلت على 88، علامتها المعيارية هي: _____ |
| لميس حصلت على 80، علامتها المعيارية هي: _____ | لميس حصلت على 75، علامتها المعيارية هي: _____ |
| هدير حصلت على 90، علامتها المعيارية هي: _____ | هدير حصلت على 90، علامتها المعيارية هي: _____ |
| ليلى حصلت على 65، علامتها المعيارية هي: _____ | ليلى حصلت على 65، علامتها المعيارية هي: _____ |

فارنوا بين العلامتين المعياريتين لكل طالبة في الامتحانين، وحددوا لكل طالبة هل هي أفضل في الرياضيات أم في اللغة الإنجليزية.

هدير أفضل في - _____

رَبى أفضل في - _____

ليلى أفضل في - _____

لميس أفضل في - _____

2. معطى بأن زينة حصلت على علامة 86 في كلّ الامتحانات التي تقدّمت لها.
أ. حدّدوا بناءً على معطيات الامتحانات التالية ما هي العلامة المعيارية لزينة في كلّ إمتحان.

| | | |
|-------|----------------------|---|
| _____ | علامة زينة المعيارية | امتحان القواعد: المعدل 81 الانحراف المعياري 1 |
| _____ | علامة زينة المعيارية | امتحان الادب: المعدل 92 الانحراف المعياري 3 |
| _____ | علامة زينة المعيارية | امتحان الرياضيات: المعدل 80 الانحراف المعياري 1.5 |
| _____ | علامة زينة المعيارية | امتحان الفيزياء: المعدل 76 الانحراف المعياري 4 |
| _____ | علامة زينة المعيارية | امتحان التربية البدنية: المعدل 95 الانحراف المعياري 1.2 |

ب. في أي امتحان نجحت زينة بأقصى حد؟

في أي امتحان نجحت زينة بأدنى حد؟

ت. حساب المعدل، الانحراف المعياري، العلامة الحقيقية والعلامة المعيارية بواسطة القانون.

3. المعطيات أدناه تتعلق بوزن الرزم التي يتم إرسالها في البريد.
في كلّ سطر معطى 3 معطيات من بين المعدل، الانحراف المعياري، العلامة الخام (الحقيقية) والعلامة المعيارية. يجب أن تكملوا المعطى الناقص في كلّ سطر وفقاً للقانون.

| z العلامة المعيارية | x_1 العلامة الخام (الحقيقية) | s الانحراف المعياري | \bar{x} المعدل | |
|--------------------------|--------------------------------------|--------------------------|---------------------|-----|
| | 24 | 4 | 21 | أ. |
| 2.25- | | 6 | 31.5 | ب. |
| 1.4 | 14.1 | 1.5 | | ج. |
| -2 | 3.5 | | 8 | د. |
| | 37.4 | 2 | 40 | هـ. |
| 2.5- | 12 | | 22 | و. |
| 2.5 | | 0.8 | 16 | ز. |
| 0.2- | 3.9 | 3 | | ح. |



توزيعات متصلة

معرضة



المتغير المنفصل والمتصل

حتى الآن، تعاملنا في الأساس مع المتغيرات المنفصلة، على سبيل المثال: عدد الأطفال في الأسرة، عدد الشرفات في الشقة، عدد السيارات في الشارع، وما إلى ذلك. ومع ذلك، فإن العديد من المتغيرات هي متغيرات متصلة - على سبيل المثال، الوزن، الطول، درجة الحرارة، الخ.

المتغير المنفصل هو المتغير الذي لا يحتوي على أي قيم إضافية بين أي قيمتين متجاورتين (طفل واحد، طفلان). **المتغير المتصل** هو المتغير الذي بين أي قيمتين له (1.70 سم، 1.71 سم) يوجد عدد لا نهائي من القيم الإضافية الممكنة.

من السهل جداً قياس المتغير المنفصل، وإحصاء قيم المتغير: طفل واحد، طفلان، ثلاثة أطفال... ولكن الامر أكثر تعقيداً بما يتعلق في المتغير المتصل.

على سبيل المثال، في الناصرة قامت ممرضة المدرسة بقياس أطوال جميع أطفال الصف التاسع في مدرسة ثانوية معينة، وسجلت البيانات في دفترها، وبين الأمور التي سجلتها: عادة - 163 سم.

هل طول عادة 163 سم؟ بالضبط؟ أو ربما يبلغ طولها 163.001 سم؟ أو 163.00138627 سم؟

من الصعب التأكد من القيمة الدقيقة لطول عادة. والحقيقة هي أن الأمر يعتمد في الغالب على مدى دقة جهاز القياس الذي تستخدمه الممرضة.

لكن عادة هي مجرد مثال يعكس مشكلة أوسع نطاقاً - في الواقع، إنه من الصعب وحتى من المستحيل قياس متغير متصل بدقة، لأنه يمكن دائماً إجراء القياسات بشكل أكثر دقة لا نهاية من المرات.

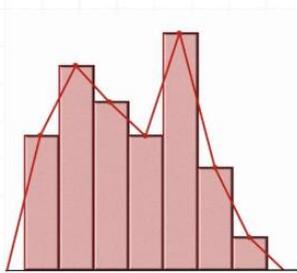
لحل هذه المشكلة، لن نتطرق لقيم محددة في المتغيرات المتصلة، بل إلى مجال محدد من القيم. في المثال أعلاه، نقول بأن طول عادة يقع في المجال بين 162.5 سم و 163.5 سم.

التمثيل البياني للمتغير المتصل

عندما تعاملنا مع المتغير المنفصل، وصفنا تكرارته في جدول التكرارية، وبناءً على ذلك، قمنا ببناء مخطط أعمدة. يمكننا أن نرى أنّ هناك مسافة بين الأعمدة في الجدول - لأنّ المتغير ليس متصلاً.

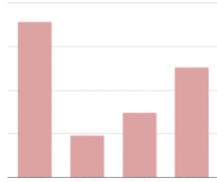
من ناحية أخرى، عندما ننتقل إلى وصف متغير متصل - لن يكون هناك مسافات بين القيم.... لأن المتغير متصل! لتمثيل المتغير، نقوم أولاً بتعيين المجالات في الجدول، ثم نعرضها في تمثيل بياني الذي يسمى هيستوجرام:

متغير متصل



| التكرارية | قيمة المتغير |
|-----------|--------------|
| 40 | 0.5-1.5 |
| 60 | 1.5-2.5 |
| 50 | 2.5-3.5 |
| 42 | 3.5-4.5 |
| 75 | 4.5-5.5 |
| 35 | 5.5-6.5 |
| 12 | 6.5-7.5 |

متغير منفصل

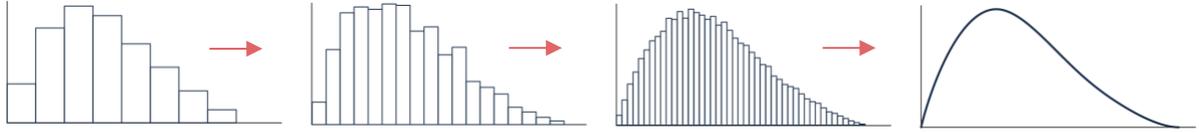


| التكرارية | قيمة المتغير |
|-----------|--------------|
| 40 | 1 |
| 10 | 2 |
| 20 | 3 |
| 30 | 4 |

يمكن أن نرى في الرسوم البيانية، أنه توجد "مسافات" بين الأعمدة في مخطط الأعمدة، ولكن في الهيستوجرام تكون الأعمدة مجاورة لبعضها البعض. وهذا منطقي أيضاً - في المتغير المتصل، لا توجد مسافات بين القيم - هناك استمرارية وتواصل.

الانتقال من الهستوجرام إلى المنحنى المتصل (المنحنى السلس)

الهستوجرام (المخطّط البياني) هو شكل من أشكال العرض والذي يناسب بشكل أساسي العيّنات الصغيرة. ولكن إذا أردنا مثلاً وصف السكان بطريقة عامة أكثر، أيّ عندما نريد أن نعرف كيف يبدو التوزيع العام للسكان، نحتاج إلى إيجاد الدالة العامة لتوزيع السكان. لوصف هذه الدالة، يجب أن نقلص عرض الأعمدة أكثر فأكثر - كلما قللناها أكثر، نحصل على توزيع مع "قفزات" أقل، حتى نحصل في النهاية على توزيع سلس تماماً، أيّ بما يُسمّى بالمنحنى المتصل.



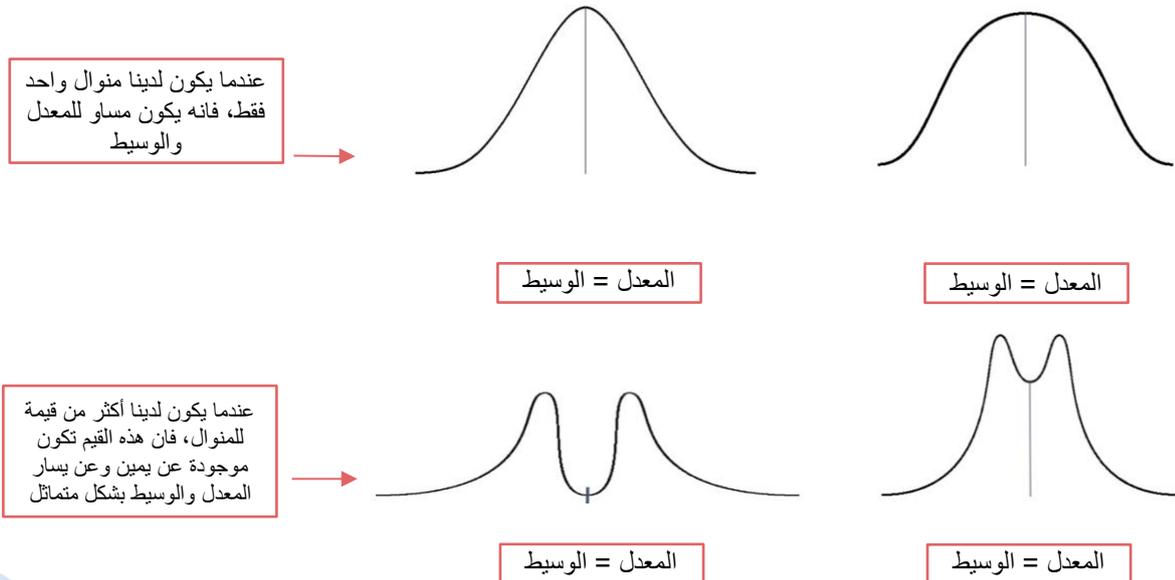
والتوزيع الناتج في النهاية هو في الواقع دالة، والتي تصف تركيز القيم في كلّ منطقة من الرسم البياني.

نقاط مهمة

1. تسمى التوزيعات المتصلة "توزيع الكثافة" أو "توزيع الاحتمالات" وهي تصف شكل توزيع قيم المتغير في المجتمع. وبكلمات أبسط، فهي بمثابة "أشعة سينية" (رنتجن) لكامل المجتمع: بمساعدتها، على سبيل المثال، من الممكن تحديد النسبة المئوية للسكان الذين يتراوح طولهم بين 1.70 و 1.72 متراً، أو النسبة المئوية للسكان الذين من المتوقع أن يتقاعدوا بين سن 65 و 67 عاماً. وأيضاً - ما هو احتمال إصابة شخص بأمراض القلب بين سن 30 إلى 50 عاماً؟ بكلمات أخرى، بمساعدة التوزيع المتصل، يمكننا الحصول على إجابات لأسئلة عملية وقابلة للتنفيذ في العالم من حولنا.
2. التوزيعات المتصلة التي سنتعامل معها تظهر دائماً مساحة 100% بين المنحنى ومحور x .

