נוסחאון מתמטיקה – 5 יחידות לימוד
لائحة قوانين في الرياضيّات – 5 وحدات تعليميّة

المنهاج الجديد

الجبر

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $\qquad$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ $\qquad$ $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

المعادلة التربيعيّة: $(a \neq 0)\ \ ax^2 + bx + c = 0$ الجذران: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

المتواليات:

	المتوالية الحسابيّة	المتوالية الهندسيّة
الدستور التراجعيّ:	$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases}$	$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$
الحدّ النونيّ (الحدّ العامّ):	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
المجموع:	$S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$ $S_n = \dfrac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$	$S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$ $\quad q \neq 1$ مجموع متوالية لانهائيّة مجموعها متقارب: $S = \dfrac{a_1}{1-q}$

القوى: $(b \neq 0\,,\ a \neq 0)$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$
	$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\ ,\ a > 0$	$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

اللوغريثمات (حسب اضطرارات مجال التعريف):

$\log_a(x^b) = b \cdot \log_a x$	$a^{\log_a x} = x$	$\log_a(a^b) = b$
$\log_c x = \dfrac{\log_a x}{\log_a c}$	$\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)$	$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$

التزايد والتضاؤل: الكمّيّة بعد t وحدات زمن: $f(t) = f(0) \cdot q^t$ عندما q هو مُعامِل التزايد/التضاؤل لوحدة زمن t

الاحتمال

الاحتمال المشروط: $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

قانون برنولي – الاحتمال لِـ k نجاحات من n محاولات في التوزيع البينوميّ عندما الاحتمال للنجاح هو p:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

حساب المثلّثات والهندسة

المتطابقات:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\quad$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\quad$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$ $\quad$ $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ $\quad$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$ $\quad$ $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$ $\quad$ $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$ $\quad$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$

قانون السينوس: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ (R – نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلّث)

قانون الكوسينوس: $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\gamma$ (γ هي الزاوية المحصورة بين الضلعين a وَ b)

مساحة المثلّث: $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$ (α هي الزاوية المحصورة بين الضلعين b وَ c)

$S = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin(\beta + \gamma)}$ (β وَ γ الزاويتان المجاورتان للضلع a)

مساحة الدائرة: $S = \pi \cdot R^2$ $\quad$ **محيط الدائرة:** $P = 2\pi \cdot R$ (R – نصف القطر)

طول قوس α راديانات: $\ell = \alpha \cdot R$ $\quad$ **مساحة قطاع** α راديانات: $S = \frac{1}{2}\alpha \cdot R^2$ (R – نصف القطر)

حساب التفاضل والتكامل

المشتقّات:

$(x^t)' = t \cdot x^{t-1}$ (t حقيقيّ)	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\sin x)' = \cos x$
	$(\ell og_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ell na}$	$(a^x)' = a^x \cdot \ell na$

مشتقّة حاصل ضرب دالّتَيْن: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

مشتقّة حاصل قسمة دالّتَيْن: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

مشتقّة الدالّة المركَّبة: $[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$

$u'(x)$ هي مشتقّة u حسب x (مشتقّة داخليّة)

وَ $f'(u)$ هي مشتقّة f حسب u (مشتقّة خارجيّة)

التكاملات:

$\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + C \quad (t \neq -1$ ، حقيقيّ $t)$	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ell na} + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ell n\|x\| + C$

إذا كانت $F(x)$ هي الدالّة الأصليّة للدالّة $f(x)$ ، عندها: $\int f(mx+b)dx = \frac{1}{m}F(mx+b) + C \quad (m \neq 0)$

$\int f[u(x)] \cdot u'(x) dx = F[u(x)] + C$

الهندسة التحليليّة

الخطّ المستقيم:

المَيْل m لمستقيم يمرّ عبر النقطتَيْن (x_1, y_1) وَ (x_2, y_2) : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \neq x_2)$

معادلة مستقيم مَيْله m ، ويمرّ عبر النقطة (x_1, y_1) : $y - y_1 = m(x - x_1)$

إحداثيّات النقطة C التي تقسم (بتقسيم داخليّ) القطعة التي طرفاها هما $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ بنسبة $\frac{AC}{BC} = \frac{k}{\ell}$: $\left(\frac{\ell x_1 + kx_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + ky_2}{k + \ell}\right)$

المستقيمان اللذان مَيْلاهما m_1, m_2 يتعامدان إذا وفقط إذا: $m_1 \cdot m_2 = -1$

البُعد d بين النقطتَيْن $A(x_1, y_1)$ وَ $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

البُعد d بين النقطة (x_0, y_0) والمستقيم $Ax + By + C = 0$: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

البُعد d بين المستقيمَيْن المتوازيَيْن $Ax + By + C_1 = 0$ وَ $Ax + By + C_2 = 0$: $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

الدائرة:

معادلة المماسّ للدائرة $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ في النقطة (x_0, y_0) التي على محيط الدائرة:

$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$

القطع المكافئ:

معادلة المماسّ للقطع المكافئ $y^2 = 2px$ في النقطة (x_0, y_0) التي على القطع المكافئ: $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$

دليل القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 2px$: $x = -\frac{p}{2}$

بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 2px$: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

	المعادلة	بُعد البؤرة عن نقطة أصل المحاور	
القطع الناقص	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	
القطع الزائد	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	معادلات خطوط تقارب القطع الزائد: $y = \pm \frac{b}{a}x$

الأعداد المركَّبة

حاصل الضرب بالتمثيل القطبيّ للعددَيْن المركَّبَيْن $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ وَ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

قانون دي مواڤر: $[R(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = R^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

حلول المعادلة $z^n = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$$z_k = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

$k = 0, 1, 2, ..., n-1$

الأجسام في الفراغ

المنشور والأسطوانة: الحجم: $V = B \cdot h$ (B – مساحة القاعدة، h – ارتفاع الجسم)

الهرم والمخروط: الحجم: $V = \frac{B \cdot h}{3}$ (B – مساحة القاعدة، h – ارتفاع الجسم)

المخروط القائم: مساحة الغلاف: $M = \pi R \ell$ (R – نصف قطر الدائرة، ℓ – الخطّ الراسم)

الكرة: الحجم: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (R – نصف قطر الكرة)

مساحة السطح الخارجيّ : $M = 4\pi R^2$ (R – نصف قطر الكرة)

المتّجهات

طول المتّجه $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$: $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

حاصل الضرب السكالاريّ لمتّجهَيْن $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ وَ $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$: $\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$

حاصل الضرب السكالاريّ عندما α هي الزاوية بين المتّجهَيْن $\underline{u}$ وَ $\underline{v}$: $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos\alpha$

بُعد النقطة $P(x_1, y_1, z_1)$ عن المستوى $ax + by + cz + d = 0$:

$$\frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

البُعد بين المستويَيْن المتوازيَيْن $ax + by + cz + d_1 = 0$ وَ $ax + by + cz + d_2 = 0$:

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

الزاوية β بين المستقيم $\underline{x} = \underline{v} + t \cdot \underline{u}$ والمستوى $ax + by + cz + d = 0$ عندما $\underline{n} = (a, b, c)$:

$$\sin\beta = \frac{|\underline{n} \cdot \underline{u}|}{|\underline{n}| \cdot |\underline{u}|}$$

الزاوية α بين المستويَيْن

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ عندما } \underline{n_1} = (a_1, b_1, c_1) \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \text{ عندما } \underline{n_2} = (a_2, b_2, c_2) \end{cases} :$$

$$\cos\alpha = \frac{|\underline{n_1} \cdot \underline{n_2}|}{|\underline{n_1}| \cdot |\underline{n_2}|}$$