

הערכת סיכויים בעזרת מודל של התפלגות נורמלית

אשכול חברה ומדע / אשכול פיננסי כלכלי

היקף: 20 שעות.

תכנים / נושאים מתמטיים (יוצגו בהקשר האורייני):

- תכונות עקומת ההתפלגות הנורמלית.
- שימושים בעקומה של ההתפלגות הנורמלית:
 - א. למציאת הסתברות או למציאת החלק היחסי (באחוזים) של קבוצה עם תכונה משותפת.
 - ב. למציאת תכונה של קבוצה בהינתן החלק היחסי של הקבוצה.
- ציון תקן.

מטרות כלליות

1. התלמיד יכיר את התופעות המתפלגות נורמלית ואת התופעות שלא מתפלגות נורמלית.
2. התלמיד יבין שצורת גרף ההתפלגות הנורמלית נקבעת על ידי ממוצע כמדד מרכז וסטיית תקן כמדד פיזור.
3. התלמיד יבין את משמעות התכונות של ההתפלגות הנורמלית: סימטריה, ריכוז מרבית הנתונים במרכז ודעיכה מהירה בקצוות הגרף.
4. התלמיד יבין שהשטח החלקי תחת העקומה של התפלגות נורמלית מייצג: הסתברות, החלק היחסי או האחוז המתאים של קבוצה עם מאפיין משותף.
5. התלמיד יבין את המשמעות של ציון תקן להשוואת מיקום של נתון בודד ביחס לשאר האוכלוסייה.
6. התלמיד יבין שהתפלגות נורמלית משמשת כבסיס אחיד להשוואות נתונים של אוכלוסיות גדולות שונות.

מטרות אופרטיביות

1. בהינתן תיאור התפלגויות בעזרת עקומות שונות, התלמיד יידע לבחור את העקומה שמתאימה להתפלגות נורמלית על סמך תכונות של התפלגות נורמלית ולהסביר מדוע עקומות אחרות אינן מתאימות להתפלגות נורמלית.
2. בהינתן תיאור מצב בעזרת ממוצע וסטיית תקן, התלמיד יידע להתאים את הנתונים לשנתות של גרף ההתפלגות הנורמלית ולקרוא את אחוזי השטחים שמתחת לעקומה הנורמלית בין שתי שנתות סמוכות.
3. בהינתן תיאור של מצב בעזרת ממוצע, סטיית תקן ומאפיין כלשהו של קבוצת הנתונים (כגון: ערכי המשתנה אשר גדולים/קטנים מהערך הנתון, ערכי המשתנה אשר נמצאים בין שני ערכים נתונים או שילובים נוספים), התלמיד יידע לזהות את השטח הרלוונטי למאפיין שמתחת לעקומה הנורמלית ולחשב את האחוז המתאים לשטח/ההסתברות.
4. בהינתן תיאור של מצב בעזרת ממוצע, סטיית תקן ושטח חלקי שמתחת לעקומה הנורמלית, התלמיד יידע לזהות את המאפיין של הקבוצה המתאים לשטח/ההסתברות.
5. בהינתן תיאור של מצב בעזרת ממוצע ושטח חלקי שמתחת לעקומה הנורמלית, התלמיד יידע למצוא שטח חלקי אחר בעזרת שימוש בסימטריה של גרף ההתפלגות הנורמלית.
6. בהינתן תיאור של מצב בעזרת ממוצע, שטח חלקי שמתחת לעקומה הנורמלית/ההסתברות והמאפיין שמתאים לשטח/ההסתברות, התלמיד יידע לחשב את סטיית התקן.
7. בהינתן תיאור של מצב בעזרת סטיית תקן, שטח חלקי שמתחת לעקומה הנורמלית/ההסתברות והמאפיין שמתאים לשטח/ההסתברות, התלמיד יידע לחשב את הממוצע.
8. בהינתן תיאור של מצב בעזרת שני שטחים חלקיים שמתחת לעקומה הנורמלית שמתאימים למאפיינים נתונים, התלמיד יידע לחשב את הממוצע ואת סטיית התקן.
9. בהינתן תיאור של מצב בעזרת ממוצע וסטיית תקן התלמיד יידע לחשב את ציון התקן של משתנה נתון על פי הנוסח
$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$
 ויסביר את משמעות התוצאה.