التوزيعات المتماثلة وموقع المقاييس المركزية

في التوزيعات المتماثلة، يكون انتشار القيم أعلى وأسفل مركز التوزيع هو نفسه تماماً، فهو عبارة تماماً عن صورة مرآة. وبالتالي، فإن المعدل والوسيط يقعان في مركز التوزيع، في نفس النقطة:



التوزيعات غير المتماثلة وموقع المقاييس المركزية

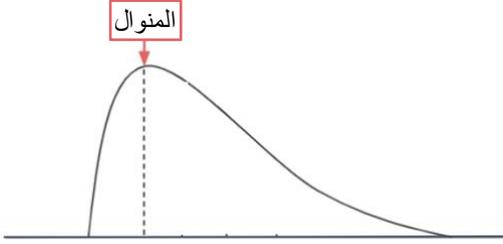
عندما يكون التوزيع غير متماثل، سنبدأ المقاييس المركزية في الابتعاد عن بعضها البعض، ولن تكون موجودة في نفس النقطة في مركز التوزيع. أمامنا توزيع غير متماثل مع ذيل نحو اليمين. يمكن أن نرى أنه في هذا التوزيع معظم القيم منخفضة، وهناك ذيل طويل من القيم الكبيرة والموجودة على اليمين.

نجد موقع المقاييس المركزية في هذا التوزيع:

1. أولاً، سنحدد مكان المنوال.

المنوال يقع في أعلى نقطة!

تحديد المنوال يعتبر الأسهل والأبسط نسبياً.



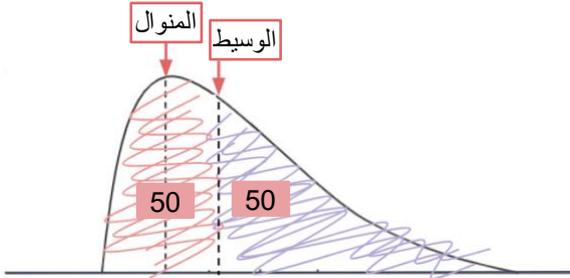
2. أين يقع الوسيط؟

يقسم الوسيط التوزيع إلى قسمين متساويين في المساحة:

50% من القيم تقع حتى نقطة الوسيط،

و 50% من القيم تقع ابتداء من الوسيط إلى نهاية التوزيع.

في هذه الحالة، نحتاج إلى تعيين الوسيط في يمين المنوال قليلاً:



3. وأخيراً المعدل:

المعدل هو المقياس الأكثر حساسية في التوزيع.

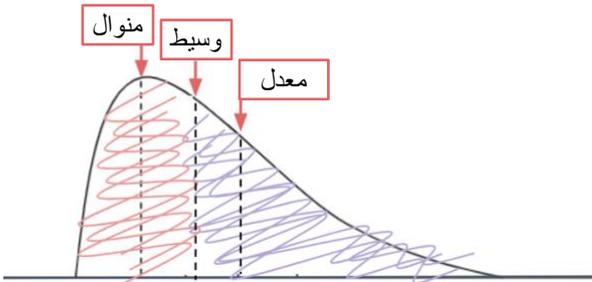
ماذا يعني هذا؟

كلما حركنا القيم "في ذيل" التوزيع إلى اليمين أكثر فأكثر -

سوف يتأثر المعدل بشكل كبير جداً.

القيم المتطرفة الموجودة على اليمين تجذب المعدل إليها بشكل كبير،

ونتيجة لذلك فإنه سوف يبتعد أكثر إلى اليمين نسبة للوسيط:

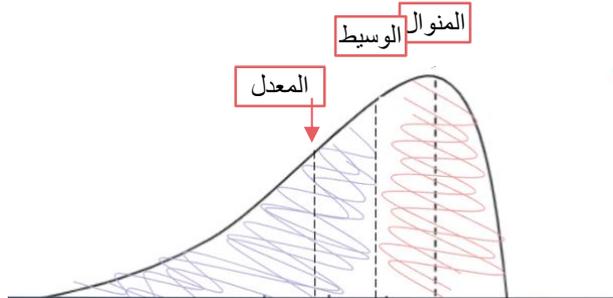


انتبهوا!

عندما يكون التوزيع غير متماثل سالب (أي توزيع غير

متماثل مع ذيل أيسر)، النسبة بين المقاييس تنعكس مع اتجاه

التوزيع.





التوزيع المتمائل وغير المتمائل

- أ. موقع المقاييس المركزية في التوزيعات
1. أمامكم توزيعان يوضحان درجات الحرارة اليومية التي يتم قياسها في دولتين مختلفتين، بين السنوات 1990 - 2012. من المعلوم أنه في كلا التوزيعين المنوال هو 36 درجة.



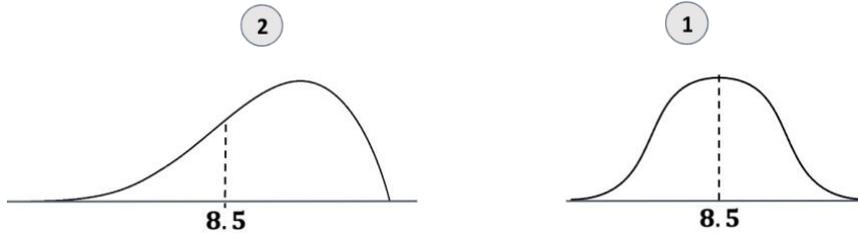
أ. هل من الصحيح أن نقول بأن الوسيط مساويا أيضا لـ 36 في كلا التوزيعين؟
نعم. / لا. فسر إجابتك

ب. هل من الصحيح أن نقول بأن المعدل مساويا أيضا لـ 36 في كلا التوزيعين؟
نعم. / لا. فسر إجابتك

ت. هل من الصحيح القول بأن المعدل في التوزيع رقم 2 أكبر من المتوسط؟
نعم. / لا. فسر إجابتك

ث. عينوا على التوزيعات المتوسط ، المنوال والمعدل (الموقع التقريبي).

2. أمامكم توزيعان يعرضان مستوى الأجور في مصنعين مختلفين. يبلغ وسيط الأجور في كلا المصنعين 8.5 ألف شيكل. حدّد بجانب كلّ جملة من الجمل أدناه ما إذا كانت صحيحة بالتأكيد، ليست صحيحة بالتأكيد أو لا يمكن المعرفة.

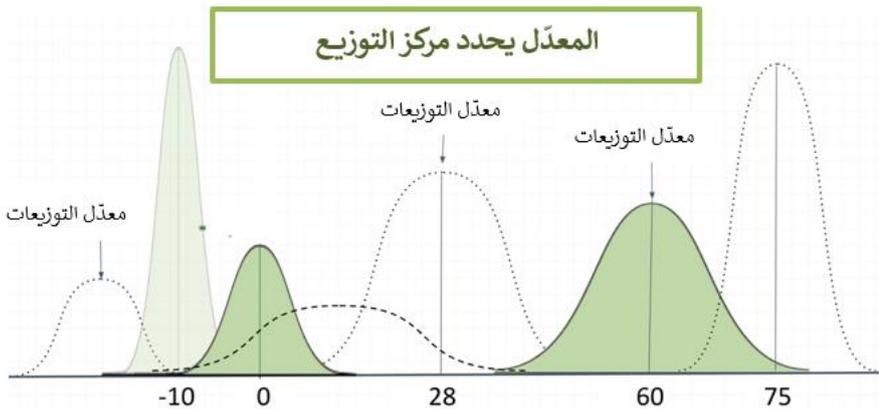


- أ. في التوزيع 1 جميع المقاييس المركزية متساوية.
- ب. المعدل متساوي في كلا التوزيعين
- ت. في التوزيع 2، المعدل أقل من المنوال
- ث. في التوزيع 2، الوسيط أقل من المعدل
- ج. المعدل في التوزيع 1 أكبر من المنوال في التوزيع 2
- ح. المنوال في التوزيع 2 يساوي 10 آلاف شاقلي شهريا
- خ. المنوال في توزيع 2 يساوي 8 آلاف شاقلي شهريا
- صحيح / خطأ / من غير الممكن المعرفة.
- صحيح/ خطأ / من غير الممكن المعرفة.
- صحيح/ خطأ / من غير الممكن المعرفة.
- صحيح / خطأ / من غير الممكن المعرفة.
- صحيح / خطأ / من غير الممكن المعرفة.
- صحيح / خطأ / من غير الممكن المعرفة.
- صحيح / خطأ / من غير الممكن المعرفة.

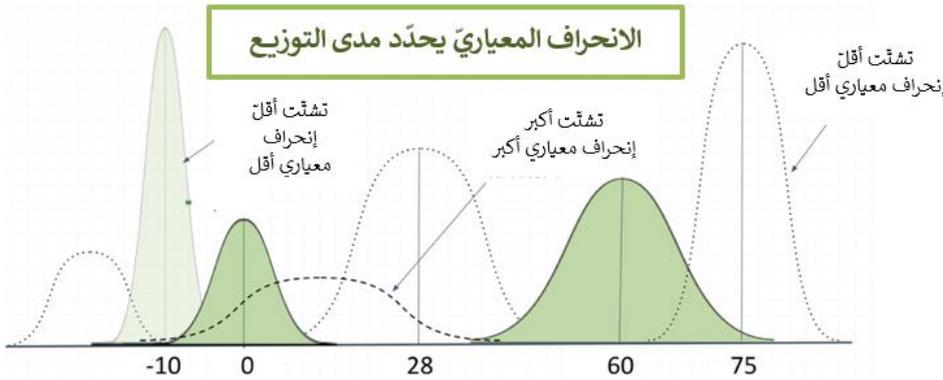


التوزيع الطبيعي

من بين جميع التوزيعات المتصلة، هناك توزيع واحد هو الأكثر شهرة في العالم - وهو التوزيع الطبيعي. يساعد التوزيع الطبيعي في وصف العديد من الظواهر التي تحيط بنا، ويسمح لنا بإجراء الدراسات الإحصائية واستخلاص النتائج منها. فيما يلي توزيعات طبيعية مختلفة:



يمكن أن نرى في الرسم أن هناك الكثير من التوزيعات الطبيعية. موقع التوزيع على محور X يحدّد المعدل.

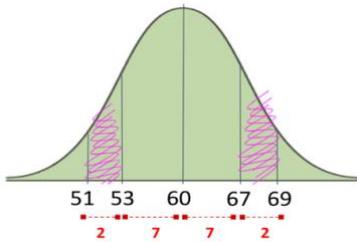
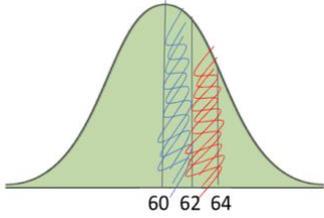
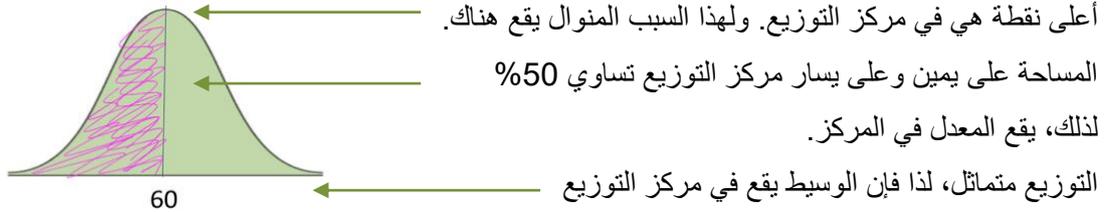


يتم حساب تشّتت المشاهدات حول المعدل من خلال الانحراف المعياري. في التوزيع الطبيعي، يحدّد الانحراف المعياري عرض الجرس - كلما كان الانحراف المعياري أكبر، كان عرض الجرس أكبر، والعكس صحيح.

