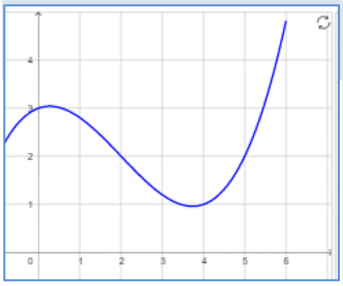
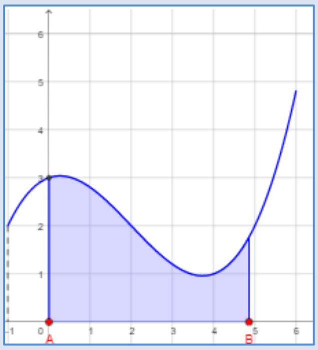
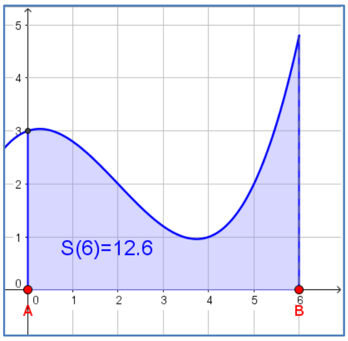
פונקציית ההצטברות



נתונה פונקציה $f(x)$ המתארת קצב שינוי של כמות,
לדוגמה: מהירות כפונקציה של זמן, תזרים מזומנים כפונקציה של זמן, קצב מילוי של מאגר מים כפונקציה של זמן וכו'. נרצה לבחון את הפונקציה המתארת את הכמות המצטברת ולהכיר את תכונותיה.



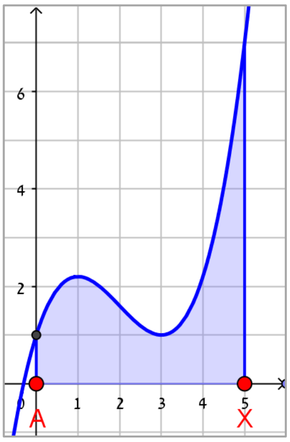
נבנה **פונקציית ההצטברות** של $f(x)$ בתחום נתון: $a \le x \le b$.
לצורך נוחיות הדיון נכנה את הקצה השמאלי של התחום:
$x = a$ בשם: **גבול תחתון**. נוכל לדבר על צבירת הכמות שקצב השינוי שלה נתון על ידי $f(x)$ בין הגבול התחתון לבין **גבול עליון** משתנה x, הנע ימינה לאורך הציר האופקי ($x > a$).
נסמן את ערך הכמות המצטברת מ- $x = a$ ועד ל-x ב- $S(x)$.
לכל x, מתאים ערך מסוים של כמות מצטברת וכאשר x משתנה, גם הכמות המצטברת המתאימה לו משתנה,
כלומר $S(x)$ היא פונקציה של x. באיור, x נמצא בנקודה B. השטח הצבוע הוא הכמות שהצטברה כאשר x השתנה משיעור ה- x בנקודה A ועד שיעור ה- x בנקודה B.



לדוגמה, בסימון זה נוכל לומר שהכמות המצטברת לפי פונקציית קצב השינוי $f(x)$ בין $x = 0$ לבין $x = 6$ שווה ל-12.6. ראו האיור משמאל.

את הכמות המצטברת בין $x = 0$ לבין $x = 6$ נסמן: $S(6)$. עבור הגרף המופיע בסרטוט משמאל,
מוצג כי כמות זו שווה ל: $S(6) = 12.6$.

1. ביישומון "פונקציית ההצטברות לפונקציה חיובית" ניתן לראות את פונקציית ההצטברות בין ציר ה- x לעקום בתחום $[a,b]$. כלומר ניתן לראות את הערכים של $S(x)$.
בשאלות הבאות, שערו את התשובה, בדקו ביישומון והסבירו ממצאיכם.



התבוננו בפונקציה חיובית בתחום $0 \le x \le 5$:

א. התבוננו ביישומון. הגבול התחתון של פונקציית ההצטברות הוא: $a = 0$. גררו את הנקודה x עד לגבול העליון של התחום: $x = 5$.
מלאו בעזרת היישומון את הטבלה. תארו את פונקציית ההצטברות.

x	0	1	2	3	4	5
$S(x)$						

ב. כיצד משפיע קצב השינוי של הפונקציה $f(x)$ על גרף פונקציית ההצטברות $S(x)$?
התייחסו לנקודות מיוחדות.