10. בהינתן תיאור של מצב בעזרת חלק מהנתונים הבאים: ממוצע, סטיית תקן, ערך משתנה, ציון תקן של המשתנה, התלמיד יידע לחשב את הנתונים החסרים בעזרת הנוסחה באמצעות פתרון משוואה או מערכת משוואות.

11. בהינתן תיאורי מצב של שתי אוכלוסיות שונות בעזרת ממוצע וסטיית תקן, התלמיד ידע לקבוע את מיקומו היחסי של ערך המשתנה באוכלוסייה אחת בהשוואה לערך של המשתנה באוכלוסייה שנייה.

דגשים והבהרות

1. השאלות בחומר הנלמד יהיו בהקשר חברתי מדעי או פיננסי כלכלי.
2. התלמיד ישתמש בגרף של התפלגות נורמלית.
3. יידרשו שימושים בטכניקה אלגברית לפתרון של משוואות ממעלה ראשונה ומערכת של שתי משוואות ממעלה ראשונה.

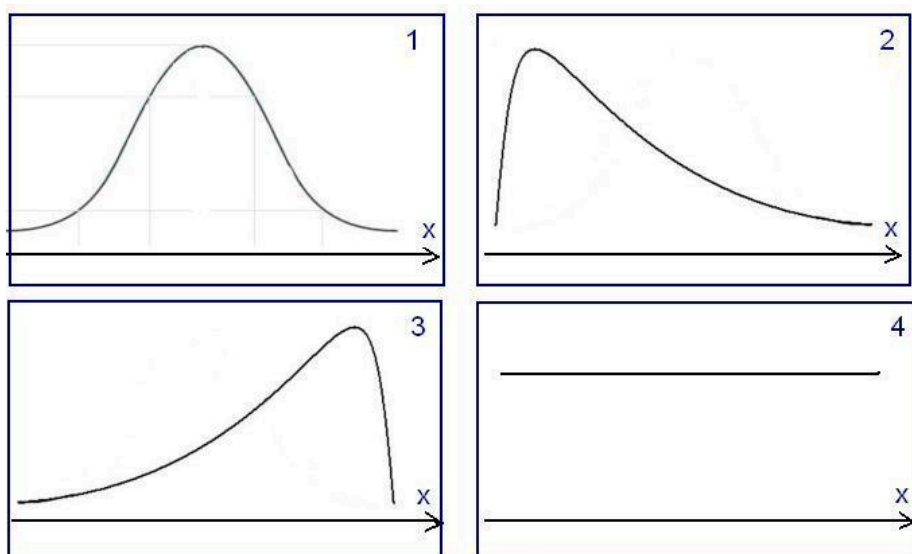
קבוצת דוגמאות 1.1

אפיון: קבוצת דוגמאות זאת מתמקדת בזיהוי ויזואלי של התפלגות נורמלית בהינתן גרפים של התפלגויות שונות. בין היתר, התלמיד ייחשף להתפלגויות מהסוגים הבאים: התפלגות אחידה, התפלגות אסימטרית עם "זנב" ימני, התפלגות אסימטרית עם "זנב" שמאלי, התפלגות לא סימטרית רב שיאית. זיהוי הגרפים יהיה על סמך תכונות של התפלגות נורמלית: סימטריה, נקודת מקסימום יחידה, דעיכה בקצוות הגרף. (מטרה אופרטיבית 1)

דוגמה

מבחן מסכם של קורס באוניברסיטה היה קשה מהרגיל. רוב הציונים במבחן היו נמוכים ומעט ציונים היו גבוהים.