نقاط هامة:

1. التوزيع متماثل.
2. بما أن التوزيع متماثل: المعدل، الوسيط والمنوال متساوون مع بعضهم البعض.
3. كلما ابتعدنا عن المركز، تقلّ كثافة القيم (تركيز القيم).
4. مساحة التوزيع الطبيعي هي 1. نعبّر عن هذه المساحة كنسبة مئوية، أي أنّ المساحة بين التوزيع ومحور X هي 100%.

سنوضح خصائص التوزيع الطبيعي.

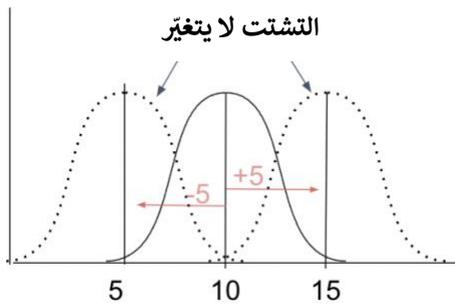


إزاحات على دوال متصلة:

أ. إضافة وتنقيص:

عند زيادة قيمة ثابتة لكل قيم التوزيع، مثلاً إذا كبرت كل قيم التوزيع بـ 5، إذا كل التوزيع سيتم إزاحته 5 وحدات يمينا على محور X.
لذا، يمكننا القول أيضاً أنّ المنوال، الوسيط والمعدل يكبرون بـ 5.

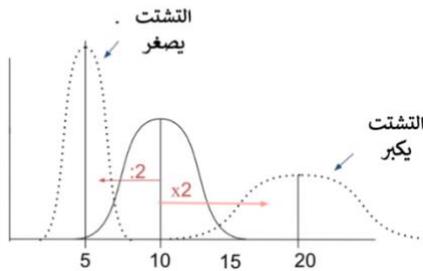
مع هذا يجب الانتباه بأن التشتت لم يتغير، أي أن الانحراف المعياري لا يتغير ويبقى كما كان.



ب. الضرب والقسمة:

عند ضرب كل قيم التوزيع بعدد أكبر من 1 كل القيم سوف تكبر. ومعهم يكبر المنوال، الوسيط والمعدل، كما هو الحال بالنسبة للإضافة والنقصان أيضاً عند عملية الضرب سوف يتم إزاحة التوزيع على طول محور X.

لكن في عملية الضرب يحدث شيء آخر: تشتت القيم من حول المعدل سيكبر. وهذا يعني أنه لا تزداد القيم نفسها فحسب، بل يزداد أيضاً بعدها عن المركز وعن بعضها البعض. ولذلك من الواضح لما في مثل هذه الحالة سيكبر الانحراف المعياري، أي أن مدى (عرض) منحنى التوزيع الطبيعي سيزداد.



ولكن لماذا ارتفاع المنحنى ينخفض؟

من المهم أن نتذكر - بما أنه يجب الحفاظ على مساحة التوزيع (فهي تمثل دائماً 100%)، وبما أن العرض يزداد، يجب أن ينخفض ارتفاع المنحنى...

بعض الملاحظات (فقط للمعلمين):

1. مرفق معادلة التوزيع الطبيعي. ليس من الضروري أن نتذكرها أو نعرفها، ولكن تم ارفاقها حتى ننتبه أن التوزيع الطبيعي ليس أمرًا عشوائيًا، بل هو عبارة عن دالة مركبة نوعا ما:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

2. من المهم أن نتذكر أن التوزيع الطبيعي هو في الواقع دالة نظرية، أي أنه ليس توزيعًا تم الحصول عليه على أساس مجموعة قيم حقيقية من المعلومات التي أخذناها من فئة سكانية. في مجموعة قيم حقيقية من المعلومات التي أخذناها من فئة سكانية، غالبًا ما نحصل على رسم بياني "قريب إلى قيم طبيعية". كلما أخذنا عينة من مجموعة سكانية أكبر، وبافتراض أن المتغير يتوزع بشكل طبيعي، سيتم الحصول على توزيع يقترب أكثر فأكثر من التوزيع الطبيعي النظري.

ومع ذلك، في معظم الأسئلة في هذا الفصل وفي أسئلة البجروت – نتجاهل هذا الاختلاف بين العينة والفئة السكانية، وفي العينات "الكبيرة" سنتعامل مع العينة نفسها كما لو كانت تتوزع بشكل طبيعي حقًا.

3. التوزيع الطبيعي هو توزيع لا نهائي على جانبي المعدل، ويمتد على شكل خط تقارب بالنسبة لمحور x . بشكل عام لا نتطرق إلى الأجزاء التي تكون أكثر من 3 انحرافات معيارية عن يمين أو يسار المعدل، إذ من الممكن إهمالها.

4. يجب الانتباه أننا سنتعامل فقط مع التوزيعات التي تمثل مساحتها 100% من الحالات. تسمى هذه التوزيعات "التوزيعات الاحتمالية" مساحتها تمثل احتمال الحصول على قيم المتغير.

5. هناك أيضًا توزيعات طبيعية تعكس مساحتها التكرار "الحقيقي" وليس النسبي، أي التوزيعات التي تعكس مساحتها تعداد السكان الفعلي (على سبيل المثال، يمكن وصف توزيع طول السكان في قارة أمريكا، حيث ستعكس مساحة التوزيع الطبيعي التعداد السكاني في قارة أمريكا وهو 1,035,298,985 نسمة) هذا الفرق بين التوزيعات المختلفة يشبه الفرق بين الجدول التكراري وجدول التكرارية النسبية.



عائلة التوزيعات
الطبيعية | تلخيص



إزاحات في التوزيع
الطبيعي



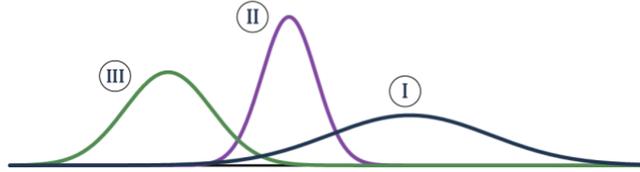
خصائص التوزيع
الطبيعي



معدل وانحراف معياري
في التوزيع الطبيعي

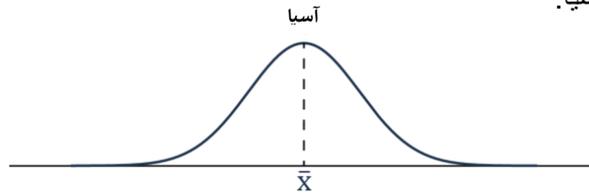
أ. المعدل والانحراف المعياري في التوزيع الطبيعي

1. تمعنوا في الرسوم البيانية للتوزيعات الطبيعية التالية، وأجيبوا عن البنود التالية:



- التوزيع ذو المعدل الأكبر هو _____
- التوزيع ذو المعدل الأصغر هو _____
- التوزيع ذو أكبر انحراف معياري هو _____
- التوزيع ذو أصغر انحراف معياري هو _____

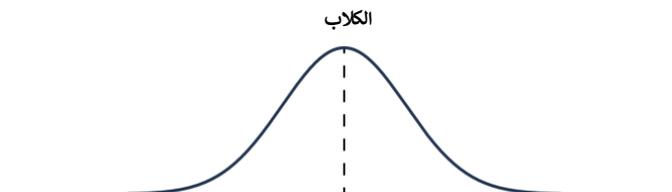
2. من المعلوم أن معدل الطول في الدول الآسيوية أقل من معدل الطول في الدول الأوروبية، وأن الانحراف المعياري لتوزيع الأطوال في آسيا أصغر من الانحراف المعياري في أوروبا. معطى توزيع الأطوال في آسيا:



- ارسم بواسطة خط حرّ (منحنى) لتوزيع الأطوال في أوروبا.
- من المعلوم أنّ معدل الأطوال في أمريكا الشمالية أعلى منه في آسيا وأوروبا. ارسم بواسطة خط حرّ (منحنى) توزيع الأطوال في أمريكا الشمالية.
- في كندا، الانحراف المعياري هو الأصغر، والناس هناك هم الأقصر. أضيفوا توزيع الأطوال في كندا

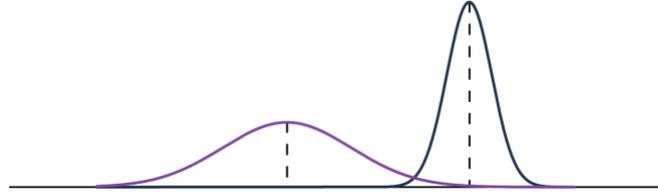
3. تم فحص درجة حرارة جسم الإنسان بالنسبة لحيوانات مختلفة: كلاب، قطط وطيور. وقد وجد أن درجة حرارة جسم الإنسان أقل من درجة حرارة الكلاب، وأن الانحراف المعياري لجسم الإنسان أصغر من الانحراف المعياري للكلاب

أ. يصف المنحنى توزيع درجة حرارة الجسم للكلاب، أضيفوا منحنى توزيع درجة حرارة جسم الإنسان إلى الرسم البياني المعطى.



- درجة حرارة جسم القطط أعلى من درجة حرارة الكلاب، وانحرافها المعياري أكبر. أضيفوا منحنى لتوزيع درجة حرارة جسم القطط إلى الرسم البياني المعطى.
- درجة حرارة جسم الطيور هي الأعلى بين الحيوانات التي تم اختيارها. ومع ذلك، فإن انحرافه المعياري أصغر من الانحراف المعياري لدى البشر. أضف إلى الرسم البياني المعطى رسماً بيانياً يمثل توزيع درجة حرارة جسم الطيور.

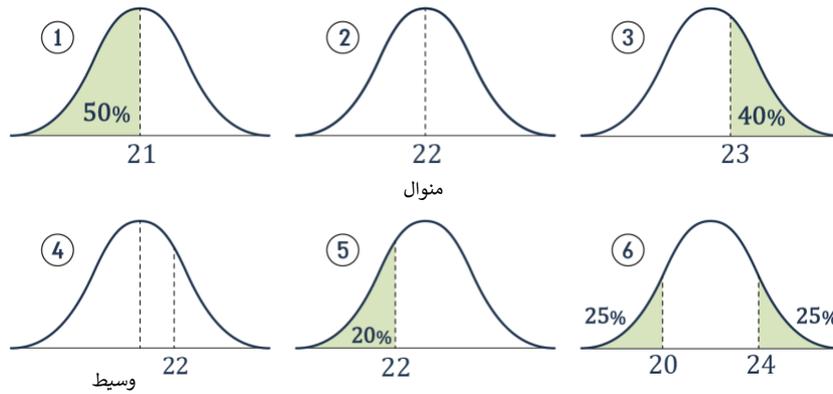
4. تم فحص معدل درجات الحرارة في شمال روسيا مقارنة بمعدل توزيعها في المنطقة الاستوائية. معلوم أن معدل درجة الحرارة في روسيا منخفض جداً، وفي خط الاستواء درجة الحرارة أعلى. معلوم أيضاً أن الانحراف المعياري في شمال روسيا أكبر. معطى منحنيين لتوزيع معدل درجات الحرارة في المنطقتين:



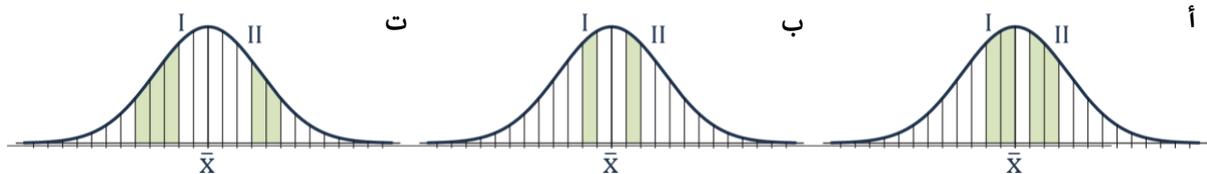
- أ. أشيروا على كل رسم بياني المنطقة التي يمثلها.
 ب. معلوم أن معدل درجات الحرارة في إسرائيل أعلى من روسيا، ولكنه أقل من المنطقة الاستوائية. معلوم أيضاً أن الانحراف المعياري في إسرائيل أصغر منه في شمال روسيا، ولكنه أكبر من المنطقة الاستوائية. ارسما منحني يمثل توزيع درجات الحرارة في إسرائيل.