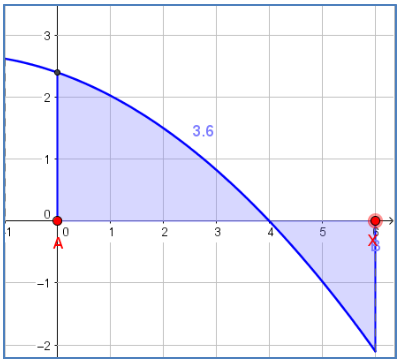
ג. קבעו האם נכון או לא נכון עבור פונקציה f חיובית? נמקו.

- בתחום בו הפונקציה החיובית f עולה, גם פונקציית ההצטברות עולה.
- בתחום בו הפונקציה החיובית f יורדת, גם פונקציית ההצטברות יורדת.

ביישומון נוסף: פונקציית ההצטברות ותכונותיה ניתן לראות את פונקציית ההצטברות של פונקציה, שאינה בהכרח חיובית.
בשאלות הבאות, שערו את התשובה, בדקו ביישומון והסבירו ממצאיכם.

2. התבוננו בפונקציה המקבלת גם ערכים שליליים.

בחרו ביישומון את הפונקציה הראשונה בעזרת הכפתור 1



א. קבעו את הגבול התחתון ל- $a = 0$, וגררו את הנקודה x עד לגבול העליון של התחום $x = 6$.
בנו טבלה דומה לזו שמופיעה בשאלה 1א ומלאו אותה בעזרת היישומון. בטבלה רשמו ערכים שונים של פונקציית ההצטברות, למשל:

$S(1) = ?$,$S(3.5) = ?$,$S(4) = ?$,$S(6) = ?$

ב. תארו כיצד משתנה פונקציית ההצטברות?
האם כאשר הפונקציה f שלילית, גם פונקציית ההצטברות שלילית?

ג. עבור איזה ערך של x לפונקציית ההצטברות יש מקסימום? הסבירו מדוע.

ד. שנו את הגבול התחתון, למשל ל- $a = 0.5$ וחזרו על הפעולות שנתבקשתם לבצע בסעיפים הקודמים.

שימו לב: לכל נקודת התחלה של צבירה יש פונקציית הצטברות שונה.

3. בחרו ביישומון את הפונקציה השנייה בעזרת הכפתור 2

א. חזרו על הפעולות משאלה 2 בסעיפים א, ב.

ב. האם כאשר הפונקציה f עולה פונקציית ההצטברות עולה?

ג. האם כאשר הפונקציה f חיובית פונקציית ההצטברות עולה?

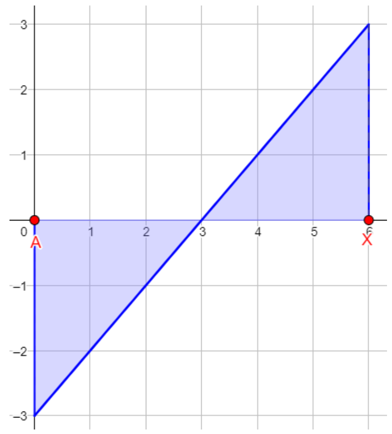
ד. היכן יש לפונקציית ההצטברות נקודת מינימום? הסבירו מדוע.

ה. תוכלו לבחור ביישומון בכפתורים 3 ו-4 ולאפיין את פונקציית ההצטברות המתקבלת.

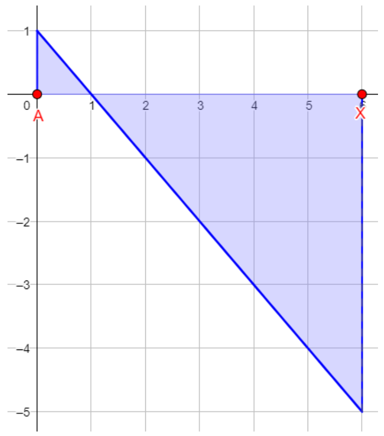
ו. גם עבור הפונקציות אשר בכפתורים 2, 3 ו-4 שנו את הגבול התחתון ביישומון (הנקודה בה מתחילה הצבירה) וחזרו על הפעולות שביצעתם. האם תשובותיכם השתנו?

4. לפניכם 6 פונקציות. כל אחת מתוארת בתחום נתון. לאחריהן מופיעים 6 גרפים של פונקציות הצטברות, ללא מערכות צירים. התאימו לכל פונקציה גרף של פונקציית הצטברות. הוסיפו מערכת צירים בכל גרף של פונקציית הצטברות. הסבירו בחירתכם.

