פונקציית הצטברות

ומושג האינטגרל

למורה

אוגוסט 2020

פיתוח : המרכז הארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי

פורסם באתר מרכז המורים: http://newhighmath.haifa.ac.il

כתובת המערכת

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל-יסודי

הפקולטה לחינוך אוניברסיטת חיפה

הר הכרמל חיפה, 31905

טל. 04-8288351, פקס:

04-8240757

דוא"ל: hmathcntr@edu.haifa.ac.il

יצא לאור במימון האגף למדעים במזכירות הפדגוגית
ומינהלת מל"מ המרכז הישראלי לחינוך מדעי טכנולוגי

מינהלת מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי
טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט

אוניברסיטת חיפה
הפקולטה לחינוך

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
אגף מדעים

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי

المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية

מדריך למורה ופתרונות

מבוא

אינטגרל הוא אחד המושגים החשובים ביותר באנליזה מתמטית. שימוש בו הכרחי כאשר יש משמעות לחישובים באמצעות פונקציה קדומה לפונקציה נתונה, למשל כאשר יש משמעות לשטח מתחת לגרף של פונקציה בתחום מסוים. פיתוח המושגים הקשורים במושג האינטגרל והסימונים הקשורים בו התרחש בשני כיוונים עיקריים: אינטגרל כגבול של סכומים וכלי לחישוב שטחים (אינטגרל מסויים) ואינטגרל כפעולה הפוכה לנגזרת (אינטגרל בלתי מסויים). ההבנה של הקשר בין שניהם הוא אחד האתגרים בהוראת מושג האינטגרל.

ביחידה זו נכיר את האינטגרל, על שני סוגיו באמצעות בעזרת פונקציית הצטברות של פונקציה נתונה. נתייחס לפונקציה נתונה כמייצגת קצב שינוי של כמות מסויימת, ונרצה לחשב את הכמות המצטברת במקטע של הגרף. נציג את רעיון ההצטברות באופן ידידותי והדרגתי באמצעות בעיות תנועה. בהינתן פונקציה המתארת מהירות של גוף בהתאם לזמן, היא מתארת, למעשה את קצב השינוי במרחק של הגוף מנקודת המוצא. כך נוכל לברר מהו המרחק שעבר הגוף מנקודת המוצא. נצביע על הקשר בין התשובה לשאלה לבין לבין השטח שנוצר בין גרף המהירות לבין ציר ה-x בתחום הזמנים המדובר.

ישנם לפחות שלושה טעמים להוראת האינטגרל דרך רעיון ההצטברות:

- ניתן להציג בקלות את הקשר בין אינטגרל מסויים לאינטגרל בלתי מסויים.
- ניתן להראות באופן טבעי את הקשר בין גזירה ואינטגרציה הידוע בשם **המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי**
- רעיון ההצטברות מאפשר למידה הדרגתית מבוססת על מושגים שיש להם משמעות בעיני התלמידים (כולל קירוב) ולא רק על פרוצדורות פורמליות. ניתן להצמיח את הרעיון של האינטגרל באופן אינטואיטיבי באמצעות סיטואציות מן המציאות, ובהמשך ליישם את הרעיון במגוון גדול של סיטואציות נוספות.

היחידה מכוונת להבנה, תוך התנסות, של הקשר בין פונקציית ההצטברות לבין הפונקצייה הנתונה, ושל העובדה שפונקציית ההצטברות היא פונקציה קדומה של הפונקציה הנתונה.

הבנה זו מושגת בשלבים, כשהדוגמאות הראשונות לקוחות כאמור מההקשר של בעיות דרך (רכיבה, הליכה, אימון באופני כושר המדמה רכיבה למרחק), בגלל ההבנה האינטואיטיבית שבמצב של מהירות קבועה אורך הדרך שווה למכפלה של המהירות באורך פרק הזמן המתאים (כשיחידות הזמן, המהירות והמרחק מתאימות, כמובן) שלבים ביחידת הלימוד

1. חישוב ישיר של הצטברות הדרך במקרה של פונקציית מהירות קבועה.
2. חישוב ישיר של הצטברות הדרך במקרה של פונקציית מהירות קבועה למקוטעין (פונקציית מדרגות)
3. אומדן של הצטברות הדרך במקרה הכללי, בעזרת קירוב של פונקציית המהירות לפונקציית מדרגות
   - במקרה של פונקציית מהירות ליניארית
   - במקרה של פונקציית מהירות כללית.