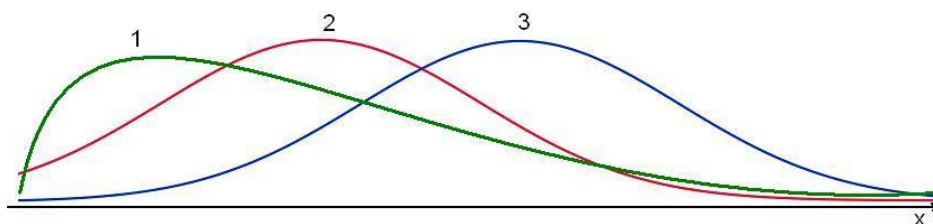
לפניכם ארבעה גרפים של התפלגות ציונים במבחן.



1. איזה מבין הגרפים יכול לתאר את ההתפלגות של ציוני המבחן המסכם?
2. תארו את רמת הקושי של המבחנים שמתאימים לשלושת הגרפים האחרים.

דוגמה

התפלגות הגבהים של בנים ושל בנות הינה נורמלית. ממוצע הגבהים של בנים גבוה מממוצע הגבהים של בנות. לפניך 3 גרפים של התפלגויות שונות. איזה גרף מתאר את התפלגות הגבהים של בנים ואיזה גרף מתאר את התפלגות הגבהים של בנות? הסבירו.



דוגמה

המחשה של התפלגות נורמלית בעזרת כדורים נופלים [ביישומון הבא](#)

קבוצת דוגמאות 1.2

אפיון: קבוצת דוגמאות זאת מתמקדת בחישוב החלק היחסי של אוכלוסייה בעלת תכונה מסוימת (ההסתברות של תכונה מסוימת באוכלוסייה) בעזרת קריאה וחישוב מתוך גרף העקומה הנורמלית שמתאים לממוצע וסטיית תקן של האוכלוסייה. השאלות ביחידה הזאת מתייחסות לשטחים מתחת לעקומה נורמלית שנמצאים בין שני ערכי משתנה נתונים או מתאימים לערכי משתנה גדולים/קטנים מערך משתנה נתון או שטחים מפוצלים. (מטרות אופרטיביות 2, 3)

השאלות המרכזיות שניתן לשאול בקבוצה הזו הן:

1. בהינתן ממוצע וסטיית תקן, חשבו את ערכי המשתנה שנמצאים במרחק של סטיות תקן שלמות וחצאי סטיות תקן מהממוצע, וסמנו אותם על ציר ה-x של גרף העקומה הנורמלית.
2. בהינתן ממוצע וסטיית תקן, קראו מהגרף של ההתפלגות הנורמלית את החלק היחסי של האוכלוסייה/ההסתברות, בעזרת האחוזים שרשומים בתוך השטחים שמתחת לעקומה בין שתי שנתות סמוכות.
3. בהינתן ממוצע וסטיית תקן, קראו מגרף ההתפלגות הנורמלית את החלק היחסי של האוכלוסייה/ההסתברות - בעזרת חיבור אחוזים שרשומים בתוך השטחים שמתחת לעקומה בין שתי שנתות כלשהן.
4. בהינתן ממוצע וסטיית תקן, קראו מהגרף של ההתפלגות הנורמלית את החלק היחסי של האוכלוסייה/ההסתברות - בעזרת חיבור אחוזים שרשומים בתוך השטחים שמתחת לעקומה משמאל או מימין לשנתות, תוך תרגום "קטן מ-", "גדול מ-" למיקום השטח.

דוגמה

ציוני הבחינות בבית ספר גדול מתפלגים נורמלית.

הציון הממוצע הוא 68, וסטיית התקן היא 8.

