פונקציית ההצטברות והנגזרת שלה

1. נתונה הפונקציה: $f(x) = 3$.

א. בכל טבלה חשבו ערכים עבור פונקציית ההצטברות בתחומים שונים. תוכלו להיעזר ביישומון לבדיקת תשובותיכם.

ב. בטבלה הבאה $S(b)$ צוברת את המכפלות $f(x)dx$ מ- $x = 0$ ועד $x = b$:

b	0	1	2	3	4	5	6
$S(b) = \int_0^b f(x)dx$							

בטבלה הבאה $S(b)$ צוברת את המכפלות $f(x)dx$ מ- $x = -2$ ועד $x = b$:

b	-1	0	1	1.5	2	5	6
$S(b) = \int_{-2}^b f(x)dx$							

ג. תארו כיצד חישבתם את הערכים של פונקציית ההצטברות.

2. חזרו על המשימה מתרגיל 1 עם הפונקציה: $g(x) = 2x$.

א. מלאו את הטבלאות:

b	0	1	2	3	4	5	6
$\int_0^b g(x)dx$							

b	2	3	4	5	6	7	8
$\int_1^b g(x)dx$							

b	-1	0	1	1.5	2	5	6
$\int_{-2}^b g(x)dx$							

ב. תארו כיצד חישבתם את הערכים של פונקציית ההצטברות.

פונקציית ההצטברות עבור פונקציה שאינה קווית, או:

מה הקשר בין פונקציה f לבין פונקציית ההצטברות שלה?

בדוגמאות שראינו עד כה ראינו שהקשרים בין פונקציה f לפונקציית ההצטברות שלה הם אלה המוכרים לנו כקשרים בין נגזרת לפונקציה.

למשל: בנקודה בה הפונקציה המקורית מתאפסת ומשנה סימן משלילי לחיובי, לפונקציית ההצטברות יש נקודת מינימום.

- רשמו שני קשרים נוספים בין פונקציית ההצטברות לפונקציה המקורית. האם גם הם מוכרים לנו כקשרים בין פונקציה לנגזרתה?

האם זה מקרי? נראה שלא.

נראה כעת שהנגזרת של פונקציית ההצטברות היא הפונקציה המקורית גם באופן פורמלי. נשים לב שכך שבעבר, כאשר הגדרנו את פונקציית הנגזרת עבור פונקציה כלשהי, היא עניינה אותנו, כי היא נתנה לנו מידע על קצב השינוי של הפונקציה.

לכן, טבעי הוא שכאשר אנחנו מסתכלים על פונקציה שמתארת קצב שינוי, היא פונקציית נגזרת של פונקציה כלשהי.

כדי להוכיח את ההשערה נזכיר גם את הביטוי האלגברי של קצב השינוי בנקודה – הערך של הנגזרת בנקודה:

פונקציית הנגזרת של פונקציה $g(x)$ הוא הפונקציה המתארת בכל נקודה את הערך אליו שואפים השיפועים של המיתרים שקצה אחד שלהם נמצא בנקודה $(x, g(x))$ וקצה שני שלו בנקודה אחרת על הגרף $(x+h, g(x+h))$ כאשר h הולך וקטן ושואף לאפס.

אם הגבול לא קיים, אז לא מוגדרת הנגזרת באותה נקודה.

בכתיב פורמלי (ללא כתיבה של גבול): $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} g'(x)$.

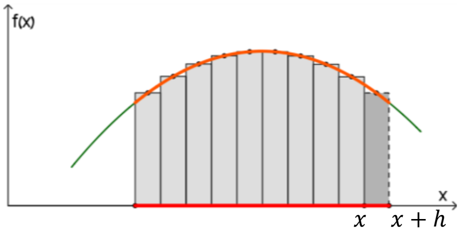
כעת נחפש את הנגזרת של פונקציית ההצטברות $S(x)$ של פונקציה f בתחום $x \geq a$.

בשלב ראשון נתייחס לפונקציה $f(x)$ חיובית. בהמשך נרחיב ונסביר מדוע הטענה נכונה גם לפונקציות אחרות.

