

למידת תהליכים ותופעות, בהקשר כלכלי פיננסי וחברתי מדעי, שמתנהגים כמודל ריבועי (משוואה ופונקציה ריבועית)

היקף: 20 שעות.

תכנים / נושאים מתמטיים (יוצגו בהקשר אורייני):

תכנים הנלמדים ביחידה זו:

1. פתרון אלגברי של משוואה ריבועית. (משוואה בלי מכנה, משוואה עם מכנה מספרי)
2. משמעות משוואה ריבועית כחיתוך של פרבולה עם ציר x.
3. הפרבולה ותכונותיה – קודקוד, סימטריה, חיתוך צירים, עלייה/ירידה, חיוביות/שליליות.

תכנים נלווים ליחידה זו:

1. פתרון משוואה ליניארית
2. פתרון משוואה ריבועית
3. פרבולה

מטרות כלליות:

1. התלמיד יפתח יכולת לזהות פרבולה נתונה כגרף המתאר פונקציה ריבועית שתבניתה האלגברית נתונה, ולהיפך.
2. התלמיד ילמד להפיק מידע מפרבולה נתונה באמצעות תכונותיה.

מטרות אופרטיביות:

1. התלמיד ידע לקשור בין פונקציה ריבועית מהצורה $y = ax^2 + bx + c$ לתיאור הגרפי של פרבולה באמצעות מקדמי הפונקציה הריבועית ובאמצעות תכונות הפרבולה.
2. בהינתן גרף של פונקציה ריבועית (פרבולה) במערכת צירים עם שנתות, המתארת מצב אורייני, התלמיד ידע:
 1. למצוא את התחום שבו לפרבולה יש משמעות בהקשר האורייני המתואר בשאלה.
 2. למצוא את נקודות החיתוך של הפרבולה עם הצירים x ו-y, לקשר את שיעורי הנקודות למצב האורייני המתואר בשאלה ולפסול תשובות שאינן מתאימות למצב המתואר בשאלה.
 3. למצוא את תחומי חיוביות/שליליות של הפרבולה, לקשר את התחומים למצב האורייני המתואר בשאלה ולפסול תשובות שאינן מתאימות למצב המתואר בשאלה.
 4. למצוא את קודקוד הפרבולה, לקבוע את סוג הנקודה (נקודת מינימום או נקודת מקסימום) ותחומי העלייה/ירידה ולקשר את תשובותיו למצב המתואר בשאלה.

3. בהינתן התבנית של הפונקציה הריבועית המתאימה לפרבולה, התלמיד ידע למצוא את נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר x באמצעות פתרון המשוואה הריבועית המתקבלת ולקשר את הפתרון למצב המתואר בשאלה.

קבוצת דוגמאות 1.1:

אפיון:

קבוצת דוגמאות זו מתמקדת בקריאת מידע מגרף של פונקציה ריבועית (פרבולה). הדוגמאות בקבוצה זו מהוות חזרה למושגים שנלמדו בחטיבת הביניים. הדוגמאות בקבוצה זו מכילות שאלות שמנחות להפקת מידע מגרף של פונקציה ריבועית בנוגע לנושאים הבאים: נקודות החיתוך עם הצירים, שיעורי נקודת הקודקוד (נקודת מינימום או נקודת מקסימום), סימטריה סביב ציר הסימטריה, תחום עלייה ותחום ירידה, תחומי חיוביות ושליליות. הדוגמאות מתבססות על סיטואציות מהסביבה היום-יומית בהן נמצאת הפרבולה.

השאלות המרכזיות בקבוצת דוגמאות זו:

- נתונה הפרבולה שבסרטוט [בסרטוט תינתן פרבולה במערכת צירים עם סימון שנתות].
1. מהן נקודות החיתוך של הפרבולה (פרבולות) עם הצירים?
 2. האם קודקוד הפרבולה הוא נקודת מקסימום או מינימום של הפרבולה? מהם שיעורי נקודת הקודקוד?
 3. מהו תחום העלייה ומהו תחום הירידה של הפונקציה?
 4. באיזה תחומים הערכים של הפרבולה חיוביים ובאילו שליליים?
 5. בהינתן נקודה על הפרבולה: מהי הנקודה על הפרבולה ששיעור y שלה שווה לשיעור y הנתון?