אין הבדל עקרוני בין המקרה של פונקציית מהירות ליניארית לפונקציית מהירות כללית. הסיבה להתייחס לפונקציית מהירות ליניארית כמקרה מיוחד נובעת מהעובדה שבמקרה הליניארי אפשר לחשב את המרחק המצטבר באופן מדויק, ואילו במקרה הכללי יש צורך לאמוד אותו באמצעות קירובים.

4. הצטברות במקרה של מהירות שלילית (מהירות בכיוון הנגדי לזה שבו המהירות נחשבת חיובית),
5. בשלב זה נעבור להציג את פונקציית ההצטברות גם באמצעות דוגמה נוספת (הצטברות של כסף), ואחר כך גם ללא הקשר חוץ מתמטי.
6. זיהוי תכונות של פונקציית ההצטברות ושל הקשר ביניהן לתכונות הפונקציה המקורית. שלב זה נועד להעלות באופן טבעי את ההשערה שפונקציית ההצטברות היא פונקציה קדומה של הפונקציה המקורית.
7. המשפט היסודי של החדו"א והוכחתו
8. יישומים של המשפט היסודי של החדו"א

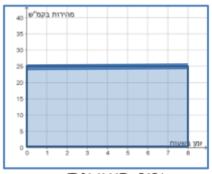
המבוא ערוך על פי:

Anatoli Kouropatov & Tommy Dreyfus (2013) Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation: suggestion for a high school curriculum, International Journal of Mathematical *Education in Science and Technology, 44:5, 641-65*

מה בין גרף המהירות לגרף הדרך?

במהירות קבועה

משימה 1 עוסקת בדרך שעובר רוכב אופניים, הרוכב במהירות קבועה לאורך מסלול ישר. משימה זו נועדה להכרות ראשונה עם המושג 'פונקציית הצטברות' באמצעות דוגמה מוכרת, של תנועה במהירות קבועה.



מהירות בקמ"ש
זמן בשעות

המטרה העיקרית היא שהתלמיד ישים לב לקשר בין חישוב השטח המלבני שנוצר בין הגרף של פונקציית המהירות הקבועה לבין ציר ה-x בתחום זמנים מוגדר כמכפלה של שתי צלעות סמוכות של המלבן – אורך אחת מהן מייצג את מהירות הרכיבה ואורך הצלע השנייה מייצג את זמן הרכיבה – לבין מרחק הרכיבה בקילומטרים. למשימה מוצמד יישומון שממחיש את בניית גרף המרחק המצטבר לפי הערכים של הצטברות השטח מתחת לגרף המהירות.

1. רוכב אופניים נסע לאורך מסלול ישר וארוך במהירות קבועה של 25 קמ"ש במשך מספר שעות.

א. מה המרחק שרכב בשעה? במשך השעתיים הראשונות? במשך שלוש השעות הראשונות?

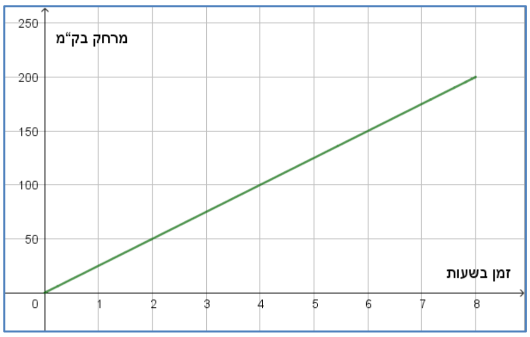
במשך שעה רכב מרחק של 25 ק"מ, במשך שעתיים 50 ק"מ ובמשך 3 שעות – 75 ק"מ.

