

# פונקציית הצטברות

## ומושג האינטגרל

### לתלמיד

אוגוסט 2020

**פיתוח :** המרכז הארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי

פורסם באתר מרכז המורים: <http://newhighmath.haifa.ac.il>

#### כתובת המערכת

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל-יסודי

הפקולטה לחינוך אוניברסיטת חיפה

הר הכרמל חיפה, 31905

טל. 04-8288351, פקס:

04-8240757

דוא"ל: [hmathcntr@edu.haifa.ac.il](mailto:hmathcntr@edu.haifa.ac.il)

יצא לאור במימון האגף למדעים במזכירות הפדגוגית  
ומינהלת מל"מ המרכז הישראלי לחינוך מדעי טכנולוגי  
© כל הזכויות שמורות למשרד החינוך



מינהלת מל"מ  
המרכז הישראלי לחינוך מדעי  
טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט



אוניברסיטת חיפה  
הפקולטה לחינוך



משרד החינוך  
המזכירות הפדגוגית  
אגף מדעים

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי

المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية

# מה בין גרף המהירות לגרף הדרך?

## במהירות קבועה

1. רוכב אופניים נסע לאורך מסלול ישר וארוך במהירות קבועה של 25 קמ"ש במשך מספר שעות.

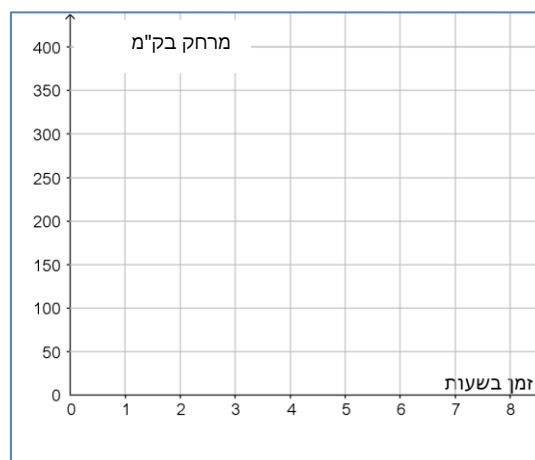
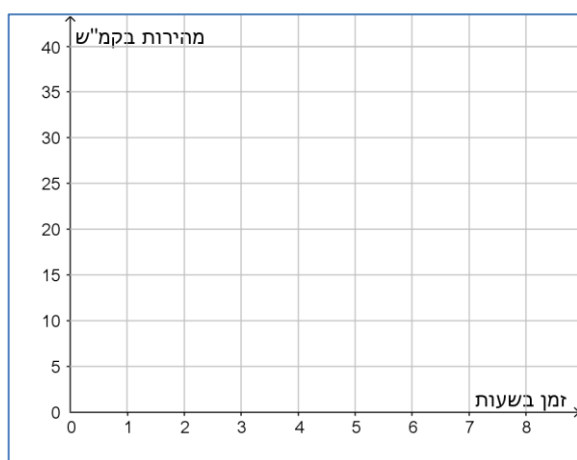
א. מה המרחק שרכב בשעה? במשך השעתיים הראשונות? במשך שלוש השעות הראשונות?

ב. השלימו את הטבלה וסרטטו:

(1) גרף המתאר את המרחק מנקודת היציאה כפונקציה של הזמן,

(2) גרף המתאר את המהירות כפונקציה של הזמן.

זמן בשעות	1	2	3	$5\frac{1}{2}$	7	$x$
מהירות קמ"ש						
דרך ק"מ						



**ביישומון המצורף** ניתן לשנות את משך הנסיעה ולצפות במרחק הנצבר בשני אופנים.

ג. מה הקשר בין המרחק הנצבר לשטח שבין ציר ה- $x$  לגרף המהירות? נמקו.

ד. הסבירו כיצד התקבל גרף המרחק הנצבר. מהו הקשר שלו לגרף המהירות?

ה. שנו את מהירות רוכב האופניים, שערו כיצד ייראה הגרף של מרחק הרכיבה הנצבר ובדקו את השערתכם.