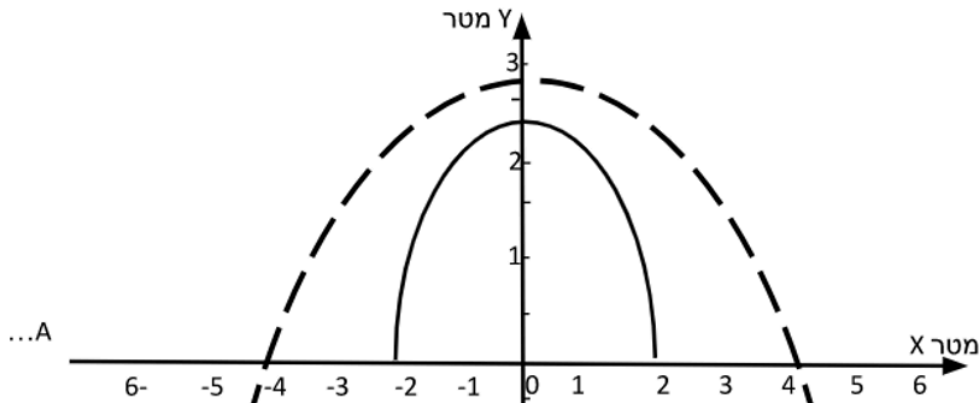
דוגמה

בגנים יפניים רבים ניתן לראות גשרים הבנויים משתי פרבולות כפי שרואים בתמונה.



התמונה לקוחה מ[האתר](#).

נניח את שתי הפרבולות, הפנימית והחיצונית, של הגשר על מערכת צירים כך שציר ה- x מונח בגובה פני המים (ראו סרטוט):



1. האם ספינה שגובהה 2.7 מ' תוכל לעבור מתחת לגשר?
2. מטייל מגיע אל הגשר מנקודה A. באיזה תחום יהיה המטייל כל זמן שהוא מטפס על הגשר ובאיזה תחום יהיה כשהוא יורד מהגשר?
3. זוג הורים וילד מטיילים והילד מטפס ויושב בראשו של הגשר. האב עומד בנקודה $(-5, 0)$ והאם עומדת בנקודה B. מרחקה של האם מהילד שווה למרחקו של האב מהילד. מהם שיעוריה של נקודה B?

קבוצת דוגמאות 1.2:

אפיון:

השאלות בקבוצה הזו מתמקדות בתבנית הריבועית $y = ax^2 + bx + c$, בתיאור הגרפי של הפונקציה – הפרבולה, והקשר ביניהם.

השאלות יעסקו בקשר בין מקדמי הפונקציה הריבועית לבין המאפיינים של הפרבולה המתארת פונקציה זו: הקשר בין סימן המקדם של האיבר הריבועי לבין היות נקודת הקודקוד מינימום או מקסימום, הקשר בין ערכו של המקדם החופשי לבין נקודת חיתוך הפרבולה עם ציר y , הקשר בין היחס $-\frac{b}{2a}$ לבין מיקומו של קודקוד הפרבולה.

השאלות העיקריות שתישאלנה בקבוצת דוגמאות זו:

1. בהינתן תבנית מהצורה $y = ax^2 + bx + c$ ומספר גרפים של פרבולות, מהו הגרף המתאים לתבנית הנתונה? נמקו את הבחירה.
2. בהינתן סרטוט של פרבולה ומספר תבניות אלגבריות מהצורה $y = ax^2 + bx + c$, מהי התבנית המתאימה לפרבולה הנתונה? נמקו את הבחירה.
3. בהינתן סרטוט של פרבולה הממוקמת במערכת צירים ללא שנתות ובהינתן תבנית של פונקציה ריבועית:
 1. מהם שיעורי נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר y ? (סמנו נקודה זו בגרף)
 2. מהם שיעורי נקודת הקודקוד (מינימום/מקסימום) של הפרבולה? (סמנו נקודה זו בגרף)
 3. מהן נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר x ? (סמנו נקודות אלו בגרף)
 4. מהם תחומי החיוביות ותחומי השליליות של הפרבולה?
 5. מהם תחומי העלייה/ירידה של הפרבולה?