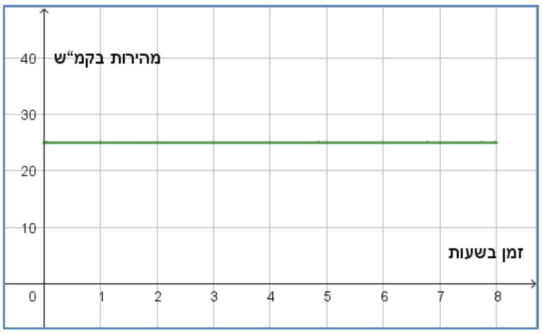
ב. השלימו את הטבלה וסרטטו:

(1) גרף המתאר את המרחק מנקודת היציאה כפונקציה של הזמן,

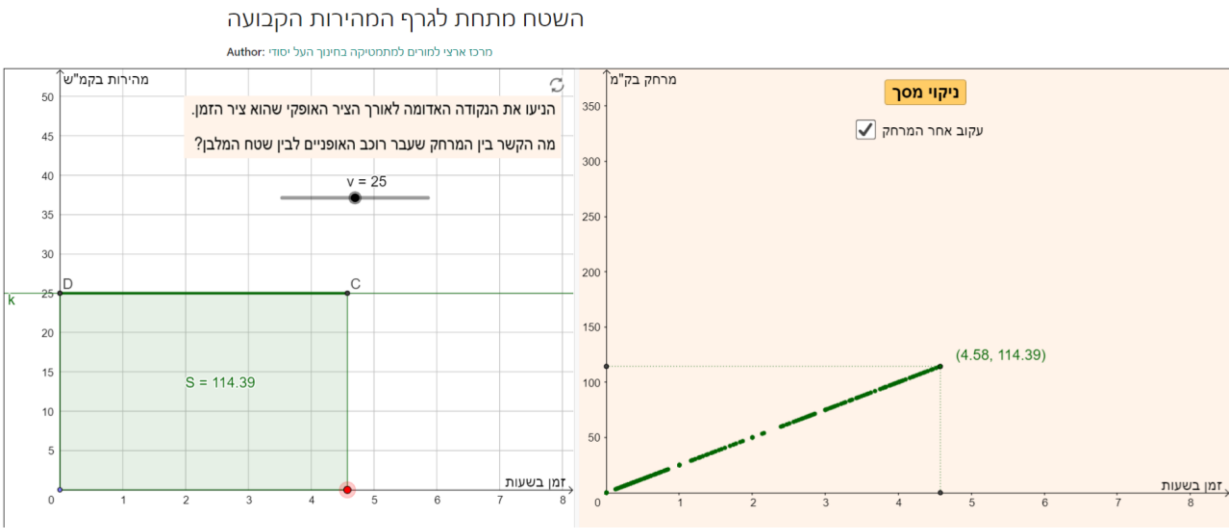
(2) גרף המתאר את המהירות כפונקציה של הזמן.

זמן בשעות	1	2	3	$5\frac{1}{2}$	7	x
מהירות קמ"ש	25	25	25	25	25	25
מרחק בק"מ	25	50	75	137.5	175	$25x$





[ביישומון המצורף](#) ניתן לשנות את משך הנסיעה ולצפות במרחק הנצבר בשני אופנים.



ביישומון ניתן לעקוב אחר הגרף המתאר את המהירות כפונקציה של הזמן, ולראות שהמרחק הנצבר בכל נקודת זמן שווה לשטח המלבן מתחת לגרף המהירות בפרק הזמן המתאים. בחלון הימני ביישומון נבנה גרף המתאר את מרחק הרכיבה הנצבר כפונקציה של הזמן.

ג. מה הקשר בין המרחק הנצבר לשטח שבין ציר ה- x לגרף המהירות? נמקו.

אנו מחשבים את מרחק הרכיבה על פי הנוסחה: **מהירות x זמן = דרך**.

השטח מתחת לגרף המהירות מחושב לפי המכפלה של שיעור ה-x שהוא הזמן ושל שיעור ה-y שהוא המהירות. לכן בעת רכיבה במהירות קבועה, המרחק הנצבר בזמן נתון שווה לשטח המלבן מתחת לגרף המהירות.

ד. הסבירו כיצד התקבל גרף המרחק הנצבר. מהו הקשר שלו לגרף המהירות?

גרף המרחק הנצבר הוא ישר ששיפועו 25. (כל שעה המרחק הנצבר גדל ב-25 ק"מ).
קיבלנו שהמהירות הקבועה 25, שווה לשיפוע הישר המתאר את גרף המרחק הנצבר.