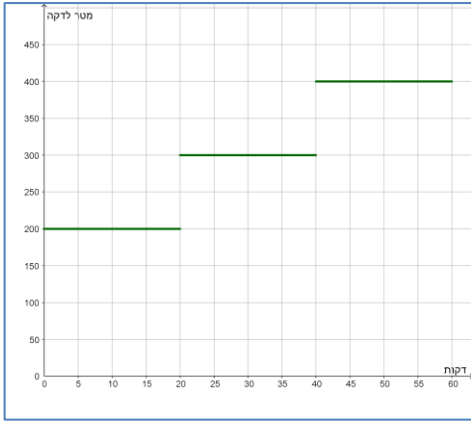
ו. כיצד ישתנה גרף המרחק הנצבר כאשר תגדילו או תקטינו את מהירות הרכיבה?

## אימון אופני כושר

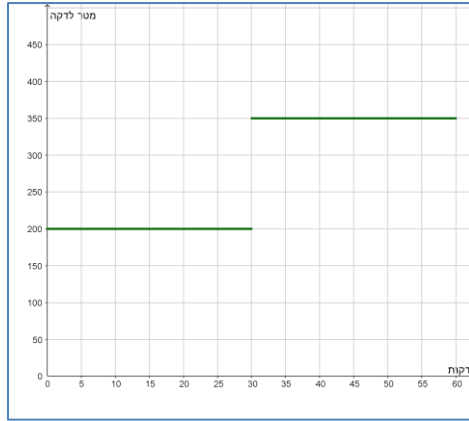
**2.** מאמן כושר תכנן אימון של שעה (60 דקות) באופני כושר. אימון על אופני כושר מדמה רכיבה על אופניים. כשהמתאמן רוכב 10 דקות במהירות 100 מטרים לדקה באופני הכושר, נאמר שמרחק הרכיבה שלו הוא 1000 מטרים, למרות שבפועל אופני הכושר מונחים במקום קבוע. לפי התכנון המאמן מחלק את האימון לפרקי זמן שווים באורכם, כאשר המהירות בכל פרק זמן היא קבועה וגדלה בין החלקים השונים. לשם השגת תוצאות טובות ביותר לאימון הכושר, מהירות הגלגלים נקבעת בין 100-450 מטרים לדקה. המאמן מתכנן לכל מתאמן תוכנית אימון מתאימה לו.

למשל, תוכנית אימונים בה: באימון הראשון, המתאמן רוכב במהירות קבועה לאורך כל השעה. באימון השני, המתאמן רוכב בשני פרקי זמן רצופים של חצי שעה כל אחד. בחצי השעה הראשונה: רכיבה במהירות קבועה של 200 מטרים לדקה ובחצי השעה הנוספת, רכיבה במהירות קבועה של 350 מטרים לדקה.

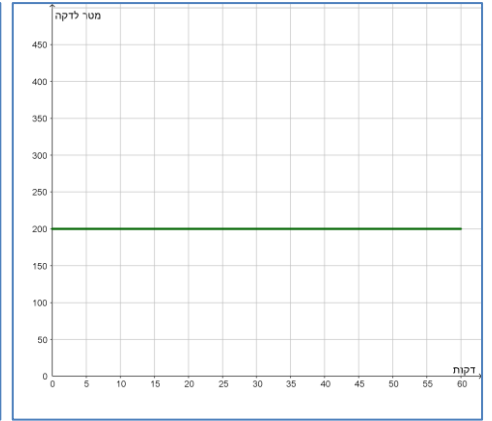
לפניכם מוצגות חמש תוכניות אימון שונות. תוכלו לחקור את התוכניות השונות [ביישומון](#).