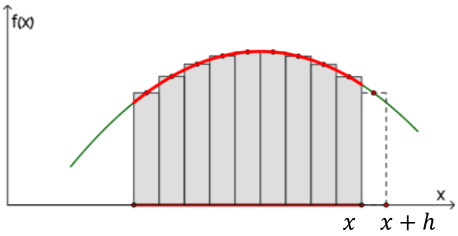
הביטו באיור הבא ונסו להסביר:

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} =$$

$=$

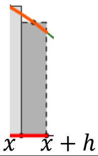


$-$



h

$=$



h

$$\min_{\text{בקטע הקטן}}\big(f(x)\big) = \frac{\min_{\text{בקטע הקטן}}(f(x))\cdot h}{h} \le$$

h

$$\le \frac{\max_{\text{בקטע הקטן}}\big(f(x)\big)\cdot h}{h} = \max_{\text{בקטע הקטן}}\big(f(x)\big)$$

$$\xrightarrow{h\to 0} f(x)$$

כאשר $h \to 0$ הערך הקטן ביותר של f בקטע הקטן והערך הגדול ביותר של f מתקרבים זה לזה ומתקרבים ל- $f(x)$, כלומר מתקרבים לערך הפונקציה f בקצה השמאלי של הקטע הקטן שבאיור (אם $h < 0$ יהיה זה הקצה השמאלי).

ומכאן:

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$$

כלומר: $S'(x) = f(x)$, או במילים אחרות: פונקציית ההצטברות $S(x)$ היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$.

ניתן להציג את השיקולים שבאיור גם באמצעות הכתיב החדש שלנו. בכתיב זה, כיוון שאנחנו רוצים לגזור את פונקציית ההצטברות ב-x מסוים, נסמן את הערכים של הפונקציה f בין a לבין x ב-t, וכך המכפלות בסכום האינסופי המתארות שטחי מלבנים שרוחבם שואף לאפס יירשמו כך: $f(t)dt$.

נכתוב את המונה שמופיע בהגדרת הנגזרת: $S(x+h) - S(x)$

$$S(x+h)=\int_a^{x+h} f(t)dt \quad , \quad S(x)=\int_a^x f(t)dt$$

ההפרש בין שני ערכים של פונקציית ההצטברות עם גבול תחתון משותף, הוא ערך של פונקציית ההצטברות בין שני הגבולות העליונים:

$$S(x+h)-S(x)=\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+h} f(t)dt$$

נבדוק גם כאן מה קורה כאשר $h \to 0$?

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} ?$$

מצד אחד ברור לפי הגדרת הנגזרת, שזהו ערך הנגזרת של פונקציית ההצטברות ב- x.

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} S'(x)$$

אם נשתמש בסימון החדש של האינטגרל נוכל בקלות לאשש את השערתנו, לפיה: $S'(x)=f(x)$. עד כה אנחנו מבינים כי:

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

נעריך את המונה באמצעות שטח של מלבן שרוחבו h וגובהו תלוי בערכי הפונקציה f בתחום: $[x,x+h]$. הגובה יכול להיות כל אחד מהערכים של הפונקציה f בתחום. כפי שראינו בהסבר שבאיור הגובה של המלבן הוא בין הערך הגבוה ביותר של f בתחום לבין הערך הנמוך ביותר שלה שם.

ככל שרוחב המלבן h קטן, ערכי הפונקציה בתחום מתקרבים לערך הפונקציה בקצה השמאלי של התחום, כלומר ל- $f(x)$. כלומר:

$$\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$$

לכן, כמו שקיבלנו קודם $S(x)$ **היא פונקציה קדומה של** $f(x)$ **חיובית:**

$$S'(x)=f(x)$$

ומה לגבי פונקציה שאינה בהכרח חיובית? מתוך הפעילויות הקודמות, ניתן בקלות להרחיב את ההסבר גם לפונקציות כאלה. קטעים בהם הפונקציה f המתארת קצב שינוי היא שלילית, הכמות

המצטברת יורדת. בידקו שאפשר לשנות את האיור ולקבל בדיוק אותה תוצאה. הכתיבה באמצעות האינטגרל מראה ביתר קלות שאין התייחסות לסימן של הפונקציה ולכן המסקנה היא כללית: **$S(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$**.

אז איך מוצאים ערכים של פונקציית ההצטברות? הרי יש הרבה מאד פונקציות קדומות לפונקציה אחת. איך מוצאים את האחת והיחידה, זו המחשבת בדיוק את הכמות המצטברת המבוקשת?

אמנם יש המון פונקציות קדומות, אך הן נבדלות זו מזו בקבוע. עובדה זו תעזור לנו.