דוגמה

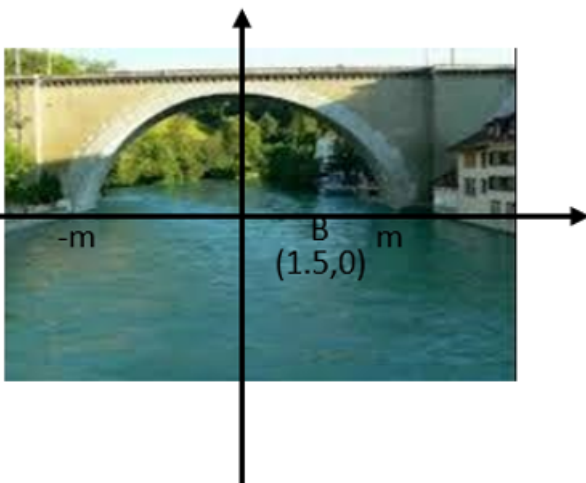
בתמונה מצולם גשר שצורת הקשת הפנימית שלו היא פרבולה.



התמונה לקוחה מהאתר

נתון שהפונקציה שמתארת את הגשר שבתמונה היא הפונקציה $y = -x^2 + 9$ נסמן על תמונת הגשר שבצילום מערכת צירים,

כך שציר x מונח בגובה פני המים של הנהר שמעליו מונח הגשר וציר y עובר בקודקוד הקשת (הפרבולה) של הגשר (ראו איור). בנקודה בה הגשר נוגע במים מתקיים $x = m$.

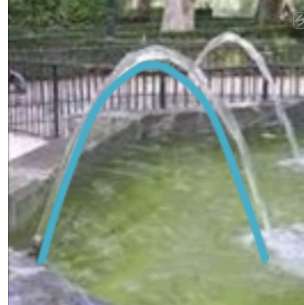


1. מהו ערכו של m ?
 2. האם ספינה שגובהה המקסימלי הוא 9.2 מטר, יכולה לעבור מתחת לגשר? נמקו.
 3. האם ספינה, שגובהה המקסימלי 3 מטר, תוכל לעבור מתחת לגשר? נמקו.
 4. הנווט והקפטן של ספינה, שגובהה המקסימלי 7 מטר, התווכחו ביניהם אם יש חשיבות באיזה צד ביחס לציר ה- y כדאי לספינה לשוט כדי להבטיח מעבר בטוח מתחת לגשר.
- הנווט טען שאפשר לשוט בנתיב שעובר בנקודה B שעל ציר x שעבורה $x = 1.5$ (ראו איור).
- הקפטן טען שהספינה יכולה לעבור בנתיב שנמצא בתחום $-1 \leq x \leq 1$

מי מהשניים צודק לדעתכם?

דוגמה

בתמונה מצולם מסלול המים במזרקה. צורת הזרם יוצרת פרבולה.

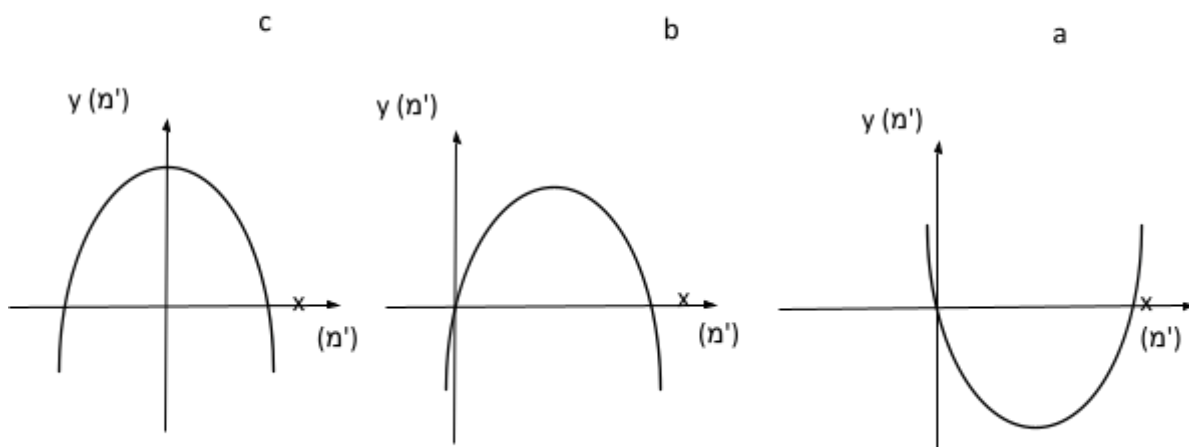


1. אדריכל תכנן מזרקה דומה על פי דרישה של לקוח.