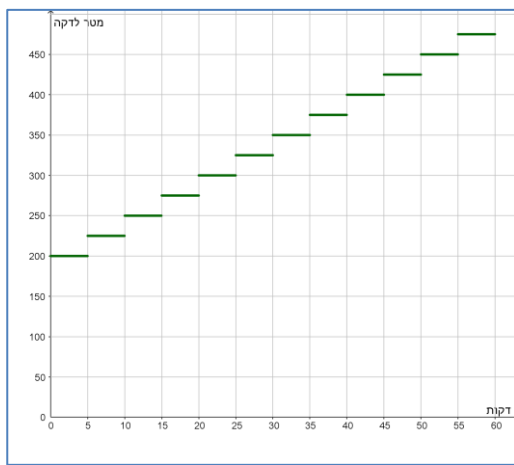
תוכנית אימונים 3



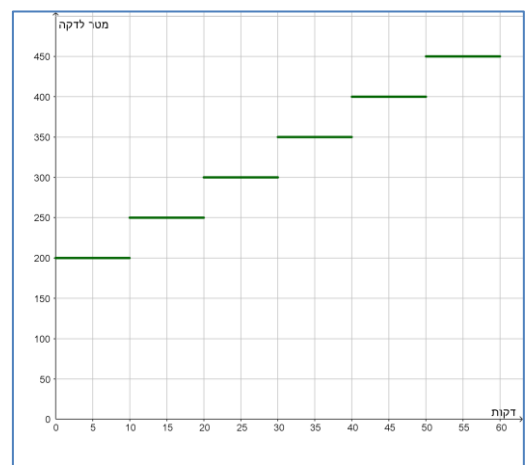
תוכנית אימונים 2



תוכנית אימונים 1



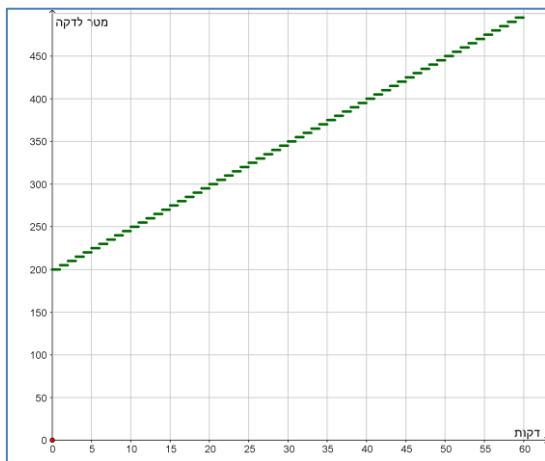
תוכנית אימונים 5



תוכנית אימונים 4

ענו לגבי כל אחת מתוכניות האימון:

- א. כמה פרקי זמן בתוכנית ומה מרחק הרכיבה הכולל שהושג בה? כיצד חישבתם? (ניזכר: אנחנו מתייחסים אל מרחק הרכיבה כאל המרחק שהיה המתאמן עובר אילו היה רוכב באופניים רגילים במקום באופני כושר, באותן המהירויות, במסלול ישר)
- ב. באיזה אימון יושג מרחק הרכיבה הגדול ביותר?
- ג. מה הקשר בין מרחק הרכיבה לבין השטח המוגבל בין ציר ה- $x$  לגרף?
- ד. סרטטו את גרף הפונקציה המתאימה לזמן הרכיבה, את מרחק הרכיבה המצטבר מראשית האימון, עבור כל אחד מהאימונים. היעזרו ביישומון.
- ה. איך יראה גרף פונקציית מרחק הרכיבה בהתאם לזמן, אם נקטין עוד ועוד את מקטעי הזמן השווים בהם המהירות קבועה?



3. מאמן כושר תכנן אימון של שעה באופני כושר. המהירות ההתחלתית היא 200 מטרים לדקה. מהירות הגלגלים גדלה בכל דקה ב- 5 מטר לדקה ונשארת קבועה במשך דקה שלמה.

א. כמה פרקי זמן יהיו בתוכנית?

ב. מה תהיה מהירות הגלגלים בדקה השנייה? בדקה העשירית?