לפני ההכללה נדגים:

נרצה למצוא ערך של פונקציית הצטברות בין 1 ל-5 עבור פונקציית קצב השינוי: $f(x) = x^2 + 2$,

כלומר, נרצה לחשב את: $\int_1^5 (x^2 + 2)dx$

- מצאו את כל הפונקציות הקדומות $F(x)$ של $f(x) = x^2 + 2$.
- איזו מהן מתארת את הכמות המצטברת כאשר מתחילים לצבור כמות ב $x = 1$?
  רמז: היא צריכה לקיים את התנאי: $S(1) = 0$.
- חשבו באמצעות הפונקציה שמצאתם את: $\int_1^5 (x^2 + 2)dx$. רמז: אנו מחפשים את $S(5)$.

נסכם:

הטענה היא שלא חייבים למצוא את פונקציית ההצטברות כלומר את האחת והיחידה המחשבת את הערכים המצטברים עבור $x \geq 1$, יספיק לנו למצוא פונקציה קדומה אחת, ואנו נדע לבצע את ההתאמה.

כלומר: אם נדע פונקציה קדומה $F(x)$ לפונקציה: $f(x) = x^2 + 2$ נוכל לבצע את המשימה.

כיצד?

נצטרך להתאים את הפונקציה הקדומה כך שערכה בקצה התחתון של תחום הצבירה יהיה אפס.

לכן, בדוגמה שלנו, אנו יודעים: $\left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)' = f(x)$

כלומר $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x$ היא פונקציה קדומה ל-$f(x)$.

אולם, ערך הפונקציה הקדומה שמצאנו אינו אפס בקצה השמאלי של תחום הצבירה:

$F(1) = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$.

כדי להגיע לפונקציית ההצטברות המדוייקת בתחום שלנו נחסר את $F(1)$.

כלומר פונקציית ההצטברות היא: $S(x) = \frac{x^3}{3} + 2x - F(1) = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{7}{3}$.

על כן, כדי לחשב את $\int_1^5 (x^2 + 2)dx$, צריך לחשב את $S(5)$, כלומר: $F(5) - F(1)$.

- חשבו את: $\int_{-1}^{2} (4x^3 - 2x)dx$

באופן כללי:

נניח שאנו מכירים פונקציה קדומה של $f(x)$, כלומר:

$$F'(x) = f(x)$$

טענה:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

מדוע?

ברור לנו, לפי הגדרת פונקציית ההצטברות שמתקיים:

$$\int_a^b f(x)dx = S(b)$$

כמו כן מתקיים, כפי שהוכחנו קודם:

$$S'(x) = f(x)$$

לכן, פונקציית ההצטברות והפונקציה הקדומה המוכרת לנו נבדלות זו מזו בקבוע.

פונקציית ההצטברות מקיימת:

$$S(a) = 0$$

כלומר:

$$F(x) - F(a) = S(x)$$

ולכן:

$$\int_a^b f(t)dt = S(b) = F(b) - F(a)$$

אומרים: האינטגרל המסוים של הפונקציה f בין a ל- b שווה להפרש בין הערכים של פונקציה קדומה כלשהי ב- a ו- b .

לדוגמה:

$$\int_1^4 x^2dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 21$$

3. הסבירו את החישוב שבדוגמה לעיל. מדובר בפונקציה: $f(x)=x^2$ בתחום: $[1,4]$.

א. מהו הערך של פונקציית ההצטברות של הפונקציה $f(x)=x^2$ ב-$x=4$?

ב. מהו השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ לבין ציר ה- x בתחום המדובר: $[1,4]$?

ג. האם $F(x)=\frac{x^3}{3}$ היא פונקציית ההצטברות? אם כן, הסבירו טענתכם, אם לא, רשמו את פונקציית ההצטברות.

(שימו לב: עליכם לבדוק האם הצבת הגבול התחתון נותנת אפס.)

4. בדקו את חישובי הערכים של פונקציית ההצטברות בשאלות 2,1 (בטבלאות שמילאתם) על פי הקשר לעיל. כלומר: האם חישובי הערכים של פונקציית ההצטברות תואמים לחישוב של אינטגרל מסוים?

5. חשבו את האינטגרלים המסויימים ברשימה שלפניכם. בכל חישוב בדקו האם הפונקציה הקדומה שמצאתם היא פונקציית ההצטברות, או שהיא נבדלת ממנה בקבוע.

