

אשכול פיננסי וכלכלי - תכנון ליניארי

היקף: 25 שעות.

תיאור כללי של היחידה

ביחידה זו יכירו התלמידים ענף במתמטיקה שימושית שפותח בשנות הארבעים של המאה העשרים. מטרת ענף מתמטי זה היא למצוא פתרון אופטימלי לבעיות מורכבות בתחומים שונים כגון כלכלה, ניהול, תעשייה, חקלאות, תזונה, וכדומה. ביחידה יושם דגש על ההיבט הכלכלי. במציאות, הבעיות מכילות לרוב מספר גדול של משתנים ונהוג לפתור אותן באמצעות מחשבים אך הבעיות שיוצגו ביחידה זו יכילו שני משתנים כך שניתן לענות עליהן באמצעות שיטות גרפיות פשוטות.

ביחידה זו התלמידים ילמדו לזהות משתנים רלוונטיים בסיטואציה כלכלית/פיננסית (או סיטואציה בתחום אחר), לתרגם את מערכת האילוצים למערכת אי-שוויונות, להציג את מערכת אי-השוויונות בדרך גרפית ולהשתמש בהצגה הגרפית ובטכניקה אלגברית פשוטה על מנת למצוא את הפתרון האופטימלי לבעיה.

נושאים מתמטיים שנדרשים כנושאי קדם ליחידה:

1. קריאה וסימון של נקודות במערכת צירים.
2. משוואת ישר – משמעות המקדמים, סרטוט במערכת צירים.
3. מציאת נקודת חיתוך של שני ישרים כפתרון מערכת משוואות ליניאריות.

נושאים מתמטיים ביחידה:

1. פתרון גרפי של אי-שוויונות ליניאריים.
2. תרגום מייצוג מילולי לייצוג אלגברי – רישום תבנית של פונקציה ממעלה ראשונה בשני משתנים $f(x,y)$ וחישוב ערכיה בנקודות נבחרות.
3. היכרות עם המושגים: מערכת אילוצים, פונקציית מטרה, תחום אפשרי של פונקציית המטרה
4. ערך מקסימלי וערך מינימלי של פונקציה בשני משתנים ממעלה ראשונה בתחום אילוצים נתון.

מטרות כלליות ביחידה:

1. התלמידים יכירו סיטואציות מתחומים שונים, ובהם התחום הכלכלי, בהם נדרשת מציאה של ערך אופטימלי של סיטואציה על מנת לקבל החלטה מושכלת הנסמכת על שיקולי כדאיות.
2. התלמידים יבינו את החשיבות של מציאת ערך אופטימלי לסיטואציה נתונה.
3. התלמידים יכירו את השלבים השונים הנדרשים לפתרון בעיה בתכנון ליניארי.
4. התלמידים יבינו את ההקשר בין פתרון השאלה לבין הסיטואציה הנתונה בשאלה.

מטרות אופרטיביות

1. בהינתן סיטואציה כלכלית או פיננסית, המתוארת באופן מילולי, התלמידים ידעו:
 1. לרשום את מערכת האילוצים של הסיטואציה באמצעות מערכת משוואות ואי-שוויונות ממעלה ראשונה.
 2. לרשום את פונקציית המטרה ולקבוע אם הדרישה היא למקסימום או מינימום של פונקציה זו.
 3. למצוא את התחום האפשרי באמצעות השלבים הבאים:
 1. סרטוט של הישרים המתאימים למערכת האילוצים במערכת צירים.
 2. סימון פתרון האי-שוויון במערכת הצירים (או המשלים).
 3. סימון התחום המהווה את הפתרון של מערכת אי השוויונות (התחום האפשרי).
 4. לחשב את השיעורים של נקודות החיתוך בין הישרים התוחמים את התחום האפשרי.
 5. להציב את השיעורים של נקודות החיתוך בפונקציית המטרה ולזהות את הנקודה (או הנקודות) בגרף המתארת את המצב האופטימלי (מינימלי או מקסימלי) על פי הנדרש בשאלה.
 6. להשיב על שאלות שמצביעות על הבנת הקשר בין פתרון השאלה לבין הסיטואציה הכלכלית-פיננסית הנתונה.
2. בהינתן סיטואציה המתוארת באופן מילולי, ותיאור גרפי של הישרים המהווים את גבולות תחומי האילוצים המתארים את הסיטואציה הנתונה, או תיאור גרפי של התחום האפשרי, התלמידים ידעו:
 1. לזהות איזה גרף שייך לאיזה אילוץ.
 2. לסמן את התחום המתאים לכל אילוץ (אם אינו נתון).
 3. לזהות ולסמן את התחום האפשרי (אם אינו נתון).
3. בהינתן סיטואציה המתוארת באופן מילולי, גרפי, בטבלה או שילוב ביניהם, ואשר משולב בה נתון פרמטרי, התלמידים ידעו:
 1. לרשום את מערכת האילוצים ו/או את פונקציית המטרה באמצעות הפרמטר.
 2. לרשום, בהתאם לנתוני השאלה, משוואה ליניארית או מערכת משוואות כשהפרמטר לא ידוע.
 3. לפתור את המשוואה או מערכת המשוואות ולמצוא את ערך הפרמטר.