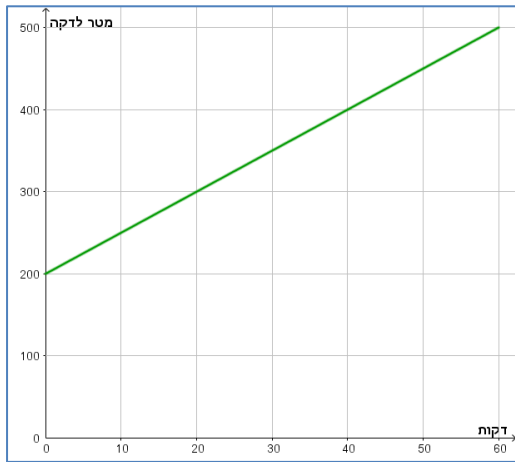
ג. מה המהירות המירבית שתושג? כיצד חישבתם?

ד. הסבירו מדוע סדרת "מרחקי הרכיבה" שעובר הרוכב בכל דקה היא סדרה חשבונית.

ה. חשבו את מרחק הרכיבה שהושג באימון זה והשוו עם השטח שבין הגרף לציר ה- $x$ . הסבירו כיצד חישבתם.

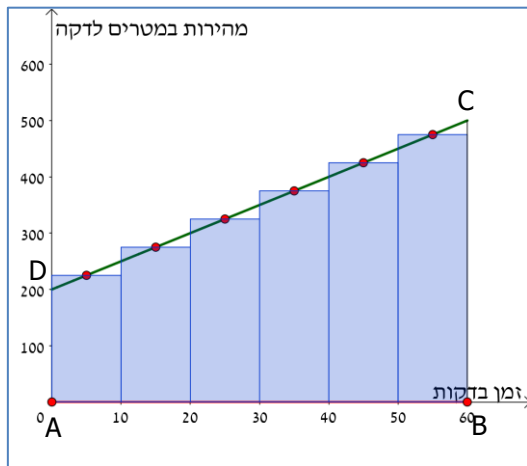
ו. סרטטו את הגרף של פונקציית מרחק הרכיבה המצטבר בהתאם לזמן.

4. מאמן כושר מתכנן אימון של שעה באופני כושר. בשאלה הקודמת עסקנו באימון שבו המהירות ההתחלתית היא 200 מטרים לדקה, מהירות הגלגלים גדלה בכל דקה בשיעור של 5 מטר לדקה ונשארת קבועה במשך דקה שלמה. הפעם נעסוק בתוכנית אחרת שבה מתכנתים את אופני הכושר כך שהגדלת המהירות תתואר על ידי פונקציה קווית, כך שבתום שעה המהירות תהיה בדיוק 500 מטרים לדקה (ראו איור 1).



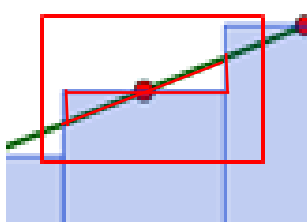
איור 1

כדי להעריך את מרחק הרכיבה במהלך האימון, נחלק תחילה את האימון ל-6 פרקי זמן של 10 דקות. לצורך חישוב אורך הדרך נתייחס אל מהירות המתאמן באמצע כל פרק זמן, כאילו רכב במהירות זו בקטע כולו. א. העריכו את מרחק הרכיבה באמצעות שטחי המלבנים. תוכלו להיעזר בחישוב סכום של סדרה חשבונית.



איור 2

ב. הסבירו מדוע סכום שטחי המלבנים שווה בדיוק לשטח שבין גרף המהירות לבין ציר ה- $x$