האדריכל אמר ללקוח שהפונקציה הריבועית המתארת את מסלול זרימת המים במזרקה שלו היא: $y = -x^2 + 8x$. האדריכל התכוון גם למסור ללקוח את הסרטוט של הפרבולה, אבל בטעות נתן לו שלושה סרטוטים. רק סרטוט אחד מהשלושה מתאים לפונקציה.

1.

- (i) מהו הגרף המתאים לפונקציה הנתונה? נמקו את קביעתכם.
- (ii) הסבירו מדוע הגרפים האחרים לא מתאימים לתבנית הנתונה.



ענו על הסעיפים הבאים באמצעות התבנית הנתונה ובאמצעות הפרבולה שבחרתם

בסעיף 1:

2. מהו התחום שבו הפרבולה מתארת את מסלול המים במזרקה?
3. מהם שיעורי הנקודה בה המים מגיעים לגובה המקסימלי? סמנו את הנקודה שקיבלתם על הגרף שבחרתם בסעיף א.
4. באיזה תחום המים נמצאים במגמת עלייה ובאיזה תחום המים נמצאים במגמת ירידה?
5. באיזה ערך של x פוגשים מי המזרקה את מי הבריכה?
6. מהו ציר הסימטריה של הפרבולה?

קבוצת דוגמאות 1.3

אפיון:

השאלות בקבוצה הזו מתמקדות במצבים המתוארים על ידי פונקציות ריבועיות, ובקשר בין הפונקציה הריבועית לבין התיאור הגרפי שלה (הפרבולה). הדוגמאות בקבוצה זו כוללות: זיהוי פונקציה ריבועית המייצגת סיטואציה שנתונה באמצעות ייצוג מילולי ותיאור הגרפי שלה, פתרון משוואה ריבועית ובחירה של פתרונות המתאימים לסיטואציה המתוארת בשאלה.

השאלות העיקריות שתישאלנה בקבוצת דוגמאות זו

1. בהינתן תיאור מילולי של סיטואציה, מהי המשוואה הריבועית המתארת את הסיטואציה?
2. בהינתן תיאור מילולי של סיטואציה, מהו הגרף המתאר את הסיטואציה המתוארת בשאלה?
3. בהינתן תיאור גרפי (פרבולה) של סיטואציה, מהן נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר x ומה משמעותן בהקשר האורייני?
4. בהינתן תיאור גרפי (פרבולה) של סיטואציה, מהו התחום בגרף שיש לו משמעות בהקשר האורייני? (כולל תחום חיוביות/שליליות, תחום העלייה/הירידה)
5. בהינתן תיאור אלגברי או גרפי (פרבולה) של סיטואציה, מהי נקודת המינימום/מקסימום של הפרבולה ומה משמעותה בהקשר האורייני?

דוגמה

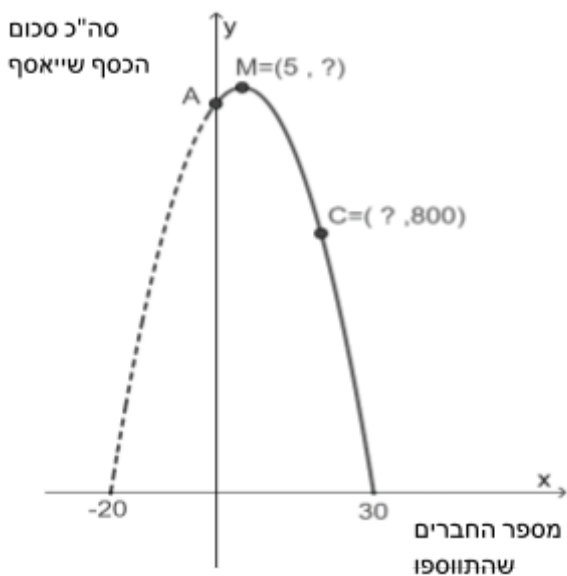
קבוצה של 20 חברים החליטה לצאת לטיול. למימון הטיול היה על כל אחד לשלם 60 שקלים. מארגן הטיול רצה לעודד את חברי הקבוצה להביא חברים נוספים ולכן שלח מסרון ובו כתוב: "צרפו חברים נוספים. כל חבר שיצטרף יוזיל את המחיר בשני שקלים לכל מטייל".