הערות והדגשים:

1. מומלץ להיעזר בתוכנה המאפשרת סרטוט גרפים וסימון תחומי אי שוויון ליניארי.
2. ביחידה זו ישולבו דוגמאות גם מתחומים נוספים מעבר לתחום הפיננסי – כלכלי.

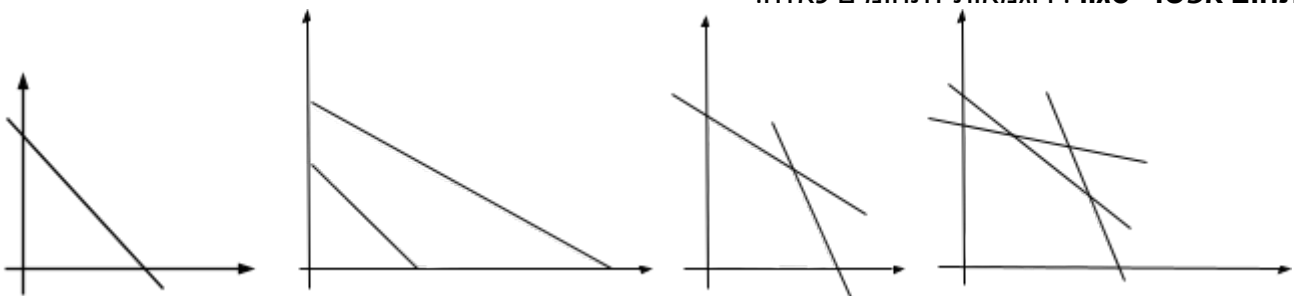
קבוצת דוגמאות תכנון ליניארי

בכל קבוצת הדוגמאות הבאות, מוצגים מצבים אורייניים אשר בהם התלמידים מתבקשים לפתור שאלות בתכנון ליניארי באמצעות שימוש בכלי כתיבה, סרגל ומחשבון ו/או באמצעות תוכנה גרפית מתאימה ולהשיב על שאלות המצביעות על הבנת הסיטואציה המתוארת בשאלה ואילווציה.

קבוצת דוגמאות 1.1

אפיון: השאלות בקבוצת דוגמאות זו מכילות מערכת של 3-5 אילווצים שתיאורם הגרפי נותן

תחום אפשרי סגור. דוגמאות לתחומים כאלה:

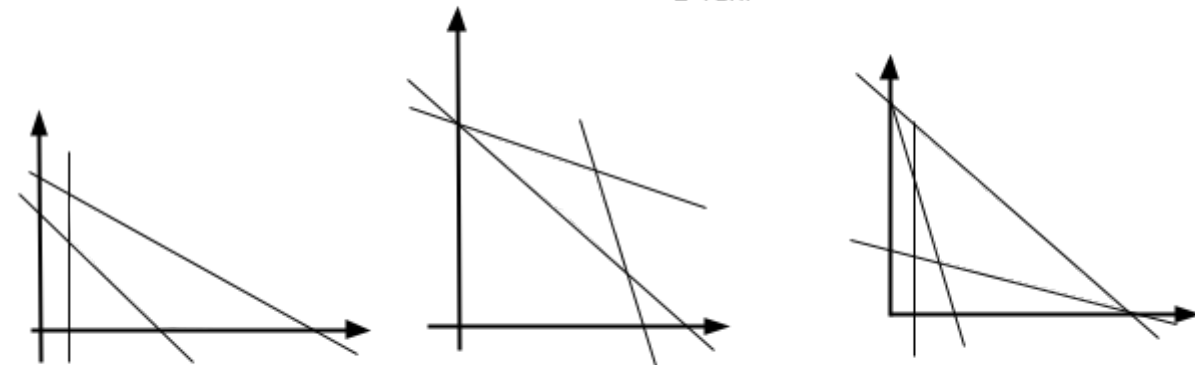


תחום סגור הנוצר מישר אחד שחותך את שני הצירים

תחום סגור הנוצר משני ישרים, שאינם נחתכים ברביע ראשון (לא בהכרח מקבילים), ושני הצירים

תחום סגור הנוצר משני ישרים שנחתכים ברביע הראשון ושני הצירים.

תחום סגור הנוצר משלושה ישרים שלפחות שניים מהם נחתכים ברביע הראשון ושני הצירים



תחום סגור הנוצר משלושה ישרים והכולל רק את אחד הצירים בגבולותיו

תחום סגור הנוצר משלושה ישרים ואינו כולל את הצירים בגבולותיו

תחום סגור הנוצר מארבעה ישרים, ואינו כולל את הצירים בגבולותיו

השאלות שתישאלנה בקבוצת דוגמאות זו קשורות לכל השלבים הנדרשים לפתרון שאלה

בתכנון ליניארי (מטרה אופרטיבית מס' 1) או לחלקם (מטרה אופרטיבית מס' 2).

דוגמה

בנגריה מייצרים שני סוגים של שולחנות: שולחנות כתיבה ושולחנות אוכל.
ידוע, שביום אחד יכול המפעל לייצר לכל היותר 50 שולחנות.
הרווח הנקי של הנגרייה לכל שולחן כתיבה הוא 50 שקלים והרווח לכל שולחן אוכל הוא 40 שקלים.

1. סרטטו את תחום הפתרונות האפשרי למערכת האילוצים של השאלה.
2. באחד הימים, לאחר שסיימו לייצר 20 שולחנות כתיבה, ניסה מנהל העבודה לחשב כמה שולחנות כתיבה יהיה עליו לייצר במטרה להרוויח 2,600 ש"ח ביום זה.
לאיזו מסקנה הגיע מנהל העבודה?
3. סמנו על הגרף את הנקודה (20,10). האם הנקודה נמצאת בתוך התחום האפשרי או מחוץ לו? מה המשמעות של התשובה בהקשר לתוכן השאלה?
4. כמה שולחנות מכל סוג על הנגרייה לייצר ביום, כדי שהרווח היומי של הנגרייה יהיה מקסימלי?

דוגמה

- במפעל העובדים מתחלקים לשני סוגים: בעלי תואר אקדמי, חסרי תואר אקדמי.
משכורתו החודשית (ברוטו) של בעל תואר היא 20,000 שקלים ומשכורתו החודשית (ברוטו) של חסר תואר היא 14,000 שקלים.
המפעל יכול להעסיק לכל היותר 30 עובדים משני הסוגים יחד.
התקציב למשכורות החודשיות של המפעל הוא לכל היותר 480,000 שקלים.
ההכנסה החודשית של המפעל מעבודתו של כל בעל תואר היא 7,000 שקלים וההכנסה החודשית מעבודתו של כל חסר תואר היא 5,500 שקלים.
1. כמה עובדים מכל סוג כדאי לבעל המפעל להעסיק, כדי שההכנסה החודשית הכוללת תהיה מקסימלית?
 2. מהי ההכנסה החודשית המקסימלית הכוללת של המפעל?
 3. באחד החודשים, אחד מבעלי התואר האקדמי היה חולה, ובנו, חסר התואר האקדמאי, החליף אותו.
1. האם המצב החדש תואם למערכת האילוצים? נמקו.
2. האם ההחלפה הייתה משתלמת מנקודת המבט של בעל המפעל? נמקו.

דוגמה

מפעל גדול מייצר שני סוגים של שוקולד: "שוקולד חלב" ו"שוקולד מריר".

הכנת השוקולדים נעשית באמצעות שתי מכונות.

מכונה א - מייצרת את התערובת ממנה עשויים השוקולדים.