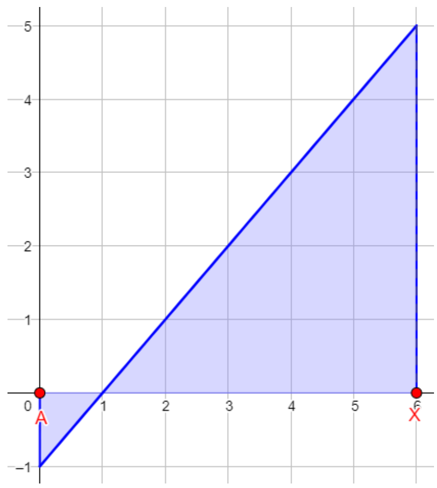
הפונקציה: $f(x) = x - 3$ בתחום $[0,6]$



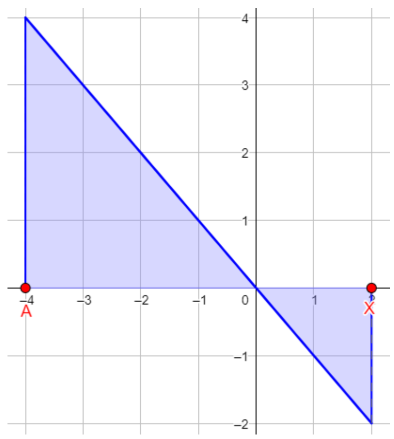
הפונקציה: $f(x) = 1 - x$ בתחום $[0,6]$



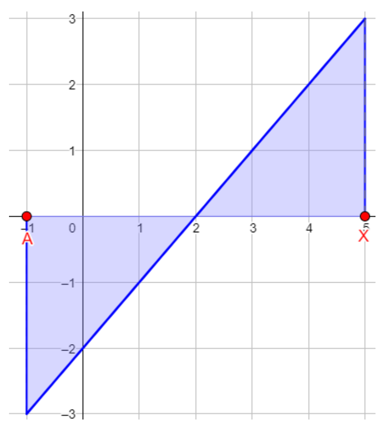
הפונקציה: $f(x) = x - 1$ בתחום $[0,6]$



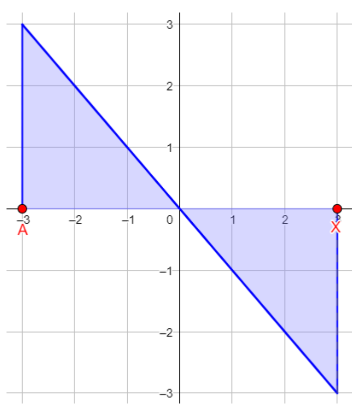
הפונקציה: $f(x) = -x$ בתחום $[-4,2]$

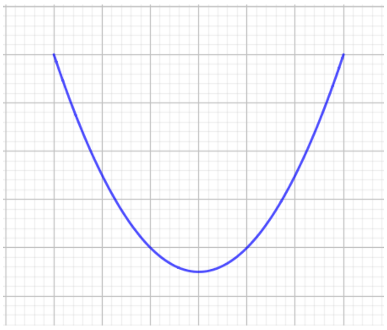
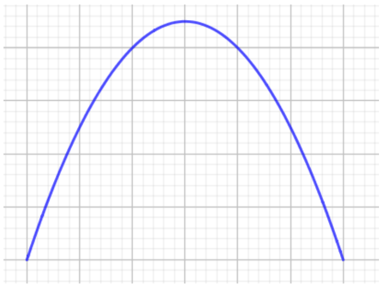
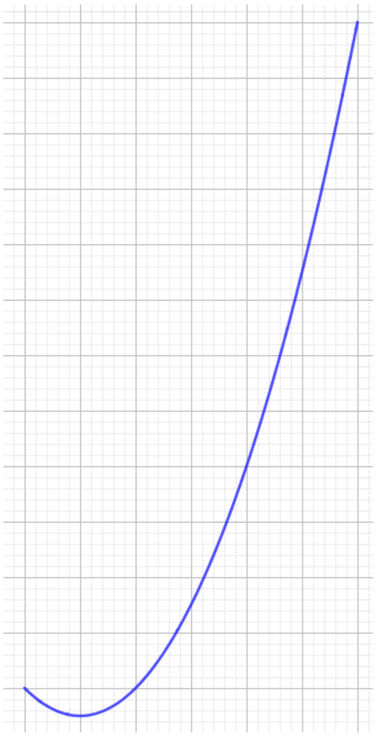
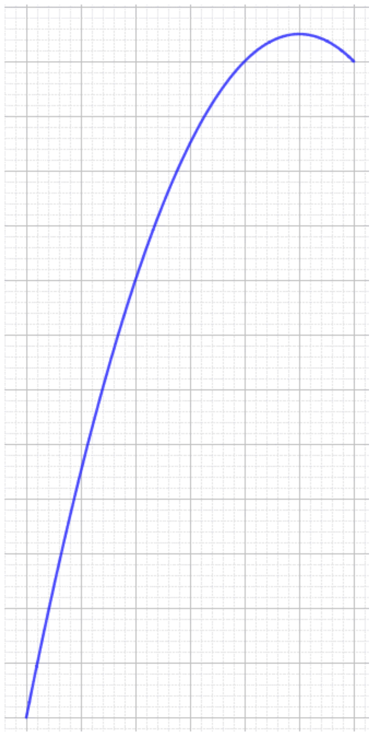
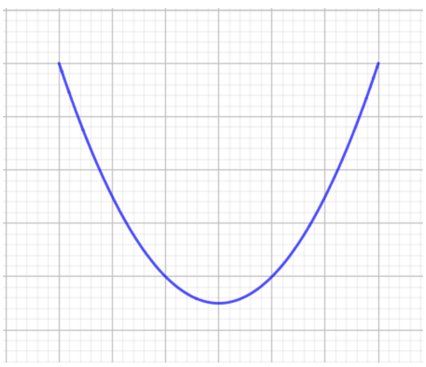
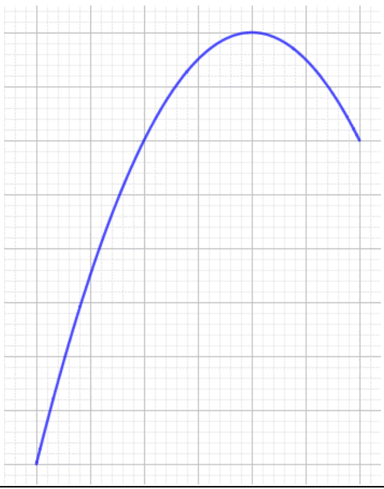


הפונקציה: $f(x) = x - 2$ בתחום $[-1,5]$



הפונקציה: $f(x) = -x$ בתחום $[-3,3]$



5. סכמו ממצאיכם עבור פונקציה $f(x)$ רציפה. השלימו את המשפטים הבאים **ושערו השערה**:

מה הקשר בין פונקציה $f(x)$ לפונקציית ההצטברות שלה?

א. כאשר $f(x)$ חיובית, פונקציית ההצטברות היא פונקציה ____________________.

ב. כאשר $f(x)$ שלילית, פונקציית ההצטברות היא פונקציה ____________________.