1. $\int_{-1}^{3}(x+1)dx=$
2. $\int_{0}^{3}(x^2+1)dx=$
3. $\int_{-2}^{2}(x^3-x)dx=$
4. $\int_{0}^{\pi}\sin(x)dx=$
5. $\int_{0}^{\pi}\cos(x)dx=$

לסיום:

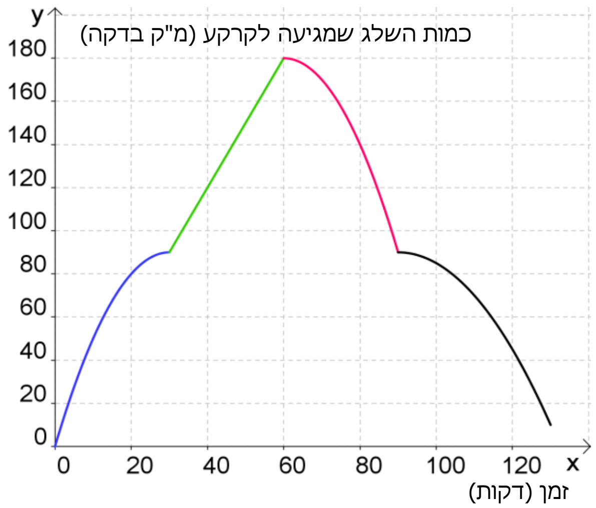
המתמטיקאים אוהבים אחידות וחיסכון. לכן, לאחר שגילו את הקשר בין פונקציית ההצטברות לפונקציה הקדומה החליטו על הסימן השואל את השאלה: מהן הפונקציות הקדומות לפונקציה $f(x)$?

רושמים: $\int f(x)dx$ ואומרים: אינטגרל של $f(x)$ לפי x, כלומר: אם $F'(x)=f(x)$ אז גם: $\int f(x)dx=F(x)+C$, C מספר כלשהו.

שאלות יישומיות:

1. בשעה $10:00$ החל לרדת שלג במתחם כלשהו. הפונקציה $f(x)$ מתארת את כמות השלג שיורדת לקרקע לפי הזמן בדקות. הכמות נתונה ביחידות של מ"ק לדקה, החל מהשעה $10:00$.

האיור מציג את גרף הפונקציה.



א. מהו (אם יש כזה) התחום בו פונקציית ההצטברות עולה? שימו לב: הגרף המתואר מתאים לקצב ההצטברות של השלג. הוא אינו הגרף של פונקציית ההצטברות.

ב. מהו (אם יש כזה) התחום בו פונקציית ההצטברות יורדת?

ג. באיזה פרק זמן פונקציית ההצטברות קעורה כלפי מעלה, ובאיזה פרק זמן פונקציית ההצטברות קעורה כלפי מטה?

ד. באיזו שעה, בפרק הזמן המוצג בגרף, היתה כמות השלג במתחם מקסימלית?

ה. נתון גם:

$$f(x)=\begin{cases}-0.1(x-30)^2+90, & 0\le x\le 30\\ 3x, & 30\le x\le 60\\ -0.1(x-60)^2+180, & 60\le x\le 90\\ -0.05(x-90)^2+90, & x>90\end{cases}$$

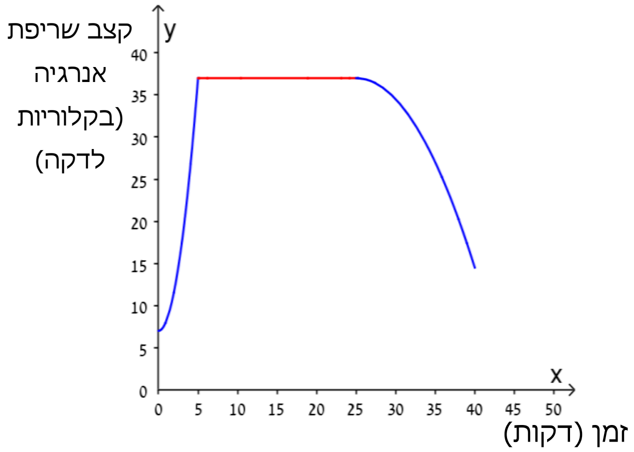
ו. מהי כמות השלג שהצטבר במתחם במהלך שעתיים, החל מהשעה $10:00$ אם השלג לא נמס?