כלומר, אם יצטרף חבר אחד, כל אחד מ- 21 המטיילים ישלם 58 שקלים (2 ש"ח פחות).
אם יצטרפו 2 חברים, כל אחד מ- 22 המטיילים ישלם 56 שקלים (4 ש"ח פחות) וכך הלאה.

נסמן ב x את מספר החברים החדשים שיצטרפו לקבוצה ההתחלתית.
אלו מהפונקציות הבאות מתארת את סכום הכסף שייאסף מארגן הטיול מהמטיילים אם יצטרפו x חברים חדשים?

1. $y = 60 - 2x$
2. $y = (20 + x)(60 - x)$
3. $y = (20 + x)(60 - 2x)$
4. $y = (20 + x) + (60 - 2x)$

הפרבולה שבסרטוט מתארת את הפונקציה שקיבלת.



ענו על השאלות הבאות:

1. מדוע, לדעתכם, לא מסורטט החלק של הפרבולה שנמצא מתחת לציר x ?
2. האם לדעתכם, החלק המקווקו שבסרטוט מתאים לתנאי השאלה? אם לא – מדוע? אם כן – מה משמעותו?
3. אם לא יתווסף לקבוצה הראשונית אף חבר נוסף, מהו הסכום שייאסף לטיול?
4. אילו מהנקודות המסומנות על הגרף (A, M, C) מתארת את המצב בסעיף ו' הסבירו את קביעתכם.
5. נתון: הנקודה M היא נקודת מקסימום של הפרבולה ושיעור ה- x שלה הוא 5. חשבו את ערכו של y .
6. לפניכם 6 טענות, חלק מהן נכונות. סמנו את הטענות הנכונות בעיגול ונמקו את קביעותיכם:
 - i. אם יתווספו לקבוצה 5 אנשים, הסכום שייאסף יהיה 1250 שקלים.
 - ii. אם יתווספו לקבוצה 1250 אנשים, הסכום שייאסף יהיה 5 שקלים.
 - iii. אם ייאסף סכום כסף של 1250 שקלים, אז כל אחד מהיוצאים לטיול ישלם 5 שקלים.
 - iv. הסכום הגבוה ביותר שאפשר לאסוף לטיול הוא 1250 שקלים.

- v. אם יתווספו לקבוצה 10 חברים חדשים אז סכום הכסף שייאסף יהיה גדול מ-1250.
- vi. אם יתווספו לקבוצה 10 חברים חדשים אז סכום הכסף שייאסף יהיה קטן מ-1250.
7. הנקודה C נמצאת על הפרבולה. שיעור ה-y של C הוא 800. הציבו בתבנית הנתונה ומצאו את ערכו של x.
8. כמה חברים חדשים הצטרפו אם הסכום שנאסף הוא 800 שקלים?
9. האם לדעתך, כדאי למדריך לאפשר ליותר מ-5 חברים להתווסף לקבוצה?

דוגמאות נוספות

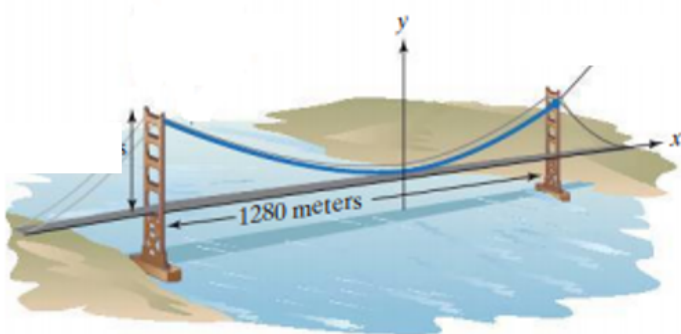
דוגמה 1

אופנוען יוצא אל מחוץ לעיר. מרחקו מהעיר מתואר באמצעות הפונקציה הריבועית $M = 15t^2 + 57t$ (t שעות, M ק"מ).