ب. خصائص التوزيع الطبيعي

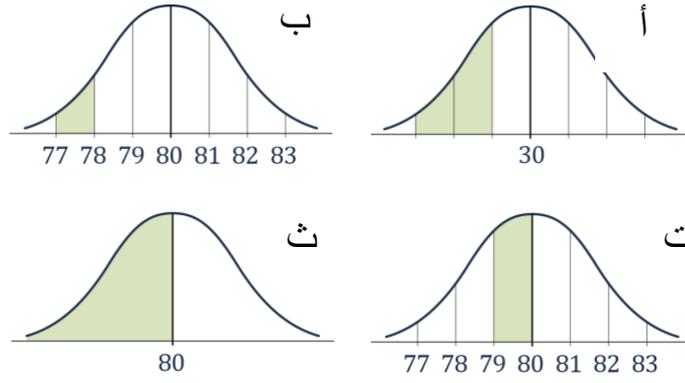
5. معطى توزيع طبيعي، مع معدل 22. أ. أي من الرسوم البيانية التالية ممكن أن يمثل المعطى؟
 ب. لكل رسم من الرسوم غير الملائمة للمعطى، اشرح سبب عدم ملائمتها للمعطيات.



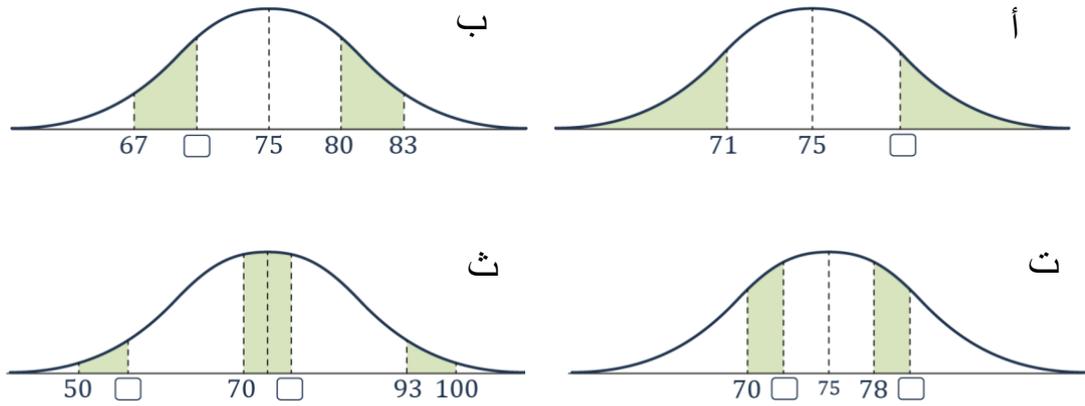
6. أمامكم توزيعات طبيعية، وحددت مساحتين فيها. حدّوا في كل واحدة من التوزيعات التالية ما إذا كانت المساحة I أكبر/أصغر/تساوي المساحة II، علّوا اجابتكم.



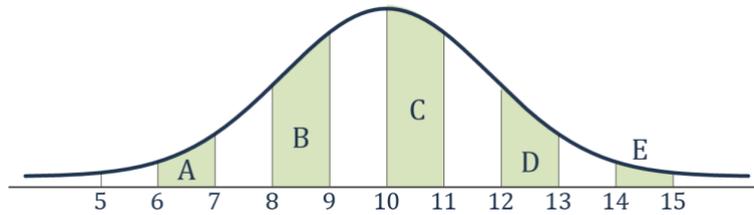
7. في التوزيعات التالية المعدل هو 80، وفي كلٍّ منها تمَّ تحديد منطقة على يسار المتوسط. حدّدوا على يمين المتوسط مساحةً مماثلة للمنطقة المحددة.



8. في التوزيعات التالية المعدل هو 75، وفي كلٍّ منها مساحتان متساويتان. بالاعتماد على تماثل التوزيع الطبيعي، اكتب القيمة المناسبة في المربع الفارغ.



9. معطى توزيع طبيعي مع معدل 10، تم فيها تحديد 5 مساحات.



أ. حدّدوا بالنسبة لكل واحد من الأزواج التالية المساحة الأكبر:

- A _____ B ▪
- A _____ E ▪
- C _____ B ▪
- D _____ A ▪

ب. أيّ من المساحات هي الأكبر؟

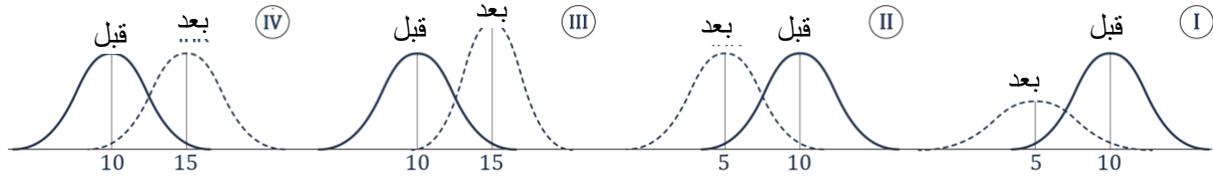
ت. أيّ من المساحات هي الأصغر؟

ث. رتّبوا المساحات من الأصغر إلى الأكبر.

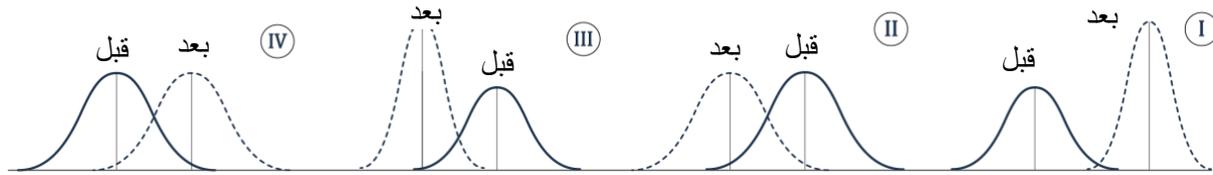
ت. تحولات في التوزيع الطبيعي

10. معطى توزيع طبيعي. في كل قسم من الأقسام التالية، قم بإجراء تغيير على كافة قيم التوزيع. اختروا الرسم البياني الذي يصف التوزيع قبل التغيير وبعده، وعللوا اختياركم.

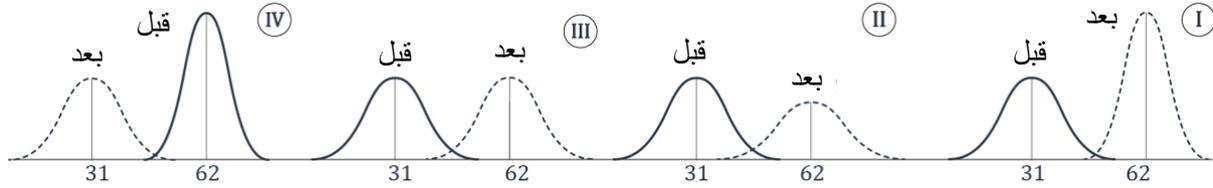
أ. إضافة 5



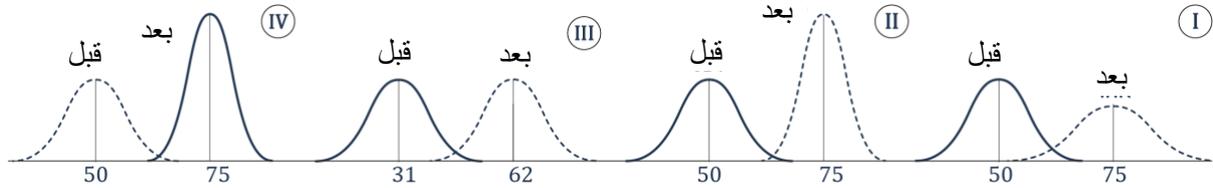
ب. انخفاض بـ 35%



ت. ضرب بـ 2

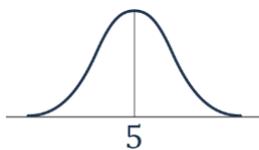


ث. إضافة 50%



11. في كل قسم من الأقسام التالية، قم بإجراء تغيير على كافة قيم التوزيع. أضف على الرسم البياني رسماً الذي يصف التوزيع بعد التغيير.

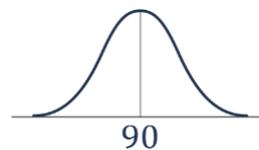
ث. ازدياد بضعفين



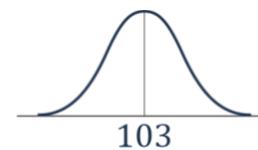
ت. ازدياد بـ 2



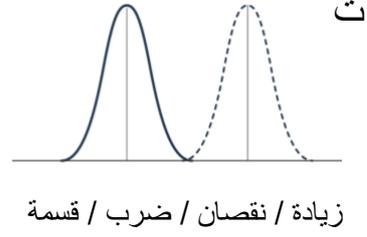
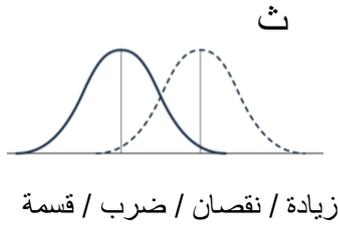
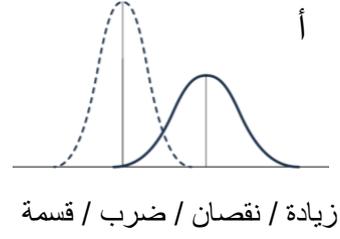
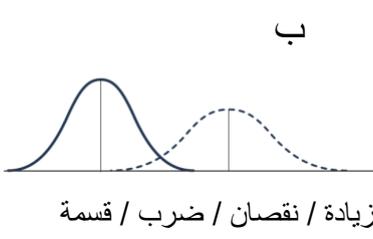
ب. أقل بـ 50%



أ. أقل بـ 10



12. في كل بند من البنود وصف لتوزيع مع إزاحة.
الرسم البياني المتصل يصف التوزيع قبل التغيير، والرسم البياني المتقطع يصف التوزيع بعد التغيير.
حدّوا في كلّ قسم ما هي الإزاحة المبيّنة.