מכונה ב - יוצקת את השוקולד בטבליות ואורזת בנייר.

לפניכם נתוני הזמן הדרוש לכל אחת משתי המכונות להכנת 1 ק"ג שוקולד:

- מכונה א מייצרת תערובת ל- 1 ק"ג שוקולד חלב ב- 15 דקות ותערובת ל- 1 ק"ג שוקולד מריר בחצי שעה.

- מכונה ב יוצקת ואורזת 1 ק"ג שוקולד חלב ב- 25 דקות ו- 1 ק"ג שוקולד מריר ב- 20 דקות.

מכונה א יכולה לעבוד ברציפות 2 שעות לכל היותר.

מכונה ב יכולה לעבוד ברציפות 3 שעות לכל היותר.

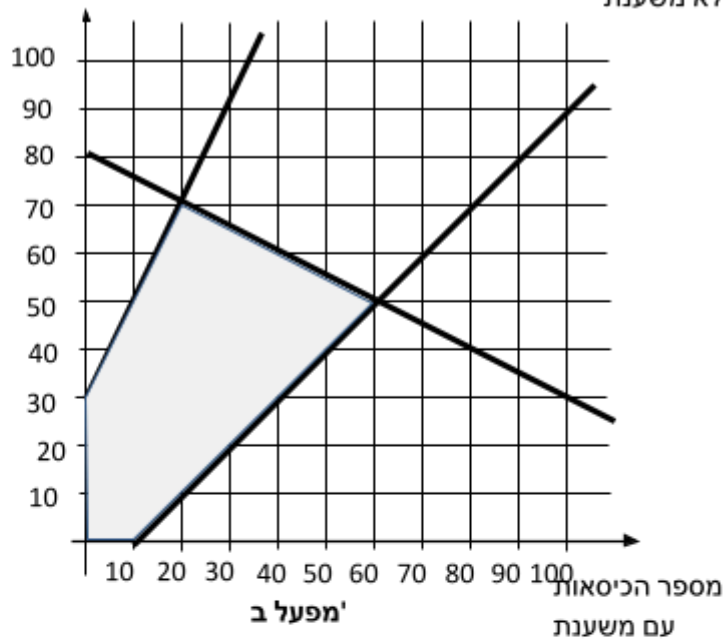
הרווח של המפעל לכל 1 ק"ג שוקולד חלב הוא 10 שקלים והרווח לכל 1 ק"ג שוקולד מריר הוא 12 שקלים.

מהי כמות השוקולד (ביחידות ק"ג) מכל סוג שכדאי למפעל לייצר ביום כדי שהרווח של המפעל ביום יהיה מקסימלי?

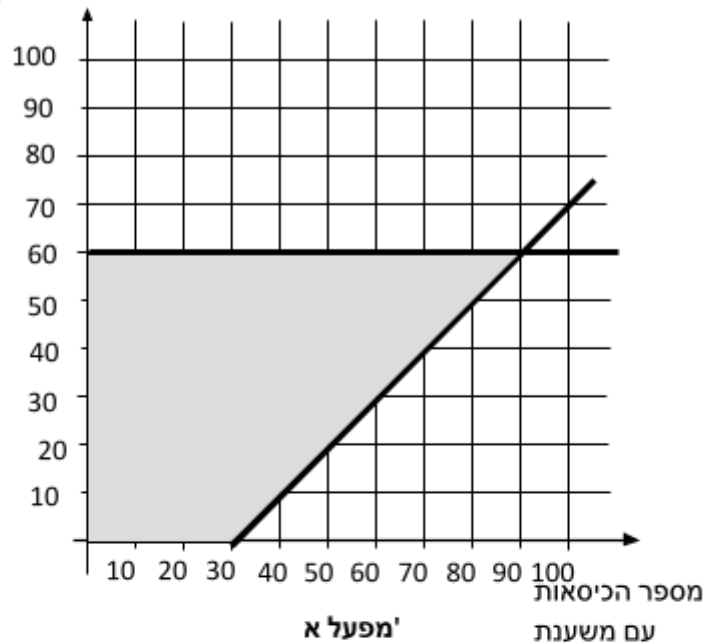
דוגמה

מפעל מייצר שני סוגי כסאות: כסאות עם משענת וכסאות ללא משענת.
 המפעל מייצר את הכיסאות בשלושה מפעלי משנה. לפניכם האילוצים של כל אחד מן
 המפעלים:

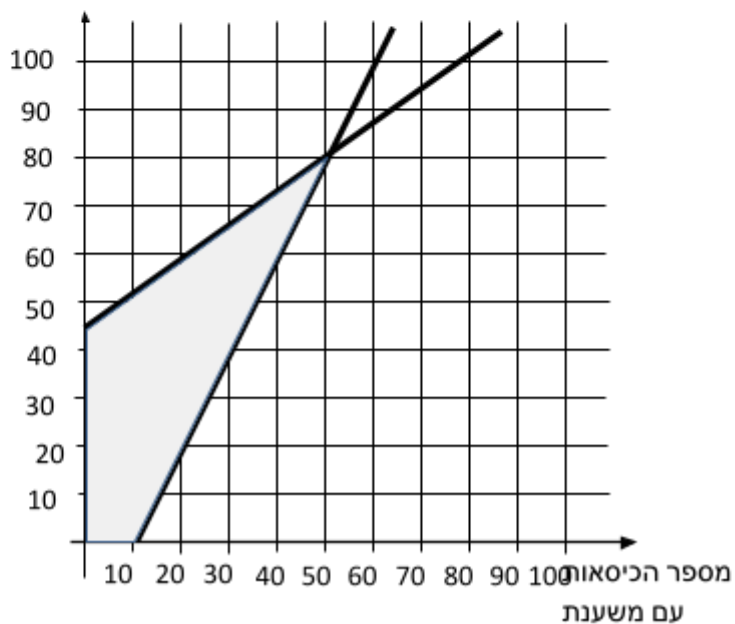
מספר כסאות
 ללא משענת



מספר כסאות
 ללא משענת



מספר כסאות
 ללא משענת



מפעל ג'

הרווח עבור כיסא עם משענת הוא 40 ₪ ועבור כיסא ללא משענת הוא 25 ₪.

1. באיזו המפעלים יש לבחור כדי שהרווח שלו יהיה מקסימלי?
2. כמה כסאות עם משענת וכמה כסאות ללא משענת יש לייצר כדי להגיע לרווח המקסימלי?

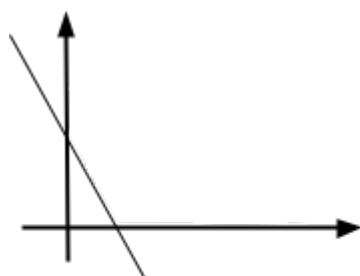
קבוצת דוגמאות 1.2

אפיון:

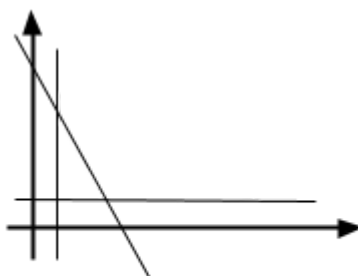
השאלות בקבוצת דוגמאות זו מכילות מערכת של 3-5 אילוצים שתיאורם הגרפי נותן **תחום**

אפשרי פתוח.

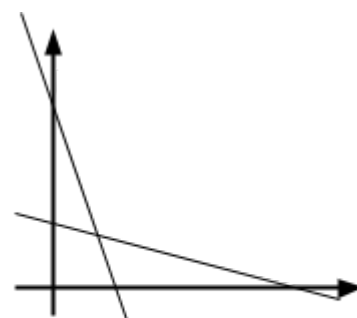
דוגמאות לתחומים כאלה:



תחום פתוח הנוצר משלושה ישרים, ששניים מהם הם הצירים



תחום פתוח הנוצר משלושה ישרים, ואינו כולל את הצירים בגבולותיו



תחום פתוח הנוצר מארבעה ישרים ששניים מהם הם הצירים

השאלות שתישאלנה בקבוצת דוגמאות זו קשורות לכל השלבים הנדרשים לפתרון שאלה

בתכנון ליניארי (מטרה אופרטיבית מס' 1) או לחלקם (מטרה אופרטיבית מס' 2).

דוגמה

במחלקת כיסאות של מפעל רהיטים מייצרים שני סוגי כיסאות: כיסאות לפני הבית וכיסאות גינה. בכל הכיסאות המושבים והמשענות עשויים מעץ (אותו סוג עץ) והרגליים מאלומיניום.