ג. כאשר $f(x)$ מחליפה סימן מחיובי לשלילי, לפונקציית ההצטברות יש נקודת ________________.

ד. כאשר $f(x)$ מחליפה סימן משלילי לחיובי, לפונקציית ההצטברות יש נקודת ________________.

ה. כאשר $f(x)$ פונקציה עולה, פונקציית ההצטברות היא פונקציה ____________________.

ו. כאשר $f(x)$ פונקציה יורדת, פונקציית ההצטברות היא פונקציה __________________.

ז. לפונקציית ההצטברות יש נקודת פיתול כאשר ל- $f(x)$ ______________.

ח. פונקציית ההצטברות מתאפסת כאשר ________________________________.

מסקנות, סימונים

כאשר נתונה פונקציה f **חיובית** בתחום $a \le x \le b$ המתארת קצב שינוי של כמות ניתן להעריך את הכמות המצטברת מ- a עד x כלשהו בקטע, $S(x)$ על ידי סכום של שטחי מלבנים.

למשל, עבור $f(x) = 9 - \frac{x^2}{9}$ בתחום $0 \le x \le 9$ נרצה להעריך את הכמויות המצטברות: $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, ... $S(9)$.

נתאר כאן הערכה של כל אחת מהכמויות על ידי מלבנים ברוחב 1.

אפשר, כמובן, לבחור גם רוחב אחר, כפי שראינו בפעילויות קודמות.