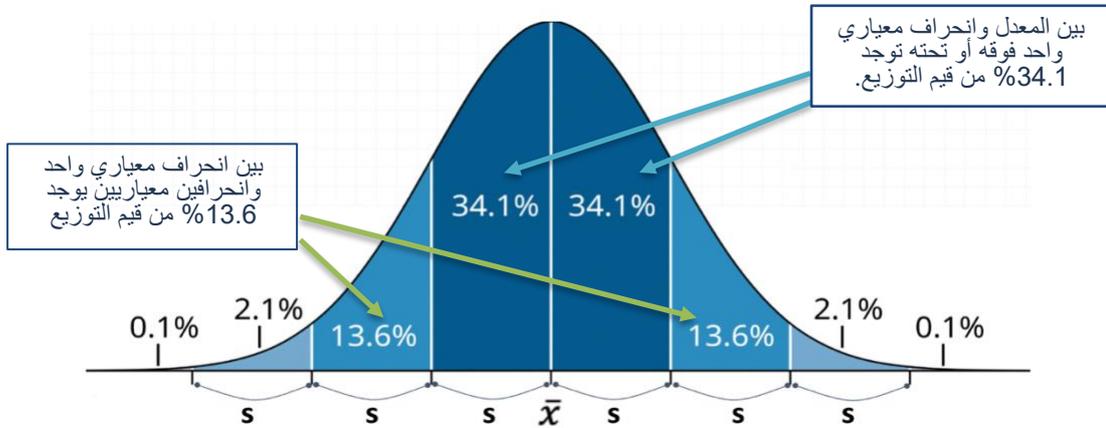


التوزيع الطبيعي وجدول Z معروضة



شرح عن جدول العلامات Z

تعرفنا في الفصل السابق على التوزيع الطبيعي وخصائصه. لقد رأينا أنّ التوزيع متمائل، لذا من الممكن في بعض الأحيان استنتاج مساحات في التوزيع بدون حسابها. على سبيل المثال - إذا كانت المساحات متمائلة بالنسبة لمركز التوزيع، فيمكننا تحديد أنها متساوية دون إجراء حسابات. في هذا الجزء سوف نتعلم حساب المساحات في التوزيع الطبيعي بطريقة أكثر دقة. للقيام بذلك نحن بحاجة إلى زيادة معرفتنا بالمساحات الواقعة تحت منحنى التوزيع. في الرسم البياني التالي معطى منحنى لتوزيع طبيعي معيّن. يمكننا أن نرى أنه إذا ابتعدنا عن المعدل بمسافات ثابتة، في هذه الحالة عن طريق "قفزات" الانحرافات المعيارية - يتم الحصول على مساحات ثابتة عن يمين ويسار المعدل. على سبيل المثال، إذا ابتعدنا عن المعدل إنحرافاً معيارياً واحداً إلى اليمين (أو اليسار) فسنحصل على مساحة مقدارها 34.1%. وإذا إنتقلنا من انحراف معياري واحد إلى انحرافين معياريين عن المعدل - فسوف نحصل على مساحة مقدارها 13.6%



مهم! هذه الظاهرة قائمة في جميع التوزيعات الطبيعية في العالم، ولا تتعلق بمعدّل محدّد أو انحراف معياري للتوزيع! لكن... "القفزات" في مسافات الانحرافات المعيارية محدودة إلى حد ما... ففي نهاية المطاف، لا نريد دائماً الابتعاد عن المتوسط بانحراف معياري واحد بالضبط. في بعض الأحيان نريد أن نبتعد عن المعدل ربع انحراف معياري. في بعض الأحيان ثلث انحراف معياري. وأحياناً نرغب معرفة ماذا يحدث في الاتجاه المعاكس، أي كم يجب أن نبتعد عن المعدل لكي نحصل على مساحة مقدارها 20%؟ إذا كان الأمر كذلك، فنحن بحاجة إلى أداة إذا أردنا معرفة البعد عن المعدل، فسوف تعطينا المساحة الموجودة تحت المنحنى. أو العكس - إذا كان لدينا المساحة معطاة، على سبيل المثال 25% أقل من المعدل، عندها نريد معرفة كم يجب علينا الابتعاد عن المعدل. هذه الأداة عبارة عن جدول Z.

جدول التوزيع الطبيعي

في هذا السطر يظهر
العدد الثاني بعد
الفاصلة العشرية
للعلامة المعيارية Z

في هذا العمود
تظهر العلامات
المعيارية Z، من
العلامة -3 حتى
العلامة 3

Z= -1.53

P=0.0630

Z= -0.72

P=0.2360

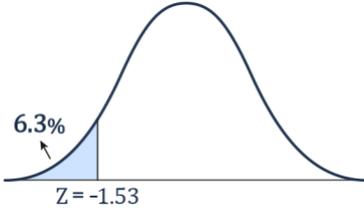
تعبّر الخانات الموجودة
داخل الجدول عن النسبة
المئوية، أو إمكانية
الحصول على قيمة أقل
أو مساوية للعلامة
المعيارية هذه

| z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| -3.0 | 0.0013 | 0.0013 | 0.0013 | 0.0012 | 0.0012 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0010 | 0.0010 |
| -2.9 | 0.0019 | 0.0018 | 0.0017 | 0.0017 | 0.0016 | 0.0016 | 0.0015 | 0.0015 | 0.0014 | 0.0014 |
| -2.8 | 0.0026 | 0.0025 | 0.0024 | 0.0023 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0020 | 0.0019 |
| -2.7 | 0.0035 | 0.0034 | 0.0033 | 0.0032 | 0.0031 | 0.0030 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0026 |
| -2.6 | 0.0046 | 0.0045 | 0.0044 | 0.0043 | 0.0041 | 0.0040 | 0.0039 | 0.0038 | 0.0037 | 0.0036 |
| -2.5 | 0.0062 | 0.0060 | 0.0059 | 0.0057 | 0.0055 | 0.0054 | 0.0052 | 0.0051 | 0.0049 | 0.0048 |
| -2.4 | 0.0082 | 0.0080 | 0.0078 | 0.0075 | 0.0073 | 0.0071 | 0.0069 | 0.0068 | 0.0066 | 0.0064 |
| -2.3 | 0.0107 | 0.0104 | 0.0102 | 0.0099 | 0.0096 | 0.0094 | 0.0091 | 0.0089 | 0.0087 | 0.0084 |
| -2.2 | 0.0139 | 0.0135 | 0.0132 | 0.0129 | 0.0125 | 0.0122 | 0.0119 | 0.0116 | 0.0113 | 0.0110 |
| -2.1 | 0.0179 | 0.0174 | 0.0170 | 0.0166 | 0.0162 | 0.0158 | 0.0154 | 0.0150 | 0.0146 | 0.0143 |
| -2.0 | 0.0227 | 0.0222 | 0.0217 | 0.0212 | 0.0207 | 0.0202 | 0.0197 | 0.0192 | 0.0188 | 0.0183 |
| -1.9 | 0.0287 | 0.0281 | 0.0274 | 0.0268 | 0.0262 | 0.0256 | 0.0250 | 0.0244 | 0.0238 | 0.0233 |
| -1.8 | 0.0359 | 0.0350 | 0.0344 | 0.0336 | 0.0329 | 0.0322 | 0.0314 | 0.0307 | 0.0301 | 0.0294 |
| -1.7 | 0.0446 | 0.0436 | 0.0427 | 0.0418 | 0.0409 | 0.0401 | 0.0392 | 0.0384 | 0.0375 | 0.0367 |
| -1.6 | 0.0550 | 0.0540 | 0.0530 | 0.0520 | 0.0505 | 0.0495 | 0.0485 | 0.0475 | 0.0465 | 0.0455 |
| -1.5 | 0.0670 | 0.0650 | 0.0640 | 0.0630 | 0.0620 | 0.0610 | 0.0590 | 0.0580 | 0.0570 | 0.0560 |
| -1.4 | 0.0810 | 0.0790 | 0.0780 | 0.0760 | 0.0750 | 0.0740 | 0.0720 | 0.0710 | 0.0690 | 0.0680 |
| -1.3 | 0.0970 | 0.0950 | 0.0930 | 0.0920 | 0.0900 | 0.0890 | 0.0870 | 0.0850 | 0.0840 | 0.0820 |
| -1.2 | 0.1150 | 0.1130 | 0.1110 | 0.1090 | 0.1070 | 0.1060 | 0.1040 | 0.1020 | 0.1000 | 0.0980 |
| -1.1 | 0.1360 | 0.1340 | 0.1310 | 0.1290 | 0.1270 | 0.1250 | 0.1230 | 0.1210 | 0.1190 | 0.1170 |
| -1.0 | 0.1590 | 0.1560 | 0.1540 | 0.1520 | 0.1490 | 0.1470 | 0.1450 | 0.1420 | 0.1400 | 0.1380 |
| -0.9 | 0.1840 | 0.1810 | 0.1790 | 0.1760 | 0.1740 | 0.1710 | 0.1680 | 0.1660 | 0.1630 | 0.1610 |
| -0.8 | 0.2120 | 0.2090 | 0.2060 | 0.2030 | 0.2000 | 0.1980 | 0.1950 | 0.1920 | 0.1890 | 0.1870 |
| -0.7 | 0.2420 | 0.2390 | 0.2360 | 0.2330 | 0.2300 | 0.2270 | 0.2240 | 0.2210 | 0.2180 | 0.2150 |
| -0.6 | 0.2740 | 0.2710 | 0.2680 | 0.2640 | 0.2610 | 0.2580 | 0.2550 | 0.2510 | 0.2480 | 0.2450 |
| -0.5 | 0.3080 | 0.3050 | 0.3010 | 0.2980 | 0.2950 | 0.2910 | 0.2880 | 0.2840 | 0.2810 | 0.2780 |
| -0.4 | 0.3450 | 0.3410 | 0.3370 | 0.3340 | 0.3300 | 0.3260 | 0.3230 | 0.3190 | 0.3160 | 0.3120 |
| -0.3 | 0.3820 | 0.3780 | 0.3750 | 0.3710 | 0.3670 | 0.3630 | 0.3590 | 0.3560 | 0.3520 | 0.3480 |
| -0.2 | 0.4210 | 0.4170 | 0.4130 | 0.4090 | 0.4050 | 0.4010 | 0.3970 | 0.3940 | 0.3900 | 0.3860 |
| -0.1 | 0.4600 | 0.4560 | 0.4520 | 0.4480 | 0.4440 | 0.4400 | 0.4360 | 0.4320 | 0.4290 | 0.4250 |
| -0.0 | 0.5000 | 0.4960 | 0.4920 | 0.4880 | 0.4840 | 0.4800 | 0.4760 | 0.4720 | 0.4680 | 0.4640 |
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5200 | 0.5240 | 0.5280 | 0.5320 | 0.5360 |
| 0.1 | 0.5400 | 0.5440 | 0.5480 | 0.5520 | 0.5560 | 0.5600 | 0.5640 | 0.5680 | 0.5710 | 0.5750 |
| 0.2 | 0.5790 | 0.5830 | 0.5870 | 0.5910 | 0.5950 | 0.5990 | 0.6030 | 0.6060 | 0.6100 | 0.6140 |
| 0.3 | 0.6180 | 0.6220 | 0.6250 | 0.6290 | 0.6330 | 0.6370 | 0.6410 | 0.6440 | 0.6480 | 0.6520 |
| 0.4 | 0.6550 | 0.6590 | 0.6630 | 0.6660 | 0.6700 | 0.6740 | 0.6770 | 0.6810 | 0.6840 | 0.6880 |
| 0.5 | 0.6920 | 0.6950 | 0.6990 | 0.7020 | 0.7050 | 0.7090 | 0.7120 | 0.7160 | 0.7190 | 0.7220 |
| 0.6 | 0.7260 | 0.7290 | 0.7320 | 0.7360 | 0.7390 | 0.7420 | 0.7450 | 0.7490 | 0.7520 | 0.7550 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7610 | 0.7640 | 0.7670 | 0.7700 | 0.7730 | 0.7760 | 0.7790 | 0.7820 | 0.7850 |
| 0.8 | 0.7880 | 0.7910 | 0.7940 | 0.7970 | 0.8000 | 0.8020 | 0.8050 | 0.8080 | 0.8110 | 0.8130 |
| 0.9 | 0.8160 | 0.8190 | 0.8210 | 0.8240 | 0.8260 | 0.8290 | 0.8320 | 0.8340 | 0.8370 | 0.8390 |
| 1.0 | 0.8410 | 0.8440 | 0.8460 | 0.8480 | 0.8510 | 0.8530 | 0.8550 | 0.8580 | 0.8600 | 0.8620 |
| 1.1 | 0.8640 | 0.8660 | 0.8690 | 0.8710 | 0.8730 | 0.8750 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8850 | 0.8870 | 0.8890 | 0.8910 | 0.8930 | 0.8940 | 0.8960 | 0.8980 | 0.9000 | 0.9020 |
| 1.3 | 0.9030 | 0.9050 | 0.9070 | 0.9080 | 0.9100 | 0.9110 | 0.9130 | 0.9150 | 0.9160 | 0.9180 |
| 1.4 | 0.9190 | 0.9210 | 0.9220 | 0.9240 | 0.9250 | 0.9260 | 0.9280 | 0.9290 | 0.9310 | 0.9320 |
| 1.5 | 0.9330 | 0.9350 | 0.9360 | 0.9370 | 0.9380 | 0.9390 | 0.9410 | 0.9420 | 0.9430 | 0.9440 |
| 1.6 | 0.9450 | 0.9460 | 0.9470 | 0.9480 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9650 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9762 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9773 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9865 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9954 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

يربط الجدول بين العلامات المعيارية (التي تظهر في العمود الأول والصف الأول) وبين الكسور العشرية الموجودة داخل خانات الجدول. سنشرح في هذا القسم ما هي هذه الكسور العشرية، وكيف يمكنك التعامل مع الجدول عملياً، وسنبدأ بماذا تعني القيم الموجودة في خانات الجدول.