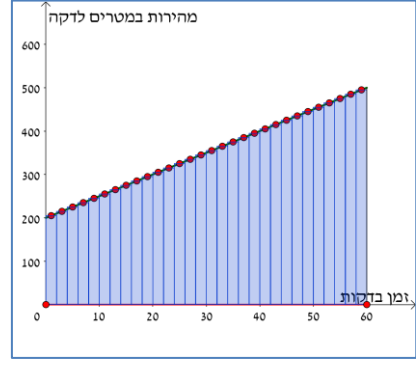
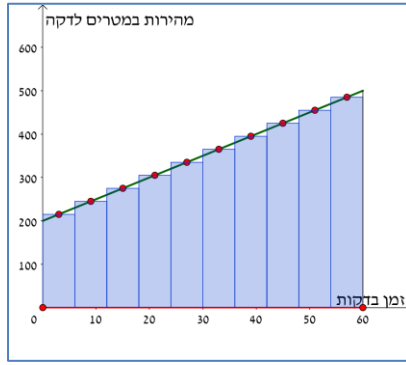
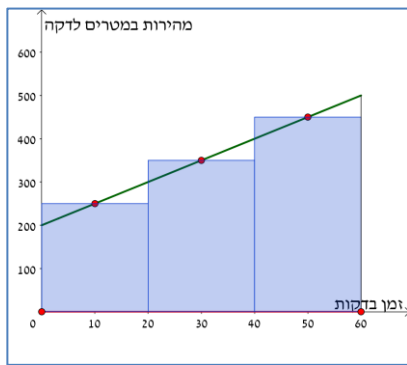


איור 3

(שטח הטרפז ABCD). רמז: היעזרו בחפיפת המשולשים שבאיור המוגדל (איור 3).

ג. האם תשתנה תשובתכם אם נעריך את מרחק הרכיבה באמצעות חלוקה למספר אחר של פרקי זמן? תוכלו להיעזר

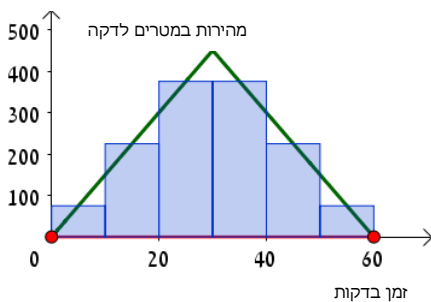
[ביישומון](#).



**5.** באימון אחר של שעה באופני כושר, האופניים מתוכנתים כך שבמחצית השעה הראשונה המהירות עולה ברציפות באופן ליניארי, ובמחצית השעה השנייה המהירות יורדת ברציפות באופן ליניארי (ראו איור).

**א.** ענו על פי הגרף: מהי המהירות המקסימלית אליה מגיעים באימון זה?

כמו בשאלה הקודמת, בשביל להעריך את מרחק הרכיבה במהלך האימון, נחלק תחילה את האימון ל-6 קטעים של 10 דקות כל אחד. לצורך חישוב המרחק הנצבר מתחילת הרכיבה נתייחס אל מהירות המתאמן באמצע כל קטע, כאילו רכב במהירות זו בקטע כולו.



**ב.** העריכו את מרחק הרכיבה באמצעות שטחי המלבנים.

**ג.** הסבירו מדוע סכום שטחי המלבנים שווה בדיוק לשטח שבין גרף פונקציית המהירות לבין ציר ה- $x$ .

**ד.** האם תשובתכם תשתנה אם נחלק את האימון לפרקי זמן קטנים יותר? הסבירו. אפשר להיעזר בתשובה לשאלה 4 ואפשר להיעזר [ביישומון](#).

[ביישומון הבא](#) תוכלו לראות את מרחק הרכיבה המצטבר לאורך האימון.

**ה.** מדוע, לדעתכם, ביישומון זה המרחק הנצבר מוצג באמצעות השטח שבין גרף פונקציית המהירות לבין ציר ה- $x$  מבלי להיעזר בשטחי מלבנים?