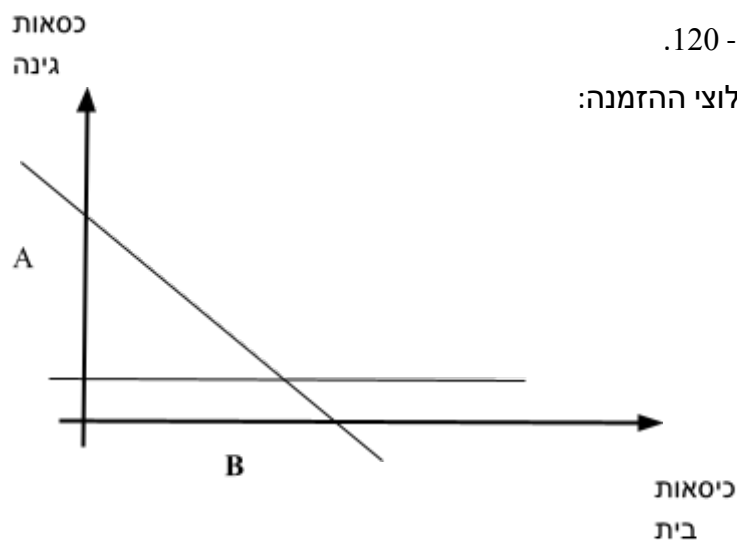
לייצור כיסא-בית משתמשים ב- 0.18 מ"ר עץ וב- 2.5 ק"ג אלומיניום,

ולייצור כיסא-גינה משתמשים ב- 0.14 מ"ר עץ וב- 2 ק"ג אלומיניום.

המחיר שמשלם המפעל עבור 1 מ"ר עץ הוא 50 שקלים והמחיר ל-1 ק"ג אלומיניום הוא 6 שקלים.

1. חשבו את מחיר עלות החומרים לייצור כיסא אחד לבית ומחיר עלות החומרים לייצור כיסא אחד לגינה.

למפעל הגיעה הזמנה עם דרישה שיהיו לפחות 500 כסאות ומתוכם, מספר הכיסאות לגינה יהיה גדול מ-120. השטח הצבוע מתאר את אילוצי ההזמנה:



2. חשבו את שיעורי הנקודות A ו-B והסבירו את המשמעות של כל נקודה בהקשר לשאלה.
 3. סמנו בסרטוט נקודה המתארת ייצור של 500 כיסאות-בית ו-120 כיסאות גינה. האם הנקודה שסימנתם מתאימה לאילוצי השאלה? נמקו.
 4. סמנו בסרטוט נקודה המתארת ייצור של 100 כיסאות-בית ו-300 כיסאות-גינה. האם נקודה זו מתאימה לאילוצי השאלה? נמקו.
 5. היכן, בסרטוט, נמצאות כל הנקודות שמתארות ייצור של כיסאות-גינה בלבד?
 6. מה צריך להיות מספר הכיסאות שעל המפעל לייצר כך שעלות החומרים תהיה מינימלית?

דוגמה (שילוב של תחום פתוח - בחלק א, ותחום סגור - בחלק ב)

במסגרת טיפול רפואי, הומלצה למטופל דיאטה מיוחדת שמכילה רק שני סוגי מזון. פירוט התכולה של יחידת מזון מכל סוג:

סוג	פחמימות	חלבונים	סיבים תזונתיים
יחידת מזון מסוג א	50 גרם	40 גרם	25 גרם
יחידת מזון מסוג ב	40 גרם	16 גרם	5 גרם

לפי הוראות הרופא, המטופל חייב לאכול ביום לפחות 800 גרם פחמימות, לפחות 480 גרם חלבונים ולפחות 200 גרם סיבים תזונתיים.

תנאי נוסף שהציב הרופא הוא שהמטופל חייב באכילת שני סוגי המזון.

סמנו: x – מספר יחידות המזון מסוג א שהמטופל צריך לאכול.

y – מספר יחידות המזון מסוג ב שהמטופל צריך לאכול.