- מה היה מרחקו של האופנוען מן העיר כעבור שעה אחת?
- כעבור כמה שעות היה מרחקו של האופנוען מן העיר 174 ק"מ?
- הקליטה של הטלפונים הניידים משתבשת במרחק של 306 ק"מ מן העיר. כעבור כמה שעות מרגע היציאה מתחילה להשתבש הקליטה בטלפון של האופנוען?

דוגמה 2

המגדלים של גשר "שער הזהב" נמצאים במרחק של 1,280 מטרים זה מזה. לכבל בין המגדלים יש צורה של פרבולה והכבל נוגע בכביש באמצע הדרך בין המגדלים.



נתון כי הפונקציה $y = \frac{1}{2560} \cdot x^2$ מתארת את הפרבולה

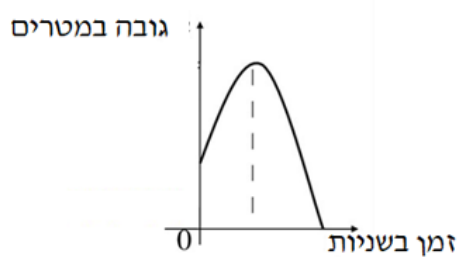
- מהו גובה הכבל 80 מטרים ממרכז הכביש?

2. מהו גובה המגדלים?
3. מהו גובה הכבל 200 מטרים מהמגדל הימני?
4. באיזה מרחק מהמגדל הימני גובה הכבל הוא 10 מטרים מעל הכביש?

דוגמה 3

מזל זורקת כדור כלפי מעלה (מאונך לקרקע).

גובה הכדור מתואר על ידי הפונקציה הריבועית: $y = -5x^2 + 10x + 1.5$.

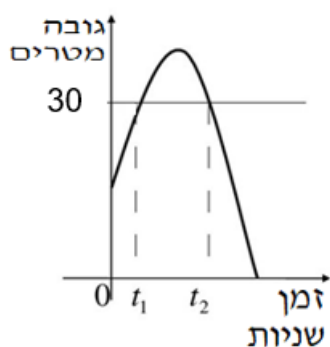


1. מאיזה גובה מזל זרקה את הכדור?
2. כעבור כמה שניות היה הכדור בגובה המקסימלי מהקרקע?
3. באיזה תחום הכדור היה במגמת עלייה?
4. תוך כמה שניות (מרגע הזריקה) חזר הכדור לקרקע? (דייקו שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית).
5. האם יש משמעות ל- $x = 3$? הסבירו.

דוגמה 4

דני זורק אבן כלפי מעלה (מאונך לקרקע).

הגובה של האבן מעל הקרקע מתואר על ידי הפונקציה הריבועית $h = -5t^2 + 39t + 2$



1. באיזה גובה מעל הקרקע הייתה האבן ברגע הזריקה?
2. כעבור כמה שניות מרגע הזריקה הייתה האבן בגובה של 30 מטרים?
3. כמה זמן הייתה האבן מעל גובה של 30 מטרים?
4. כעבור כמה שניות מרגע הזריקה הייתה האבן בגובה המקסימלי?

5. כעבור כמה שניות מרגע הזריקה האבן נפלה לקרקע?

דוגמה 5

במפעל מסוים הפונקציה $y = ax^2 - 3x + 6.5$ מתארת את ההון של המפעל (במיליוני שקלים) בכל שנה.

לפניכם הגרף המתאר את ההון של המפעל.

1. קבעו: האם $a = \frac{1}{2}$ או $a = -\frac{1}{2}$?

2. מה היה ההון הראשוני של המפעל (נקודה C)?

3. מה היה ההון של המפעל כעבור שנה (נקודה A)?

4. במשך כמה שנים היה ההון של המפעל בירידה?

5. מה היה ההון הכי קטן של המפעל?

6. האם הייתה שנה נוספת בה ההון של המפעל היה כמו בנקודה A?