ה. שנו את מהירות רוכב האופניים, שערו כיצד ייראה הגרף של מרחק הרכיבה הנצבר ובדקו השערתכם.

ו. כיצד ישתנה גרף המרחק הנצבר כאשר תגדילו או תקטינו את מהירות הרכיבה?

כיוון שהתלמידים יודעים לחשב את המרחק הנצבר כפונקציה של הזמן, כמהירות כפול זמן, וגם על סמך התשובות הקודמות הם יכולים להסיק שגרף המרחק הניצבר הוא ליניארי, בתחום הנתון, ושיפועו שווה למהירות הרוכב.

קל להבחין ששיפוע הגרף של המרחק הנצבר זהה למהירות של הרוכב. ביישומון ניתן גם לשנות את המהירות ולראות את השינוי בגרף המרחק בהתאם.

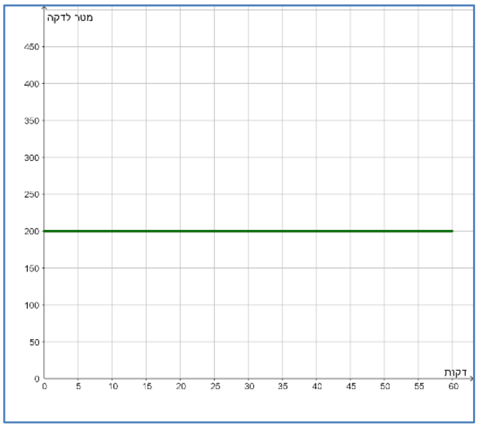
אימון אופני כושר

משימה 2-5 עוסקות ברכיבה על אופני כושר, בהם ניתן לשנות את מהירות הרכיבה. במשימות 2,3 השינוי יהיה במקטעי זמנים זהים. רכיבה כזו מדמה נסיעה במהירות משתנה, אך קבועה במקטעים. במשימות אלה מחוזק הקשר בין המרחק מנקודת המוצא – הכמות הנצברת, לבין השטח שבין הגרף של המהירות לבין ציר ה-x, כלומר נבנה הביטוי הויזואלי לכמות הנצברת.
במשימה 4 השינוי במהירות הרכיבה הוא רציף, כך שגרף המהירות הוא לינארי עולה, במשימה 5 גרף המהירות הוא קו שבור בחלקו עולה ובחלקו יורד. בכל המקרים חישוב המרחק הנצבר הוא אפשרי ומדויק לפי חישוב השטח בין גרף הפונקציה המתארת את המהירות לבין ציר ה-x, היות שניתן לחשב שטחי מלבנים, משולשים ו/או טרפזים. המהלך הזה יוביל אל ניסוח ההשערה שעבור גרף המבטא קצב שינוי כמות – גם כזה שאינו מורכב מפונקציות קוויות – הביטוי הויזואלי של הכמות הנצברת בפרק זמן מסוים הוא השטח שבין הגרף לבין ציר ה-x בתחום המתאים לפרק הזמן המדובר.
במקרה של פונקציית מדרגות, הזיהוי של המרחק הרכיבה הנצבר עם השטח מתחת לגרף הוא ברור, ומסתמך על כך שכאשר מהירות הנסיעה קבועה מרחק הרכיבה שווה למכפלה של המהירות בזמן – אותה הפעולה הדרושה לחישוב שטח המלבן. כאשר המדרגות צפופות גרף המדרגות דומה לגרף רציף וכך מתפתחת התחושה האינטואיטיבית שגם כאשר מהירות הרכיבה משתנה ברציפות, המרחק המצטבר שווה לשטח שמתחת לגרף המהירות.
חשוב להיזכר שוב ושוב, בכל פעם כשמחשבים את המרחק הנצבר באמצעות שטח של מלבן, שהזיהוי ביו המרחק המצטבר לשטח המלבן נובע מכך שבשני המקרים כופלים זה בזה את אותם המספרים.