الاحتمال - الامكانية - النسبة المئوية - المساحة - كل ذلك في خانة واحدة صغيرة!

في الجدول أعلاه رأينا أن القيمة الملائمة للعلامة المعيارية $Z=-1.53$ هي 0.0630 (باللون الأحمر). ماذا يعني هذا الرقم العشري؟



1. **المعنى البياني** - القيمة 0.0630 التي تظهر في الجدول تشير إلى المساحة الموجودة تحت المنحنى الطبيعي عن يسار العلامة المعيارية، حتى العلامة المعيارية $Z=-1.53$. تظهر القيمة في الجدول كعدد عشري، ولكن عندما نريد معرفة المساحة نحول العدد العشري إلى نسبة مئوية: عندها تكون المساحة 6.3%.
2. **الاحتمال أو الإمكانية** - يساعدنا التوزيع الطبيعي في حساب إمكانية أو احتمال الحصول على قيم في التوزيع الطبيعي. في الحالة التي أمامنا، فإن احتمال الحصول على قيم أصغر أو تساوي العلامة المعيارية $Z=-1.53$ هو 0.0630. يمكننا أيضاً أن نكتب: $P(Z \leq -1.53) = 0.063$

تشديدات:

3. للانتقال من الخانة التي تظهر في الجدول إلى المساحة أو النسبة المئوية، سيتعين علينا ضرب القيمة في 100 (سنقوم بتحريك العلامة العشرية مكانين إلى اليمين).
4. في الأسئلة أدناه سنواجه دائماً المفاهيم الأربعة: النسبة المئوية / المساحة / الاحتمال / الإمكانية - وهي مفاهيم تعطينا معنى وجوهر واحد - أحياناً من اتجاه التوزيع والمساحة، وأحياناً من اتجاه الإمكانية والاحتمال. ومن المهم الاعتياد عليها، والانتقال بينها بسهولة على الرغم من تغير صيغة المطلوب الأسئلة.

مهارات إضافية في إيجاد المساحات (أو الاحتمالات) في جدول Z

إيجاد العلامة المعيارية بواسطة النسبة المعطاة

في هذا المثال سيتعين علينا حساب العلامة المعيارية من معطيات السؤال (أو أنه سيكون معطى لنا)

ومن ثم نبحث عن الخانة المناسبة في الجدول. يتم إيجاده ككسر عشري، وإذا لزم الأمر، سنقوم بتحويله إلى نسبة مئوية. في الرسم الذي يظهر أمامنا، العلامة المعيارية المناسبة في الجدول Z هي $Z=0.74$.



إيجاد العلامة المعيارية بواسطة النسبة المئوية المكتملة:

في المثال المعروف أمامنا، معطاة مساحة فوق علامة معيارية معينة. تمثل هذه المساحة الاحتمال بأن تكون أعلى من العلامة المعيارية، وليس أقل منها. وبما أنه من المعلوم أن المساحة الإجمالية تحت المنحنى هي 100%، فيمكننا حساب المساحة باستخدام النسبة المئوية التي تكمل المساحة عن يسار العلامة المعيارية وليس عن اليمين.

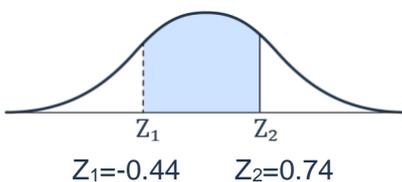
العلامة المعيارية المكتملة: $100\% - 67\% = 33\%$. نعيّن عن النسبة المئوية التي وجدناها ككسر عشري (0.330).

في جدول Z يمكننا أن نرى بأن العلامة المعيارية هي $Z = -0.44$



إيجاد المساحة الموجودة بين علامتين معياريتين معطيتين:

لإيجاد مساحة بين علامتين معياريتين، يجب علينا إيجاد المساحة الواقعة عن يسار العلامة المعيارية الأكبر بين العلامتين، ثم نطرح منها المساحة الواقعة عن يسار العلامة المعيارية الأصغر بين العلامتين. في الحالة التي أمامنا المساحة للعلامة المعيارية اليمنى هي (77%) والمساحة للعلامة المعيارية اليسرى هي (33%). الفرق بين المساحتين هو $77\% - 33\% = 44\%$. وبالتالي فإن المساحة باللون الأزرق هي 44% من مساحة التوزيع.

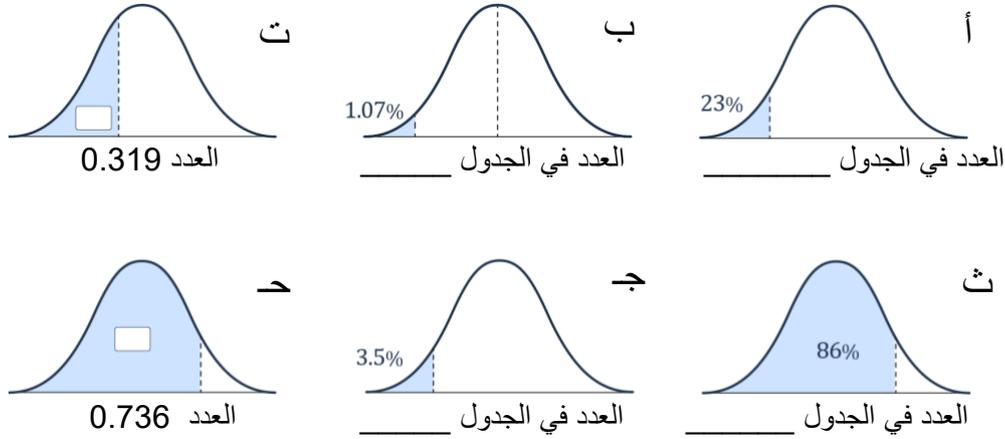




إيجاد نسبة إيجاد Z النسبة المكتملة طرح مساحات قسم من مجموعة وحدة متقدمة

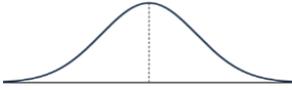
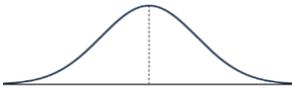
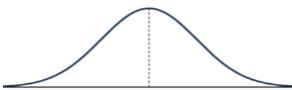
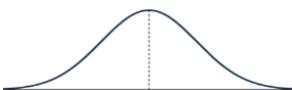
1. مهارات العمل في جدول Z

1. أمامكم توزيعات طبيعية مختلفة. لائتموا بين النسبة المئوية والعدد العشري الملائم.



2. أمامكم علامات واقية مختلفة. لكل واحدة منها:

- اكتبوا ما هي قيمة الخانة الملائمة في جدول Z.
- ما هي النسبة المئوية المتراكمة في التوزيع الطبيعي حتى هذه العلامة.
- عيّنوا المساحة الملائمة للمعطيات على الرسم البياني.

| العلامة المعيارية | القيمة داخل الخانة في الجدول | النسبة المئوية | المساحة الملائمة |
|-------------------|------------------------------|----------------|---|
| أ. $z=1.2$ 2 | | |  |
| ب. $z=-2.1$ | | |  |
| ت. $z=0$ | | |  |
| ث. $z=1.5$ 5 | | |  |
| ج. $z=0.9$ 6 | | |  |
| ح. $z=0.5$ | | |  |

3. أمامكم علامات واقية مختلفة. عليكم حساب المساحة عن يمين كل علامة من العلامات.
- عيّنوا على الرسم البياني العلامة الواقية والمساحة.
 - اكتبوا ما هي قيمة الخانة الملائمة في جدول Z ، والنسبة المئوية المتراكمة.
 - احسبوا النسبة المئوية المكتملة.

| العلامة المعيارية | القيمة داخل الخانة في الجدول | النسبة المئوية المكتملة | النسبة المئوية المكتملة | المساحة الملائمة |
|-------------------|------------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------|
| أ. $z=1.6$ | | | | |
| ب. $z=-0.7$ | | | | |
| ت. $z=0.9$ | | | | |
| ث. $z=1.3$ | | | | |
| ج. $z=-1.55$ | | | | |
| ح. $z=0.3$ | | | | |

4. أمامكم توزيعات طبيعية تظهر فيها مساحات مختلفة. عليكم إيجاد الخانة الملائمة في جدول Z بواسطة حساب النسبة المكتملة لـ 100%، وقيمة الـ Z الملائمة:

أ. النسبة المئوية المكتملة _____
العدد في الجدول _____
قيمة Z- _____

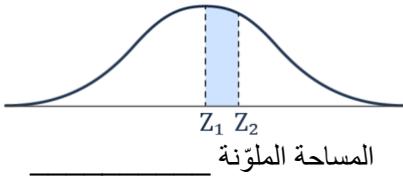
ب. النسبة المئوية المكتملة _____
العدد في الجدول _____
قيمة Z- _____

ت. النسبة المئوية المكتملة _____
العدد في الجدول _____
قيمة Z- _____

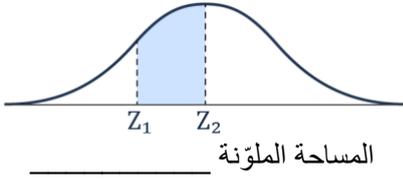
ث. النسبة المئوية المكتملة _____
العدد في الجدول _____
قيمة Z- _____

5. أمامكم توزيعات طبيعية تظهر فيها مساحات مختلفة.

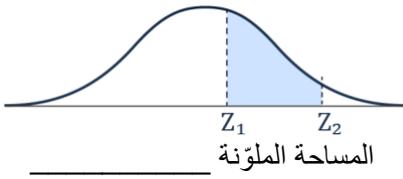
عليكم حساب المساحة الملونة بواسطة طرح المساحات.



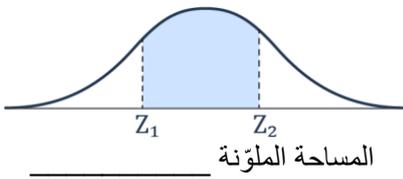
أ. المساحة الملونة $z_1 = 0$ المساحة الملونة $z_2 = 1.21$



ب. المساحة الملونة $z_1 = -1.34$ المساحة الملونة $z_2 = 0$



ت. المساحة الملونة $z_1 = 0.52$ المساحة الملونة $z_2 = 2.4$



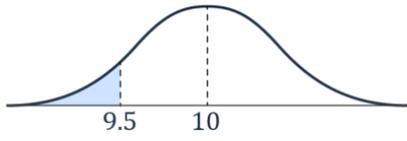
ث. المساحة الملونة $z_1 = -1.25$ المساحة الملونة $z_2 = 1.03$

6. أمامكم توزيعات طبيعية مختلفة.