חלק א

1. האם, בהתאם להוראות הרופא, המטופל רשאי לאכול ביום 20 יחידות מזון מסוג א ו-0 גרם מזון מסוג ב?
2. האם, בהתאם להוראות הרופא, המטופל רשאי לאכול ביום 10 יחידות מזון מסוג א ו-20 גרם יחידות מזון מסוג ב?
3. באחד הימים, המטופל אכל 6 יחידות מזון מסוג א ו-15 יחידות מזון מסוג ב. האם המטופל מילא באותו יום אחרי הוראות הרופא? נמקו.
4. ביום אחר, המטופל אכל 6 יחידות מזון מסוג א ו-10 יחידות מזון מסוג ב. האם המטופל מילא באותו יום אחרי הוראות הרופא? אם כן, נמקו. אם לא, אילו מהוראות הרופא לא מולאו?
5. מהו המספר המינימלי של יחידות מזון מכל סוג שעל המטופל לאכול ביום בהתאם להוראות הרופא?

חלק ב

6. לאחר תקופה של הקפדה על הדיאטה הנ"ל, הבחין המטופל שהוא עולה במשקל, ובכך אינו מעוניין. כדי למנוע השמנה, הקפיד המטופל לצרוך לכל היותר 1,300 גרם פחמימות. (תוך שמירה על הוראות הרופא הנ"ל) מהו המספר המקסימלי של יחידות המזון מכל סוג שעל החולה לאכול ביום כדי לעמוד בכל התנאים?

קבוצת דוגמאות 1.3

אפיון:

השאלות בקבוצת דוגמאות זו מכילות מערכת של 3-5 אילוצים שניתנים על ידי תיאור מילולי או תיאור גרפי ופונקציית המטרה שמכילה פרמטר אחד. השאלות מתמקדות במציאת ערך הפרמטר על סמך נתונים בשאלה, כגון: ערך מינימלי ו/או ערך מינימלי נתון של פונקציית המטרה, ערך זהה של פונקציית המטרה בשני קודקודי התחום האפשרי ועוד.

השאלות שתישאלנה בקבוצת דוגמאות זו קשורות לכל השלבים הנדרשים לפתרון שאלה בתכנון ליניארי (מטרה אופרטיבית מס' 1) או לחלקם (מטרה אופרטיבית מס' 2) וכן במציאת ערך הפרמטר על ידי פתרון משוואה ליניארית או מערכת משוואות ליניאריות (מטרה אופרטיבית מס' 3)

דוגמה

במפעל פועלות שלוש מכונות D_1 , D_2 , D_3 המשמשות להכנת שני סוגים של מוצרים (א ו-ב). בטבלה הבאה מפורטות:

- השעות הדרושות לכל מכונה לייצור פריט אחד מכל סוג של מוצר.
- המספר המקסימלי של השעות העומדות לרשות המפעל במחזור ייצור אחד.
- הרווח הנקי שמקבל המפעל ממכירת פריט אחד מכל סוג.

	D_3	D_2	D_1	
רווח נקי				
90 ₪	1 שעה	4 שעות	1 שעה	מוצר מסוג א

מוצר מסוג ב	1 שעה	2 שעות	3 שעות	k ש"ח
מספר מקסימלי של שעות במחזור אחד	12 שעות	40 שעות	30 שעות	

נסמן:

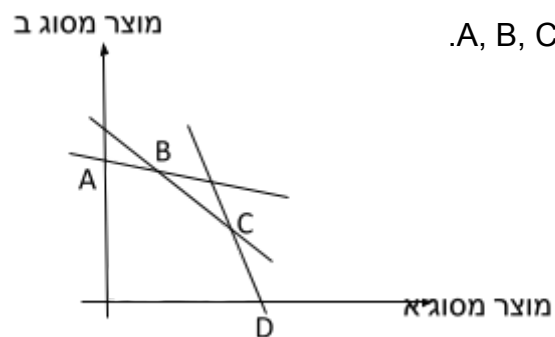
x - מספר שקיות החטיפים בכל חבילת שי

y - מספר חפיסות השוקולד בכל חבילת שי.

1. רשמו את מערכת האילוצים של השאלה.

2. הגרף הבא מתאר את מערכת האילוצים הנ"ל.

מצאו את השיעורים של הנקודות A, B, C, D.



ידוע שבשתי הנקודות B ו-C מתקבל אותו רווח, שהוא הרווח המקסימלי.

מצאו את הרווח שהמפעל מקבל ממכירת המוצר מסוג ב.