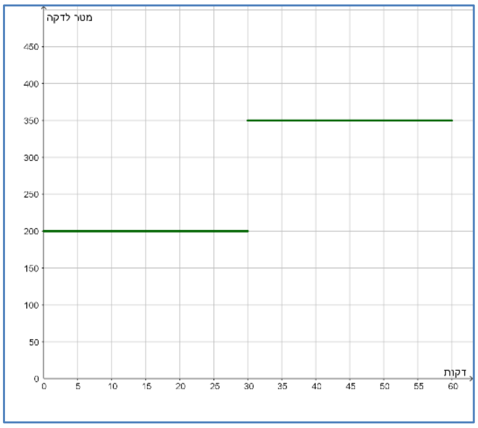
2. מאמן כושר תכנן אימון של שעה (60 דקות) באופני כושר. אימון על אופני כושר מדמה רכיבה על אופניים. כשהמתאמן רוכב 10 דקות במהירות 100 מטרים לדקה באופני הכושר, נאמר שמרחק הרכיבה שלו הוא 1000 מטרים, למרות שבפועל אופני הכושר מונחים במקום קבוע. לפי התכנון המאמן מחלק את האימון לפרקי זמן שווים באורכם, כאשר המהירות בכל פרק זמן היא קבועה וגדלה בין החלקים השונים. לשם השגת תוצאות טובות ביותר לאימון הכושר, מהירות הגלגלים נקבעת בין 100-450 מטרים לדקה. המאמן מתכנן לכל מתאמן תוכנית אימון מתאימה לו.

למשל, תוכנית אימונים בה: באימון הראשון, המתאמן רוכב במהירות קבועה לאורך כל השעה. באימון השני, המתאמן רוכב בשני פרקי זמן רצופים של חצי שעה כל אחד. בחצי השעה הראשונה: רכיבה במהירות קבועה של 200 מטרים לדקה ובחצי השעה הנוספת, רכיבה במהירות קבועה של 350 מטרים לדקה.

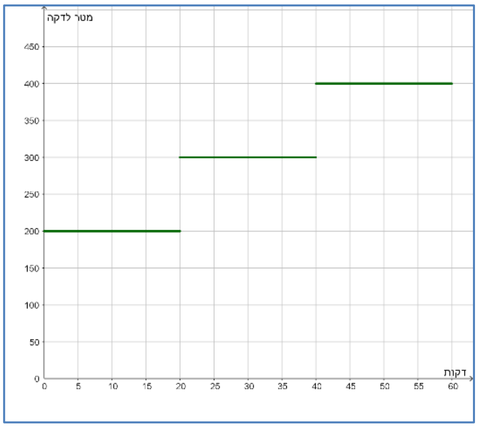
לפניכם מוצגות חמש תוכניות אימון שונות. תוכלו לחקור את התוכניות השונות **ביישומון**.



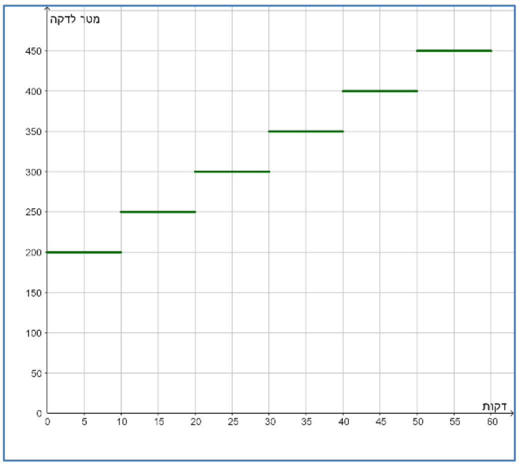
תוכנית אימונים 1



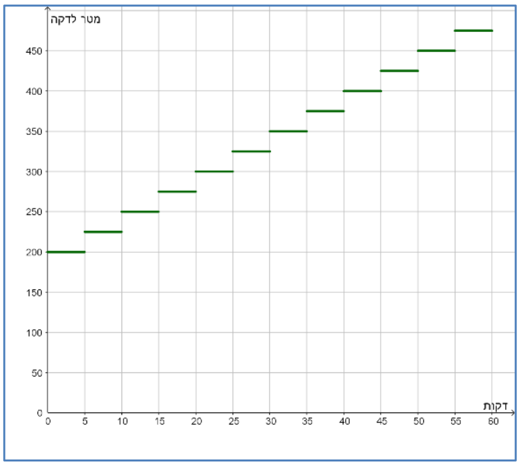
תוכנית אימונים 2



תוכנית אימונים 3



תוכנית אימונים 4



תוכנית אימונים 5

ענו לגבי כל אחת מתוכניות האימון:

א. כמה פרקי זמן בתוכנית ומה מרחק הרכיבה הכולל שהושג בה? כיצד חישבתם?
(ניזכר: אנחנו מתייחסים אל מרחק הרכיבה כאל המרחק שהיה המתאמן עובר אילו היה רוכב באופניים רגילים במקום באופני כושר, באותן המהירויות, במסלול ישר)

תכנית אימון 1: פרק זמן אחד של 60 דקות.

$$200_{\text{מטר/דקה}} \cdot 60_{\text{דקה}} = 12{,}000_{\text{מטרים}}$$

תכנית אימון 2: 2 פרקי זמן כל אחד של 30 דקות.

$$200 \cdot 30 + 350 \cdot 30 = 16{,}500_{\text{מטרים}}$$

תכנית אימון 3: 3 פרקי זמן כל אחד של 20 דקות.

$$200 \cdot 20 + 300 \cdot 20 + 400 \cdot 20 = 18{,}000_{\text{מטרים}}$$

תכנית אימון 4: 6 פרקי זמן כל אחד של 10 דקות.

$$200 \cdot 10 + 250 \cdot 10 + 300 \cdot 10 + 350 \cdot 10 + 400 \cdot 10 + 450 \cdot 10 =$$
$$(200 + 250 + 300 + 350 + 400 + 450) \cdot 10 = 19{,}500_{\text{מטרים}}$$

תכנית אימון 5: 12 פרקי זמן כל אחד של 5 דקות.

$$200 \cdot 5 + 225 \cdot 5 + 250 \cdot 5 + 275 \cdot 5 + 300 \cdot 5 + 325 \cdot 5 + 350 \cdot 5 + 375 \cdot 5 + 400 \cdot 5 + 425 \cdot 5 + 450 \cdot 5 + 475 \cdot 5 =$$

$$(200 + 225 + 275 + 300 + 325 + 350 + 375 + 400 + 425 + 450 + 475) \cdot 5 = 20{,}250_{\text{מטרים}}$$

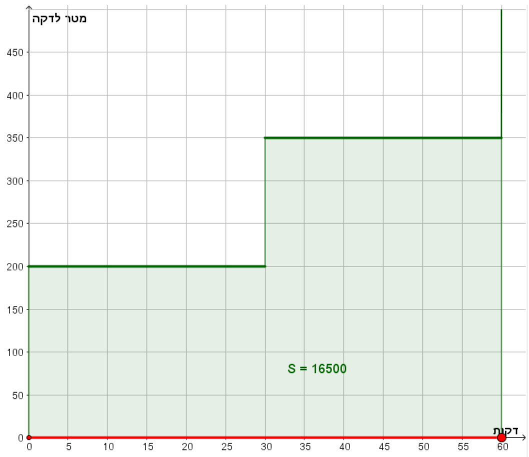
ב. באיזה אימון יושג מרחק הרכיבה הגדול ביותר?

בתוכנית אימון 5, הושג מרחק הרכיבה הגדול ביותר.

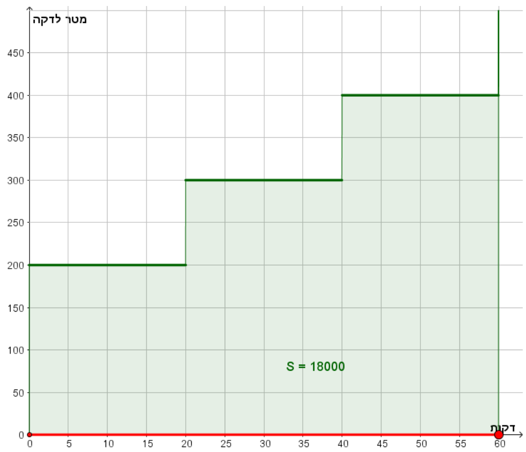
ג. מה הקשר בין מרחק הרכיבה לבין השטח המוגבל בין ציר ה- x לגרף?