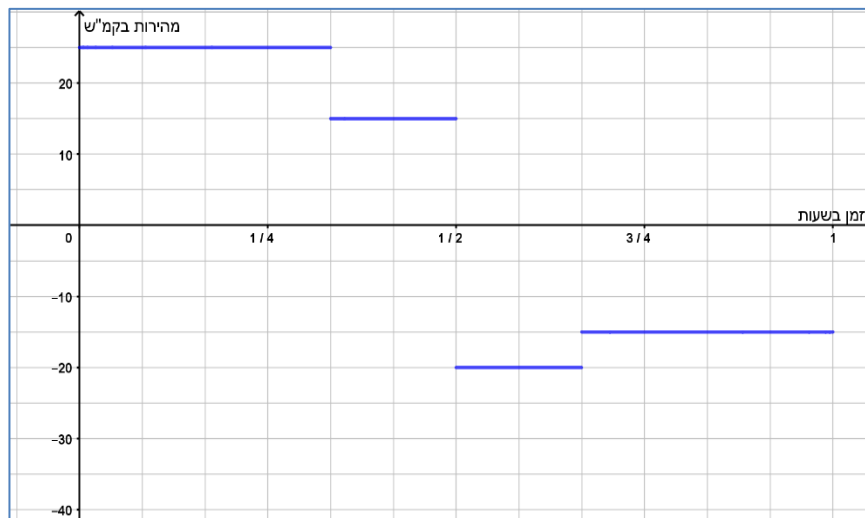


1. מהו מרחק הרכיבה המצטבר באימון זה  
 ב- 30 הדקות הראשונות? בכל 60 הדקות?  
 כיצד חישובתם? השוו את תוצאות החישוב  
 שלכם עם התוצאות המתקבלות בעזרת  
היישומון.

2. מה מרחק הרכיבה באימון זה לאחר 10 דקות?  
 לאחר 20 דקות? לאחר 30 דקות? לאחר 40  
 דקות? לאחר 50 דקות?

שערו כיצד נראה הגרף של פונקציית מרחק הרכיבה המצטבר בהתאם לזמן. בדקו  
ביישומון והסבירו את ההבדל בין שני חלקי הרכיבה.

6. אורך יציא מביתו לרכיבת בוקר בשביל אופניים במסלול ישר למשך שעה. בחלק מהרכיבה הוא  
 מתרחק מביתו ובחלק אחר הוא חוזר לכיוון ביתו.  
 גרף הפונקציה  $f(x)$  מתאר את מהירות הרכיבה של אורך בהתאם לזמן. מהירות שלילית  
 פירושה התקדמות בכיוון מנגוד לכיוון הרכיבה כאשר המהירות חיובית.



א. מהו המרחק שעובר אורך בכל אחד מקטעי הרכיבה?

ב. מה המרחק של אורך מביתו לאחר 20 דקות? 30 דקות? 40 דקות?

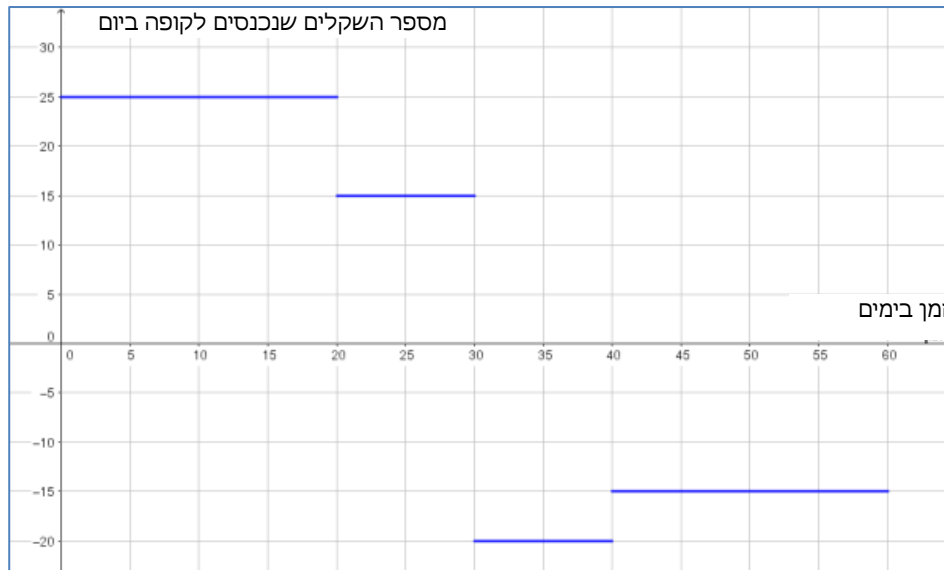
ג. מה המרחק של אורך מביתו בסיום הרכיבה (לאחר 60 דקות)?