ז. רשמו פונקציה $v(x)$ המתארת את הכמות המצטברת של השלג במהלך השעתיים הראשונות לירידת השלג. רשמו יחידות מתאימות.

* מעובד לפי ללמוד וללמד אנליזה

2. קצב שריפת האנרגיה של אדם מתאמן בעזרת מכשיר מסוים במשך 40 דקות נתון על-ידי הפונקציה $b(x)$:

$$b(x)=\begin{cases}1.2x^2+7\,, & 0\le x\le 5\\ 37\,, & 5\le x\le 25\\ -0.1(x-25)^2+37, & 25\le x\le 40\end{cases}$$



האיור מציג את גרף הפונקציה.

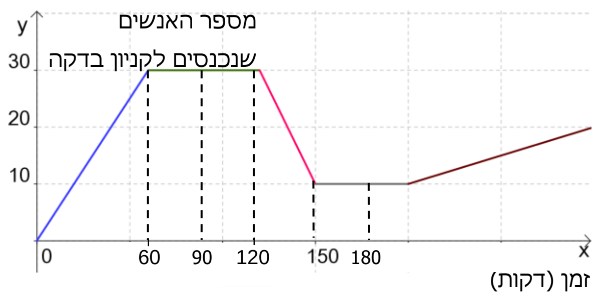
א. תארו במילים את קצב שריפת הקלוריות של המתאמן במכשיר זה במשך 40 דקות.

ב. כמה קלוריות שורף אותו אדם במהלך 40 דקות?

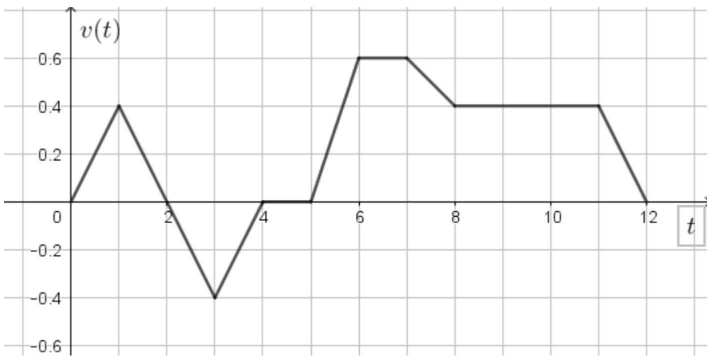
*מעובד לפי ללמוד וללמד אנליזה

3. האיור מציג גרף של פונקציה המתארת את קצב כניסת אנשים לקניון, החל מהשעה 9:00 בבוקר, שעת הפתיחה של הקניון.

כמה אנשים נכנסו לקניון עד 12:00?



4. קרן רכבה באופניים במסלול ישר מביתה לבית הספר במשך 12 דקות.



בגרף המצורף מתוארת פונקציית המהירות שלה בק"מ לדקה $v(t)$ כאשר t מציין זמן בדקות.

א. מצאו מה הייתה התאוצה (קצב השינוי של המהירות) של האופניים בזמן $t = 7.5$? ציינו יחידות.

ב. באיזו דקה מהירות הרכיבה של קרן הייתה הגדולה ביותר?
באיזה דקה קצב שינוי המהירות היה הגדול ביותר?
באיזה דקה המרחק של קרן מביתה היה הגדול ביותר?

ג. מה אורך הדרך שעשתה קרן בזמן $6 \leq t \leq 7$? ובזמן $6 \leq t \leq 8$?

ד. זמן מה לאחר שיצאה מביתה, קרן נזכרה ששכחה את העבודה במתמטיקה וחזרה לביתה. קבעו באיזה דקה חזרה, ומה היה אז המרחק שלה מביתה, ונמקו תשובתכם.

ה. הסבירו מה המשמעות של הביטוי $\int_0^{12} v(t)dt$ בסיפור הרכיבה של קרן וחשבו את ערכו.

ו. הסבירו מה המשמעות של הביטוי $\int_0^{12} |v(t)|dt$ בסיפור הרכיבה של קרן וחשבו את ערכו.

גם עידו רכב על אופניים במסלול ישר מביתו לבית הספר במשך 12 דקות. מהירותו בקמ"ש מתוארת על ידי הפונקציה: $w(t) = -0.02x^2 + 0.24x$.

ז. מי גר קרוב יותר לבית הספר, קרן או עידו?

*מקור – AP, 2009