את $S(1)$ נעריך לפי שטח המלבן שרוחבו 1 ואורכו $f(0.5)$:

$S(1) \approx f(0.5) \cdot 1$

את $S(2)$ נעריך לפי סכום שטחים של שני מלבנים:

המלבן שרוחבו 1 ואורכו $f(0.5)$ והמלבן שרוחבו 1 ואורכו $f(1.5)$:

$S(2) \approx f(0.5) \cdot 1 + f(1.5) \cdot 1$

את $S(3)$ נעריך לפי סכום שטחים של שלושה מלבנים:

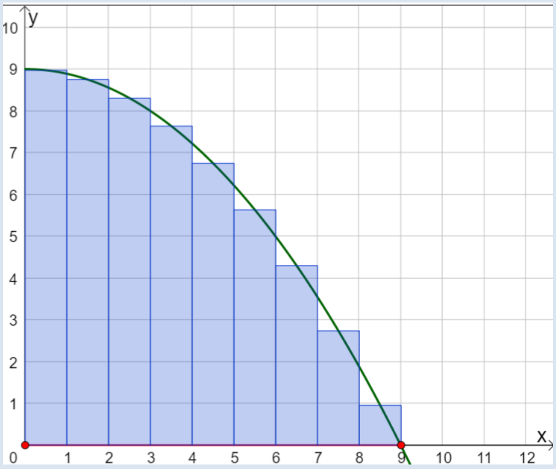
שטח המלבן שרוחבו 1 ואורכו $f(0.5)$, המלבן שרוחבו 1 ואורכו $f(1.5)$ והמלבן שרוחבו 1 ואורכו $f(2.5)$:

$S(3) \approx f(0.5) \cdot 1 + f(1.5) \cdot 1 + f(2.5) \cdot 1$

וכן הלאה,

את $S(9)$ נעריך לפי סכום השטחים של 9 מלבנים שרוחבם 1 ואורכיהם מ- $f(0.5)$ ועד $f(8.5)$:

$S(9) \approx f(0.5) \cdot 1 + f(1.5) \cdot 1 + f(2.5) \cdot 1 + \cdots + f(8.5) \cdot 1$



כפי שראינו במהלך הפעילות הקודמות, ניתן להעריך כל אחת מהכמויות המצטברות: $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, ... $S(9)$ על ידי חלוקה של הקטע בין $x = 0$ ועד x שבחרנו למספר מלבנים כרצוננו, שרוחבם שונה מ-1 על ידי סכום שטחי מלבנים הנוצרים בהתאם.

6. בצעו את החישובים של הערכת הכמויות המצטברות: $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, ... $S(9)$

עבור פונקציית קצב השינוי $f(x) = 9 - \frac{x^2}{9}$ בתחום $x \geq 0$ לפי ההנחיות הבאות:

א. העריכו את הכמויות הנ"ל בהתאם לאיורים, כלומר על-ידי חישוב סכומים של שטחי מלבנים ברוחב 1.

ב. העריכו את הכמויות הנ"ל על-ידי מלבנים ברוחב: $\frac{1}{2}$.

ג. העריכו גם את הכמויות: $S\left(\frac{5}{8}\right)$, $S(2.1)$, $S(\pi)$.

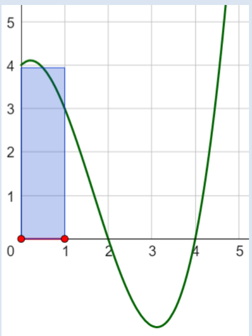
ככל שמספר המלבנים גדול יותר, וכך רוחב המלבנים קטן יותר, סכום השטחים קרוב יותר לשטח שבין גרף הפונקציה $f(x)$ **החיובית** לבין ציר ה- x בתחום המבוקש, כלומר קרוב יותר לכמות המצטברת בתחום זה.

אם f אינה חיובית בתחום $a \leq x \leq b$ ומתארת קצב שינוי של כמות, ניתן להעריך את הכמות המצטברת מ- $x = a$ עד x כלשהו בקטע, $S(x)$, על ידי סכום והפרש של שטחי מלבנים: בכל קטע בו נבחרת נקודה פנימית שבה הפונקציה $f(x)$ חיובית, יתווסף שטח המלבן להערכה של הכמות המצטברת, בכל קטע בו נבחרת נקודה פנימית שבה הפונקציה $f(x)$ שלילית, יחוסר שטח המלבן מההערכה של הכמות המצטברת. אם תיבחר נקודה פנימית לקטע בה $f(x) = 0$ לא תהיה השפעה לקטע זה על הערכת הכמות המצטברת.