1. רשמו את החציון של הציונים. נמקו.
2. על פי הנתונים, רשמו ליד השנתות על גרף העקומה הנורמלית את ערכי המשתנה.
3. בוחרים באקראי תלמיד. מהי ההסתברות שהציון שלו בין 56 ל- 84?
4. בוחרים באקראי תלמיד. מהי ההסתברות שהציון שלו בין 52 ל- 80?
5. מה אחוז התלמידים שקיבלו ציון נמוך מ- 56?
6. תלמיד נחשב מצטיין כאשר הציון שלו מעל 84. מה אחוז התלמידים המצטיינים בבית הספר?
7. בבית הספר לומדים 1,200 תלמידים. מהי ההערכה שניתן להסיק מנתון זה לגבי מספר התלמידים שהצטיינו בבחינות?

קבוצת דוגמאות 1.3

אפיון: קבוצת דוגמאות זאת מתמקדת במציאת ערך המשתנה שמתאים לאחוז האוכלוסייה (הסתברות) עם ערכים גדולים או קטנים מערך המשתנה. דבר זה יתבצע בעזרת קריאה מתוך גרף העקומה הנורמלית שמתאים לממוצע וסטיית תקן של האוכלוסייה, כולל שימוש בחיבור אחוזים הרשומים מתחת לשטחים (מטרה אופרטיבית 4).

דוגמה

בעיר מסוימת נמדד לחץ דם (סיסטולי) של התושבים המבוגרים והתברר שתוצאות הבדיקה מתפלגות נורמלית. נמצא כי ממוצע לחץ הדם היה 130 מ"מ וסטיית התקן הייתה 10 מ"מ.

1. מהי מידת לחץ הדם ש-31% מהמידות היו נמוכות ממנה?
2. 3% מהנבדקים עם לחץ הדם הגבוה ביותר נשלחו לבית החולים לבדיקה נוספת. לחץ הדם של רונית שנמדד הוא 145 מ"מ. האם רונית נשלחה לבית החולים?
3. ל-2,100 נבדקים, לחץ דם שנמדד היה נמוך מ-115 מ"מ. על פי גרף ההתפלגות הנורמלית, מה היה מספר הנבדקים?

קבוצת דוגמאות 1.4

אפיון: קבוצת דוגמאות זאת מתמקדת במציאת אחוז האוכלוסייה עם תכונה מסוימת בעזרת שימוש בסימטריה של גרף העקומה הנורמלית (מטרה אופרטיבית 5).

השאלות המרכזיות בהקשר מדעי וחברתי שניתן לשאול בקבוצה הזו הן:

1. בהינתן ממוצע ואחוז האוכלוסייה עם ערך משתנה הגדול/הקטן מערך מסוים, מצאו את אחוז האוכלוסייה עם ערך משתנה הקטן/הגדול מהערך שסימטרי לערך הנתון, ביחס לציר הסימטריה של הגרף.
2. בהינתן ממוצע ואחוז האוכלוסייה עם ערך משתנה הגדול/הקטן מערך מסוים, מצאו את אחוז האוכלוסייה עם ערך משתנה שנמצא בין הממוצע לערך משתנה מסוים או בין הממוצע לערך משתנה הסימטרי לערך הנתון ביחס לציר הסימטריה של הגרף.

דוגמה

הקוטר של עגבניות שרי מתפלג נורמלית. הקוטר השכיח ביותר הוא 1.8 ס"מ.

שליש מבין העגבניות הן עם קוטר העולה על 2.2 ס"מ.

1. מבין שליש העגבניות הקטנות ביותר, מהו קוטרה של העגבנייה הגדולה ביותר? נמקו.
2. מהי ההסתברות לבחור באקראי עגבנייה שקוטרה מעל 1.4 ס"מ אך קטן מהממוצע?

דוגמה

- הגובה של צמח נוי מסוג מסוים מתפלג נורמלית עם ממוצע של 65 ס"מ.
ידוע שרבע מהצמחים מגיעים לגובה העולה על 75 ס"מ.
1. מהי ההסתברות לבחור באקראי צמח נוי שגובהו מעל הממוצע, אך נמוך מ- 75 ס"מ?
2. מה אחוז הצמחים שגובהם נמוך מ- 55 ס"מ? נמקו.