ד. מהו אורך הדרך שאורך עבר בכל הרכיבה? ממה נובע ההבדל שבין התשובה לסעיף זה  
 לבין התשובה לסעיף הקודם.

ה. סרטטו את גרף המרחק של אורך מביתו כפונקציה של הזמן.



7. אורי עובד במלצרות ומקבל את התשלום היומי. במהלך כל יום הוא חוכש מזון, לעיתים הולך לסרט, או בילויים אחרים. בסוף כל יום הוא מפקיד את הכסף בקופה. אם הוא נדרש לכך, הוא לוקח כסף מהקופה במהלך היום. הגרף מתאר את התזרים היומי בקופה של אורי לאורך שישים יום, כלומר: ציר ה- $y$  מתאר את מספר השקלים שאורי הכניס לקופה ביום אחד. במילים אחרות: ציר ה- $y$  מתאר את מהירות הזרמת הכסף לקופה. הניחו כי בתחילת התקופה הקופה היתה ריקה.



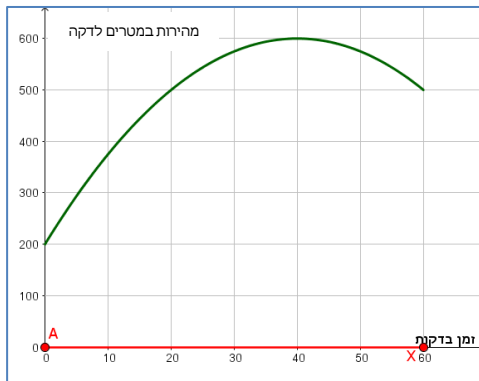
- א. הסבירו את הגרף: מה מתארים קטעים שנמצאים מעל ציר ה- $x$ ? מה מתארים קטעים שנמצאים מתחת לציר ה- $x$ ?
- ב. מהו הסכום שנצבר בקופה של אורי בעשרים הימים הראשונים?
- ג. מהו הסכום שנצבר בקופה בשלושים הימים הראשונים?
- ד. מה התרחש בין היום השלושים ואחד ליום הארבעים? מהו הסכום שנשאר בקופה?
- ה. מהו הסכום שנצבר בקופה או יצא ממנה בכל אחד מחלקי התקופה, כפי שמראה הגרף?
- ו. מהו הסכום שהיה בקופה לאחר 20 יום? 30 יום? 40 יום? לאחר 60 יום?
- ז. מהו הסכום שנמצא בקופה בסיום התקופה?
- ח. סרטטו את הגרף המתאר את סכום הכסף שנמצא בקופה כפונקציה של הזמן.

# פונקציית ההצטברות – המקרה

## הכללי

### תוכנית אימון על פי הגרף

במשימות אלו נחזור אל אימון הרכיבה ונעריך את מרחק הרכיבה שבאימון כולו באמצעות חלוקת זמן האימון למקטעים, ונחשב את מרחק הרכיבה בכל מקטע בנפרד. בתהליך שנבצע אנו נקטין את האורך של כל מקטע ונגדיל את מספר המקטעים, באופן זה נוכל לשפר את הדיוק בהערכת המרחק.

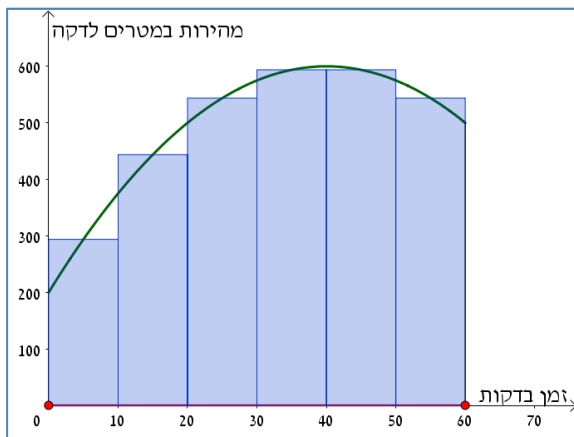


1. מאמן כושר טוען שאימון מיטבי של שעה באופני כושר אמור להתנהל כאשר מהירות האופניים מתוכננת לפי הגרף הבא:

א. מה ניתן לומר על המהירות? האם היא קבועה או משתנה? כיצד? נמקו.