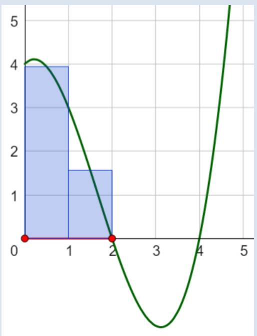
לדוגמה:

נביט בפונקציה $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-4)}{2}$ בתחום $0 \leq x \leq 4$ נרצה להעריך את $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$.

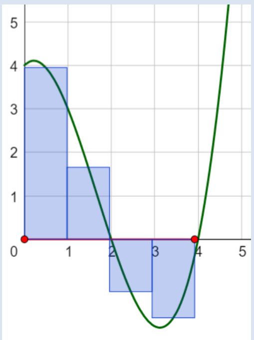
ניתן לבצע את ההערכה כמו קודם, באמצעות קטעים שאורכם 1:



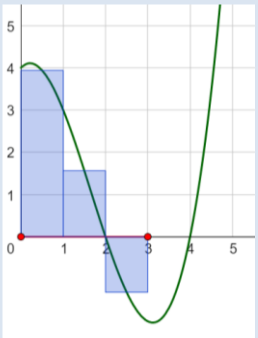
$S(1) \approx f(0.5) \cdot 1$



$S(2) \approx f(0.5) \cdot 1 + f(1.5) \cdot 1$



$S(4) \approx f(0.5)\cdot 1 + f(1.5)\cdot 1 + f(2.5)\cdot 1 + f(3.5)\cdot 1$



$S(3) \approx f(0.5)\cdot 1 + f(1.5)\cdot 1 + f(2.5)\cdot 1$

ניתן, כמובן, גם לשנות את הרוחב של המלבנים.

7. בצעו את החישובים של הערכת הכמויות המצטברות: $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$

עבור פונקציית קצב השינוי $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-4)}{2}$ בתחום $x \geq 0$ לפי ההנחיות הבאות:

א. העריכו את הכמויות הנ"ל בהתאם לאיורים, כלומר על-ידי חישוב סכומים של שטחי מלבנים ברוחב 1.

ב. העריכו את הכמויות הנ"ל על-ידי מלבנים ברוחב: $\frac{1}{2}$.

ג. העריכו גם את $S(2.5)$, $S(0.8)$.

נחפש דרך לכתיבה של הכמות המצטברת עבור פונקציית קצב שינוי f מ- a ועד b שתרמוז על בנייתה באמצעות סכומים.

נסמן את מספר המלבנים בהם אנו משתמשים להערכה אחת ב-n, את נקודות החלוקה של הקטע בין a לבין x ב: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, כלומר: $a \leq x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \leq b$

נסמן את הרוחב של כל מלבן ב- Δx. נקבל שהאורכים של המלבנים הם:

$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n)$

אז נוכל לכתוב את הנוסחה לחישוב ההערכה של הכמות המצטברת עבור פונקציית קצב שינוי $f(x)$ מ- a ועד b כך:

$S(b) \approx f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x + \cdots + f(x_n)\cdot\Delta x$

כאשר מספר המלבנים שואף לאינסוף רוחב כל מלבן שואף לאפס והכמות המצטברת שווה בדיוק לסכום של אינסוף המכפלות:

$f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x + \cdots + f(x_n)\cdot\Delta x \xrightarrow[n\to\infty]{} S(b)$

מסמנים את הסכום של אינסוף המכפלות, המחשב בדיוק את הכמות המצטברת עבור הפונקציה $f(x)$ מ-$x = a$ ועד $x = b$ כך:

$$S(b) = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

אומרים: האינטגרל מ-a עד b של $f(x)dx$. אינטגרל, או בעברית: אסכמת.

שימו לב:

הסימן של האינטגרל הוא האות S מוארכת,

שמתאימה לאות הראשונה של המילה sum (סכום).

בתוך ה- S המוארכת נכתבת מכפלה: $f(x) \cdot dx$.

$f(x)$ היא הפונקציה המתארת את קצב השינוי, dx מסמל רוחב קטע קטן מאד.

a הוא הערך בו מתחילים לצבור את הכמות, b הוא הערך בו מסיימים לצבור את הכמות.

הקטע שבין $x = a$ לבין $x = b$ נקרא קטע האינטגרציה.