קבוצת דוגמאות 1.5

אפיון: קבוצת דוגמאות זאת מתמקדת במציאת ממוצע ו/או סטיית תקן לפי אחוז אוכלוסייה עם תכונה משותפת נתונה (הסתברות של תכונה משותפת נתונה). פתרון שאלות בקבוצה זו ייעשה בעזרת פתרון משוואה ממעלה ראשונה או פתרון מערכת משוואות ממעלה ראשונה (מטרות אופרטיביות 6, 7, 8)

השאלות המרכזיות שניתן לשאול בקבוצה הזו הן:

1. בהינתן ממוצע ואחוז האוכלוסייה עם תכונה משותפת (הסתברות של תכונה משותפת באוכלוסייה) מצאו את סטיית התקן. התכונה המשותפת מתאפיינת בערכי משתנה הגדולים/הקטנים מערך מסוים או נמצאים בין הממוצע לערך מסוים.
2. בהינתן סטיית תקן ואחוז האוכלוסייה עם תכונה משותפת (הסתברות של תכונה משותפת באוכלוסייה) מצאו את הממוצע. התכונה המשותפת מתאפיינת בערכי משתנה הגדולים/הקטנים מערך מסוים.
3. בהינתן אחוז אוכלוסייה עם תכונה משותפת ואחוז אוכלוסייה נוסף עם תכונה משותפת אחרת (הסתברויות של שתי תכונות באוכלוסייה) מצאו את הממוצע ואת סטיית התקן שמתאימים להתפלגות האוכלוסייה.
4. בהינתן גרף התפלגות נורמלית שעליו מסומנים נתונים כגון שטח, ערכי משתנה וכו', חשבו מדדים חסרים כמו סטיית תקן, ממוצע וכו'.

דוגמה

- משקל ביצים מתפלג נורמלית עם ממוצע של 62 גר'.
16% מכלל הביצים הן כבדות ומשקלן מעל 68 גר'. ביצים אלה (הכבדות) נארזות בנפרד.
1. מצאו את סטיית התקן של התפלגות משקל הביצים.
2. מצאו את ההסתברות שמשקל ביצה שנבחרה באקראי מבין הביצים יהיה פחות מ- 56 גר'.
3. הסבירו מדוע אחוז הביצים שמשקלן מעל 65 גר' זהה לאחוז הביצים שמשקלן מתחת ל- 59 גר'?

דוגמה

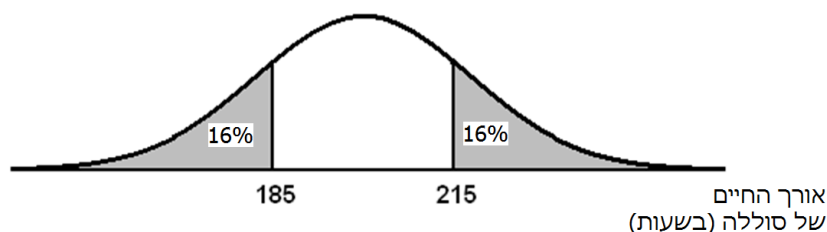
- נתונה רשימת ציוני תלמידים במבחן ארצי.
הציונים ברשימה מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 8.
84% מהציונים נמוכים מהציון 80.
1. מהו הממוצע של ציוני התלמידים?
 2. בוחרים באקראי ציון אחד מתוך הרשימה. מהי ההסתברות שהציון הנבחר נמוך מ-56?
 3. למבחן ניגשו 93,400 תלמידים. על פי גרף ההתפלגות הנורמלית, מה מספר התלמידים שקיבלו ציון הגבוה מ-56 אך נמוך מ-80?
 4. התלמידים שהשיגו את הציונים הגבוהים ביותר זכו לציון לשבח. הוחלט שרק 2% מהתלמידים יקבלו ציון לשבח. מהו הציון הנמוך ביותר המזכה את התלמיד בציון לשבח?