ב. מה ניתן לומר על מרחק הרכיבה של רוכב האופניים? האם כאשר המהירות קטנה גם אורך הדרך קטן?

ג. נסו להעריך את מרחק הרכיבה הכולל לפי תוכנית זו.



2. בכדי לקבוע את המרחק הנצבר ברכיבה כולה נרצה שוב לחלק את מהלך הרכיבה לפרקי זמן שווים, ובכל אחד מהם נבצע הערכה נפרדת.

נחקור בעזרת **היישומון** הבא את חישוב מרחק הרכיבה, בחלוקות שונות של זמן הרכיבה לפרקי זמן שווים.

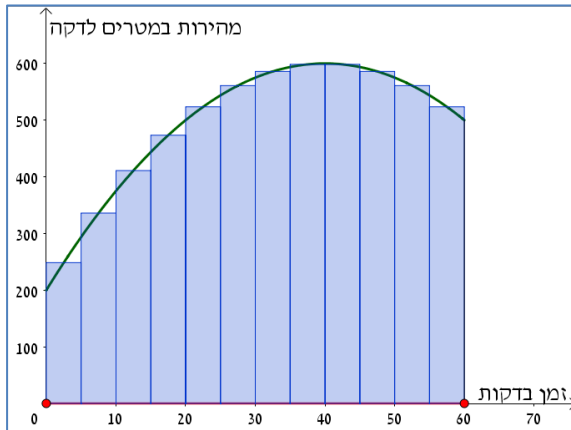
**א.** בחלוקה ל- 6 פרקי זמן של 10 דקות כל אחד, נאמוד את מרחק הרכיבה בכל אחד מפרקי הזמן באמצעות מהירות הרכיבה באמצע פרק זמן זה (ראו איור).

(1) הסבירו כיצד לדעתכם נבנו המלבנים בכל מקטע.

(2) מה הקשר בין שטח המלבן לבין אומדן המרחק הנצבר בפרק הזמן המתאים? הסבירו.

(3) חשבו את השטח של כל אחד מששת המלבנים. כיצד חישבתם?

(4) מה מרחק הרכיבה הכולל בהערכה זו?

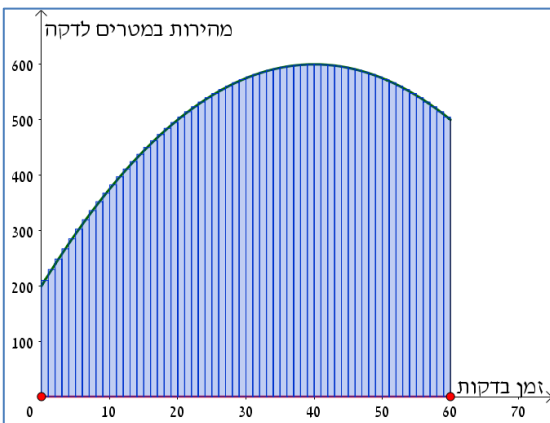


(5) השוו באמצעות **היישומון** את מרחק הרכיבה הכולל שקיבלתם בתשובתכם לסעיף (4) לשטח שבין העקום לציר ה-  $x$ .

**ב.** רוכב האופניים בדק את המהירות כל 5 דקות (חלוקה ל-12 מקטעים), ולפיה חישב את מרחק הרכיבה.

מה מרחק הרכיבה הכולל בהערכה זו?

השוו את המרחק שקיבלתם לשטח שבין העקום לציר ה-  $x$ , כפי שהוא מופיע ביישומון.



**ג.** רוכב האופניים בדק את המהירות כל 1 דקה (חלוקה ל-60 מקטעים).

תארו כיצד ניתן להעריך את מרחק הרכיבה הכולל?