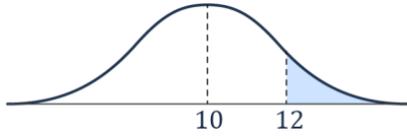
في كل واحد من الأقسام التالية استعينوا بالمعطيات واحسبوا العلامة المعيارية والعلامة الخام وأضيفوا رسم ملائم.

| النسبة المئوية | العلامة المعيارية | معدّل الانحراف المعياري | العلامة الخام | رسم ملائم |
|----------------|-------------------|-------------------------------------|---------------|-----------|
| أ. 89.3% | | $\underline{x} = 20 \quad s = 25$ | | |
| ب. 22.4% | | $\underline{x} = 900 \quad s = 500$ | | |
| ت. 98.78% | | $\underline{x} = 122 \quad s = 16$ | | |
| ث. 3.59% | | $\underline{x} = 9 \quad s = 1.5$ | | |
| ج. 72.6% | | $\underline{x} = 16 \quad s = 2$ | | |

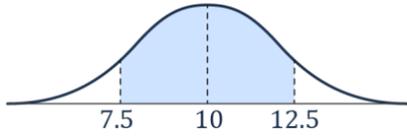
7. أمامكم توزيعات طبيعيّة، في جميعها المعدّل 10 هو والانحراف المعياري هو 2.5. أكملوا المعطيات الناقصة:



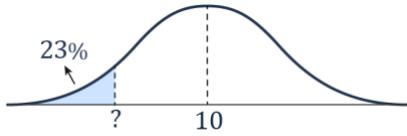
أ. علامة z لـ 9.5 هي _____
 القيمة بجدول z هي _____
 المساحة الملوّنة هي _____



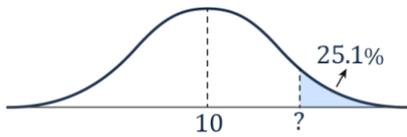
ب. علامة z لـ 12 هي _____
 القيمة بجدول z هي _____
 المساحة الملوّنة هي _____



ت. علامة z لـ 12.5 هي _____
 علامة z لـ 7.5 هي _____
 المساحة الملوّنة هي _____

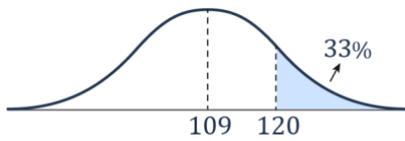


ث. علامة ال z الملائمة هي _____
 القيمة الخام الملائمة هي _____



ج. علامة ال z الملائمة هي _____
 القيمة الخام الملائمة هي _____

8. أمامكم توزيعات طبيعيّة مختلفة. استعينوا بالمعطيات وأكملوا الناقص:



أ. العلامة المعياريّة لـ 120 هي _____
 الانحراف المعياري هو _____



ب. العلامة المعياريّة لـ 38 هي _____
 العلامة المعياريّة لـ 27.2 هي _____
 المعدّل هو _____
 الانحراف المعياري هو _____

وحدة تلخيص أسئلة نحو البجروت



سؤال 1

في كشك من أكشاك السيرك يوجد وعاء يحتوي على حلوى. الشخص الذي ينجح بتخمين عدد حبات الحلوى يفوز، ويحصل الفائز على الحلوى التي في الوعاء. في كل يوم يتم ملئ الوعاء من جديد من قبل مدراء الكشك. معروف أن كمية الحلوى في الوعاء تتوزع طبيعيًا بمعدل 150 وانحراف معياري 5. أ. ما هو الاحتمال بأن في الوعاء توجد أقل من 159 حبة؟ ب. حدّدوا أي ممّا يلي أكبر، علّوا اختياركم.

i. الاحتمال بأن عدد حبات الحلوى في الوعاء بين 150 ل-153 حبة.

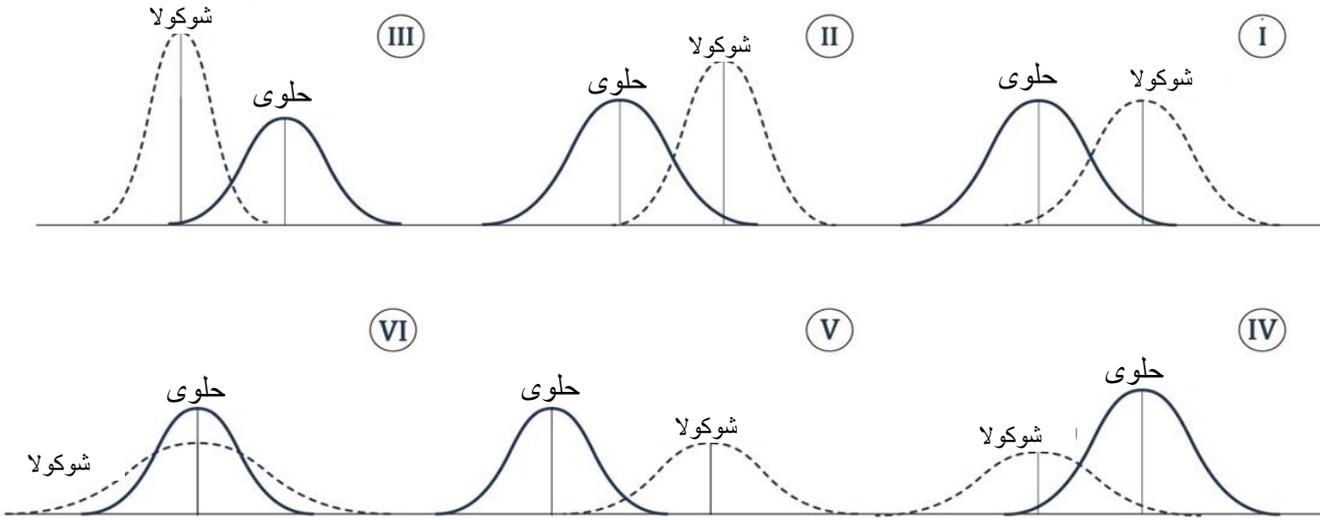
ii. الاحتمال بأن عدد حبات الحلوى في الوعاء بين 153 ل-156 حبة.

بسبب نجاح مسابقة وعاء الحلوى، قرّروا في الكشك المجاور افتتاح مسابقة وعاء الشوكولا. أيضًا كمية الشوكولا تتوزع طبيعيًا مع انحراف معياري 20.

معطى أن الاحتمال بأن عدد حبات الشوكولا في الوعاء أقل من 142 حبة مساوٍ للاحتمال بأن عدد حبات الحلوى في الوعاء أقل من 147 حبة.

ت. أي معدل من المعدلين أكبر: معدل كمية الشوكولا أم معدل كمية الحلوى؟ علّوا!

أ. حدّدوا أي من الرسوم البيانية يصف التوزيعات، علّوا!



سؤال 2

رواتب العمّال في شركة هايتك كبيرة تتوزّع طبيعيًا، مع وسيط 15 ألف شافل. معطى أن 84.4% من العمّال في الشركة راتبهم أكثر من -10.96 ألف شافل.

أ. ما هو الانحراف المعياري؟

من أجل التحضير للتقرير السنوي، حدّدت الشركة الرواتب على النحو التالي:

الرواتب التي تقل عن -10% في توزيع الرواتب تعد "رواتب منخفضة"

الرواتب التي تزيد عن -10% في توزيع الرواتب تعد "رواتب مرتفعة"

باقي الرواتب تعد رواتب متوسطة.

ب. (1) إذا عمل في الشركة 30,000 عاملاً، كم منهم يحصل على راتب متوسط؟

(2) حسب تحديد الشركة، ما هو مجال الرواتب التي تعتبر رواتب متوسطة؟

بسبب نجاح الشركة في السوق، حصل جميع العمّال على بونوس لمرة واحدة بمقدار 3 آلاف شافل.

ت. (1) ماذا سيحصل للمعدّل؟

(2) ماذا سيحصل للانحراف المعياري؟

في شركة منافسة (شركة ب)، رواتب العمّال تتوزّع بشكل غير متماثل مع ذنب أيمن. معلوم أن الوسيط في الشركتين متساوي.

عرض على أحد العمّال في الشركة أ الذي راتبه مساوٍ لمعدّل الرواتب أن ينتقل للشركة ب. التي عرضت عليه راتب مساوٍ لمعدّل الرواتب في الشركة ب.

ث. هل تنصحوا العامل في الانتقال للشركة ب؟ علّوا!

سؤال 3

كمية القصب التي تستهلكها الباندا تتوزّع طبيعيًا.

معلوم أن 59.9% منهن تستهلك أقل من 20 كغم من القصب في اليوم، و 50% منهن تستهلك أكثر من 18 كغم في اليوم.

أ. ما هو الانحراف المعياري لكمية القصب التي تستهلكها الباندا في اليوم؟

ب. ما هو الاحتمال بأن تستهلك الباندا بين 17 و-19 كغم من القصب في اليوم؟

ت. كل دببة الباندا التي تستهلك أقل من 15.44 كغم من القصب في اليوم تعاني من سوء التغذية. ما هي النسبة

المئوية للباندا التي تعاني من سوء التغذية؟

معلوم أم القصب المكوّن الأساس للقصب هو الألياف، ولذلك فقط 20% منه يتم استيعابه في الجهاز الهضمي لدب الباندا.

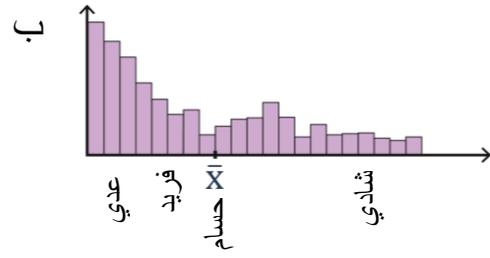
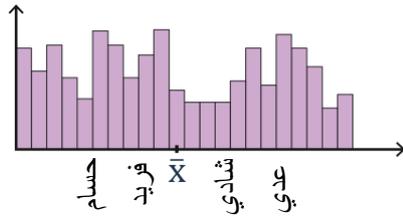
ث. (1) ما هو معدّل كمية القصب يتم استيعابها في الجهاز الهضمي لدب الباندا؟

(2) ما هو الانحراف المعياري لكمية القصب التي يتم استيعابها في الجهاز الهضمي لدب الباندا؟

(3) من بين دببة الباندا التي تعاني من سوء التغذية، ما هي كمية القصب الكبرى التي التي يستوعبها الجهاز

الهضمي؟

إجابات الوحدة الأولى



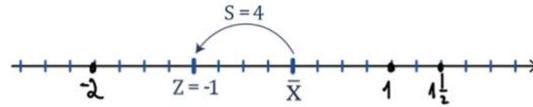
1. أ

2.

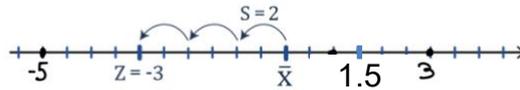
- أ. بدلت سعاد ولبنى أمكنتهما. كلما كانت العلامة المعيارية أصغر كلما كان مكانها إلى اليسار أكثر.
 ب. العلامة المعيارية لسعيد سالبة، عليا أن تكون أقل من المعدل.
 ت. العلامة المعيارية للمي لا يمكنها أن تكون متماثلة مع علامة منيرة، عليها أن تكون أبعد إلى اليمين.