דוגמה

- תנובת החלב היומית של פרות מתפלג נורמלית. ידוע ש-16% מהפרות מניבות פחות מ-20 ליטר ביום, ו-2% מהפרות מניבות פחות מ-10 ליטר ביום.
1. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של תנובת החלב היומית של הפרות.
 2. מה אחוז הפרות שמניבות יותר מ-30 ליטר?
 3. מה אחוז הפרות שמניבות יותר מ-15 ליטר?

דוגמה

אורך החיים של סוללות מתפלג נורמלית. אורך החיים נמדד בשעות. לפניכם גרף המתאר את ההתפלגות של אורך החיים של סוללה:



1. מצאו את אורך החיים הממוצע של הסוללה.
2. מצאו את סטיית התקן.

2. 2% מהסוללות, שאורך החיים שלהן הוא הנמוך ביותר, נחשבות לפגומות.
מצאו את אורך החיים של סוללה אשר מתחתיו היא נחשבת פגומה.
3. איזה אחוז מהסוללות פועלות יותר מ- 222.5 שעות?
4. מפעל קנה 1,000 סוללות. כמה מהן עשויות לפעול למעלה מ- 222.5 שעות?

קבוצת דוגמאות 1.6

אפיון: קבוצת דוגמאות זאת מתמקדת במציאת ציון תקן ושימוש בו לקביעת מיקום של ערך המשתנה באוכלוסייה מסוימת ביחס לממוצע. בנוסף, השאלות בקבוצה זו יעסקו בהשוואת המיקום היחסי של ערך משתנה באוכלוסייה אחת בהשוואה למיקום היחסי של ערך משתנה שונה/זוהה באוכלוסייה אחרת. סטיות תקן והממוצעים של שתי האוכלוסיות הן לא בהכרח זהים (מטרות אופרטיביות 9, 10, 11).

השאלות המרכזיות שניתן לשאול בקבוצה הזו הן:

1. בהינתן ממוצע, סטיית תקן וערך משתנה, מצאו את ציון תקן והסבירו את משמעותו.
2. בהינתן חלק מהמדדים הבאים: ממוצע, סטיית תקן, ערך משתנה, ציון תקן, מצאו את המדד(ים) החסרים. (הפתרון ייעשה באמצעות פתרון משוואה או מערכת משוואות ממעלה ראשונה).
3. בהינתן ממוצעים וסטיות תקן של שתי אוכלוסיות, השוו את המיקום היחסי של משתנה(ים) נתון(ים) באוכלוסייה אחת לעומת משתנה(ים) נתון(ים) באוכלוסייה אחרת.

דוגמה

בטבלה מוצגים: הממוצע וסטיות התקן של גובה גברים בשתי מדינות:

מדינה	ממוצע	סטיות התקן
הולנד	185 ס"מ	6 ס"מ
ישראל	175 ס"מ	10 ס"מ

דן הוא גבר ישראלי שגובהו 177 ס"מ, ויוהן הוא גבר הולנדי שגובהו 187 ס"מ. מי יותר גבוה: דן בהשוואה לכלל הגברים הישראליים או יוהן בהשוואה לכלל הגברים ההולנדיים?

דוגמה

- לקראת בחינת הבגרות, בבית ספר "דקל" נערך מבחן מסכם. ציוני המבחן מתפלגים נורמלית. אילה ופנינה נבחנו במבחן. הציון שקיבלה אילה במבחן היה 92 וציון התקן שלה היה 1.25. הציון שקיבלה פנינה היה 64, וציון התקן שלה היה -0.5.
1. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של ציוני כל התלמידים במבחן המסכם.
 2. אריאל קיבל ציון 80 במבחן המסכם. האם מספר התלמידים שקיבלו ציון מעל ציונו של אריאל שווה למספר התלמידים שקיבלו ציון נמוך מציונה של פנינה?
 3. במבחן מועד ב' פנינה קיבלה ציון 70. ממוצע הציונים של המבחן היה 80 עם סטיית התקן 10.

האם פנינה הצליחה במבחן מועד ב' יותר/פחות לעומת המבחן הראשון ביחס לשאר התלמידים הנבחרים?