3. سامي: 0.6 هزار: -0.8

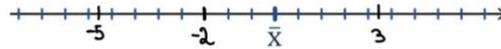
4.



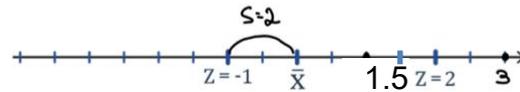
أ



ب



ت



ث

5. رياضيات: ربي، z=2.6 لميس، z=0 هدير، z=3 ليلى، z=-2
 لغة انجليزية: ربي، z=3 لميس، z=-1 هدير، z=4 ليلى، z=-8.5
 ربي - لغة انجليزية، لميس - رياضيات، هدير - لغة انجليزية، ليلى - رياضيات

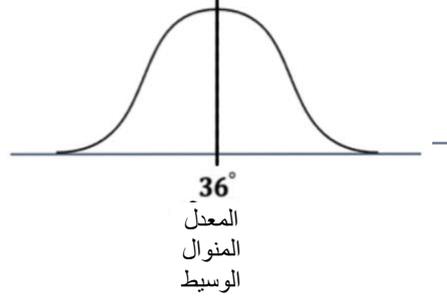
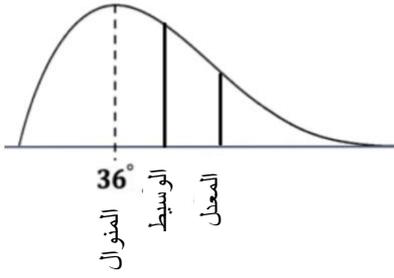
6. لغة، z=5 أدب، z=-2 رياضيات، z=4 فيزياء، z=2.5 تربية بدنية، z=-7.5
 بأقصى حد - امتحان القواعد
 بأدنى حد - امتحان التربية البدنية

7. أ. 0.75، ب. 18، ت. 12، ث. 2.25، ج. -1.3، ح. 4، د. 18، هـ. 4.5

إجابات الوحدة الثانية

1.

- أ. لا، في التوزيع الطبيعي مع ذنب أيمن، يقع المتوسط عن يمين المنوال.
ب. لا، في التوزيع الطبيعي مع ذنب أيمن، يقع المعدل عن يمين المنوال.
ت. نعم، في التوزيع الطبيعي مع ذنب أيمن، المعدل يقع في أقصى اليمين.
ث.



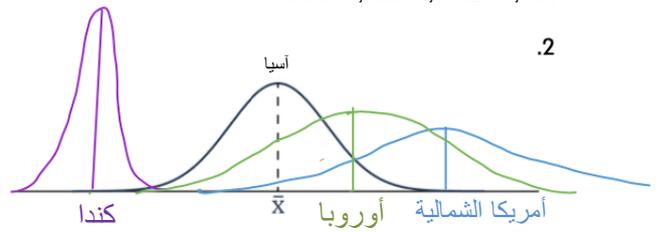
2.

- أ. صحيح.
ب. غير صحيح.
ت. صحيح.
ث. غير صحيح.
ج. غير صحيح.
ح. لا يمكن المعرفة.
خ. غير صحيح.

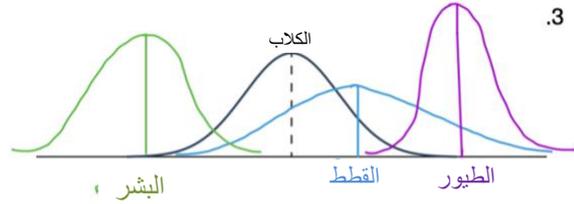
إجابات الوحدة الثالثة

1. א. א. ב. ג. ד. ה. ו. ז. ח. ט. י.

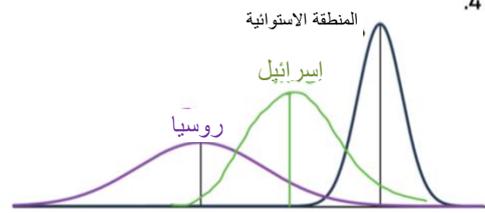
2.



3.



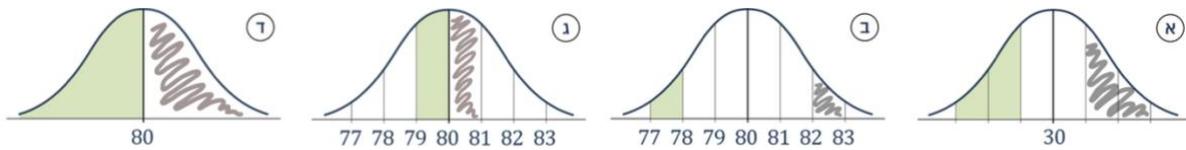
4.



5. א. الرسم البياني 2، الرسم البياني 3، الرسم البياني 6.
 ب. في التوزيع الطبيعي يقع المعدل، المنوال والوسيط في المركز.
 الرسم البياني 1 يقع الوسيط والمنوال في 21، لذلك المعدل ليس 22.
 الرسم البياني 4 تقع على يمين الوسيط وأيضا المعدل.
 الرسم البياني 5 العلامة 22 تمثل 20% ولا 50% بحسب المطلوب.

6. أ. المساحة 1 أكبر، لها نفس العرض ولكن موقعها أقرب للمركز.
 ب. متساوي، لهما نفس العرض ونفس البعد المتماثل عن المعدل.
 ج. المساحة 1 أكبر، هي تشمل مساحة متماثلة، ولكن تشمل أيضا مساحة إضافية.

7.



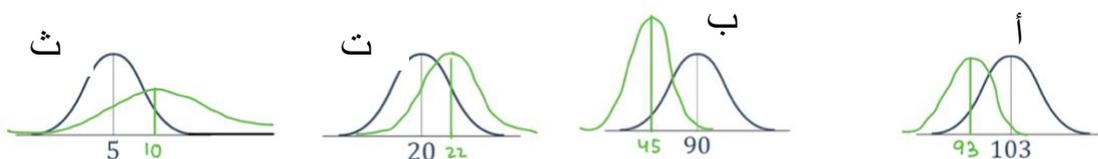
8. א. 79, ב. 70, ג. 80, ד. 57, ה. 80
 9. א. $B > A$, $C > B$, $D > A$ ב. C ג. E ד. $E < A < D < B < C$

كلما كبر الانحراف المعياري، كبر التشتت: الرسم البياني أوسع وأقصر.

10.

أ. الرسم البياني 4. إضافة ثابت تكبير المعدل ولكن لا تتغير الانحراف المعياري.
 ب. الرسم البياني 3. إنخفاض النسبة المئوية تؤدي إلى إنخفاض في المعدل والانحراف المعياري.
 ج. الرسم البياني 2. التضعيف تكبير المعدل والانحراف المعياري.
 د. الرسم البياني 1. إضافة نسبة مئوية تكبير المعدل والانحراف المعياري.

11.



12. א. قسمة, ب. ضرب, ג. إضافة, ד. إضافة

إجابات الوحدة الرابعة

1. أ. 0.23 ب. 0.0107 ت. 31.9% ج. 0.86 ث. 0.035 ح. 73.6%

| 2. | العلامة المعيارية | القيمة داخل الخانة في الجدول | النسبة المئوية | المساحة الملونة |
|----|-------------------|------------------------------|----------------|-----------------|
| أ | $z=1.22$ | 0.8890 | 88.9 | |
| ب | $z=-2.1$ | 0.0179 | 1.79 | |
| ت | $z=0$ | 0.5 | 50 | |
| ث | $z=1.55$ | 0.9390 | 93.9 | |
| ج | $z=0.96$ | 0.8320 | 83.2 | |
| ح | $z=0.5$ | 0.6920 | 69.2 | |

| 3. | العلامة المعيارية | القيمة داخل الخانة في الجدول | النسبة المئوية | النسبة المئوية المكتملة | المساحة الملونة |
|----|-------------------|------------------------------|----------------|-------------------------|-----------------|
| أ | $z=1.6$ | 0.9450 | 94.5 | 5.5 | |
| ب | $z=-0.7$ | 0.2420 | 24.2 | 75.8 | |
| ت | $z=0.92$ | 0.8210 | 82.1 | 17.9 | |
| ث | $z=1.34$ | 0.9100 | 91 | 9 | |
| ج | $z=-1.55$ | 0.0610 | 6.1 | 93.9 | |
| ح | $z=0.39$ | 0.6520 | 65.2 | 34.8 | |

| 4. | النسبة المئوية المكتملة | النسبة المئوية في الجدول | قيمة Z |
|----|-------------------------|--------------------------|--------|
| أ. | 67 | 0.6700 | 0.44 |
| ب. | 88.9 | 0.8890 | 1.22 |
| ت. | 50 | 0.5000 | 0 |
| ث. | 39 | 0.3900 | 0.28- |

| 5. | مساحة z_1 | مساحة z_2 | المساحة الملونة |
|----|-------------|-------------|-----------------|
| أ. | 0.5000 | 0.8870 | 0.3870 |
| ب. | 0.0900 | 0.5000 | 0.4100 |
| ت. | 0.6990 | 0.9918 | 0.2928 |
| ث. | 0.1060 | 0.8480 | 0.7420 |

| 6. | النسبة المئوية | العلامة المعيارية | معزل الانحراف المعياري | العلامة الخام | رسم ملائم |
|----|----------------|-------------------|------------------------------|---------------|-----------|
| أ | 89.3% | 1.24 | $\bar{x} = 20$ $s = 25$ | 51 | |
| ب | 22.4% | -0.76 | $\bar{x} = 900$ $s = 500$ | 520 | |
| ت | 98.78% | 2.25 | $\bar{x} = 122$ $s = 16$ | 158 | |
| ث | 3.59% | -1.8 | $\bar{x} = 9$ $s = 1.5$ | 6.3 | |
| ج | 72.6% | 0.6 | $\bar{x} = 16$ $s = 2$ | 17.2 | |

| 7. | العلامة المعيارية | القيمة في الجدول | المساحة |
|----|-------------------|------------------|---------|
| أ. | $z=-0.2$ | 0.421 | 42.1 |
| ب. | $z=0.8$ | 0.7880 | 21.2 |
| ت. | $z=1$ | $z=-1$ | 68.2 |
| ث. | $Z=-0.74$ | علامة 8.15 | |
| ج. | $Z=0.67$ | علامة 11.675 | |

| 8. | العلامة المعيارية | معزل الانحراف المعياري | العلامة الخام |
|----|-------------------|------------------------|---------------|
| أ. | $z=0.44$ | $s=25$ | |
| ب. | $z=1.08, z=-1.08$ | مמוצע הוא 32.6 | $s=5$ |

إجابات لأسئلة تلخيص

سؤال 1

أ. 96.41%

ب. الإحتمال بأن يكون عدد حبات الحلوى في الوعاء بين 150 و-153 أكبر من الإحتمال بأن يكون العدد بين 153 و-156, لأن هذه القيم أقرب الى المعدل.

ت. العلامة المعيارية ل- 147 حبة حلوى هو $Z = -0.6$ والمعدل 150.

العلامة المعيارية ل- 142 حبة شوكولاتة هو نفسه، $Z = -0.6$ والمعدل هو 154.

لذلك معدل كمية حبات الشوكولاتة أكبر.

ث. الرسم البياني V.

سؤال 2

أ. 4

ب. (1) 24,000

(2) مجال الرواتب المتوسطة: بين 9.88 ألف و-20.12 ألف.

ت. (1) يكبر ب-3 آلاف شافل.

(2) لا تتغير.

ث. نعم، لأن المعدل في التوزيع الغير المتماثل مع ذنب أيمن أكبر من الوسيط.

سؤال 3

أ. 8

ب. تقريباً 10%

ت. 37.5%

ث. (1) 3.6

(2) 1.6

(3) 3.088