השטח המוגבל בין ציר ה- x לגרף בכל פרק זמן, הוא שטח המלבן המייצג את מרחק הרכיבה שהושג באותו פרק זמן. לכן מרחק הרכיבה לאורך כל זמן האימון הוא סכום שטחי המלבנים בכל תכנית אימון.

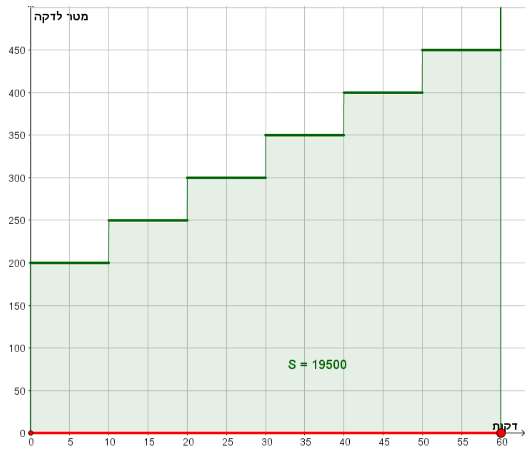
תכנית אימון 1



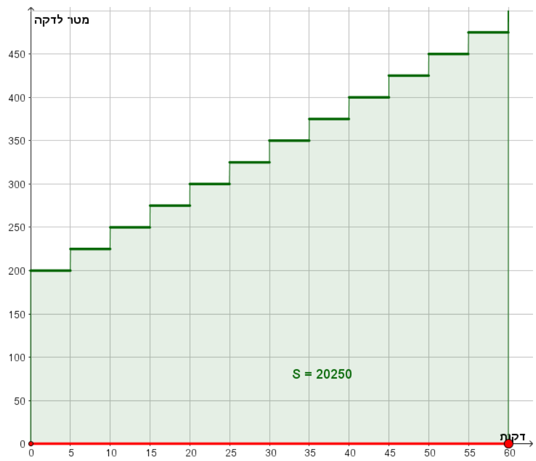
תכנית אימון 2



תכנית אימון 3

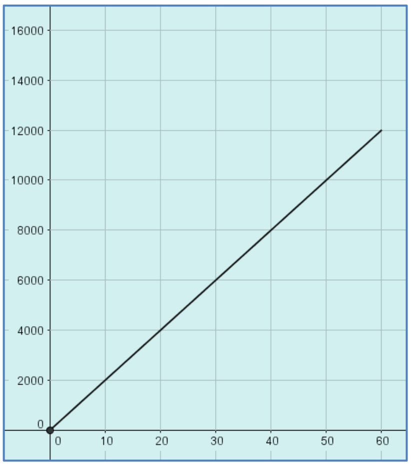


תכנית אימון 4

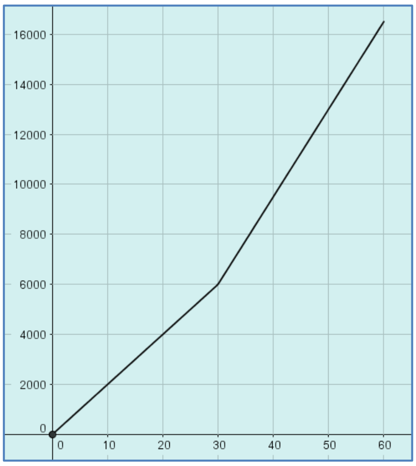


תכנית אימון 5

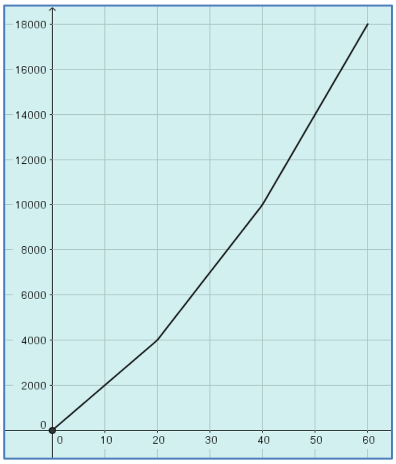
ד. סרטטו את גרף הפונקציה המתאימה לזמן הרכיבה, את מרחק הרכיבה המצטבר מראשית האימון, עבור כל אחד מהאימונים. היעזרו ב[יישומון](#) .



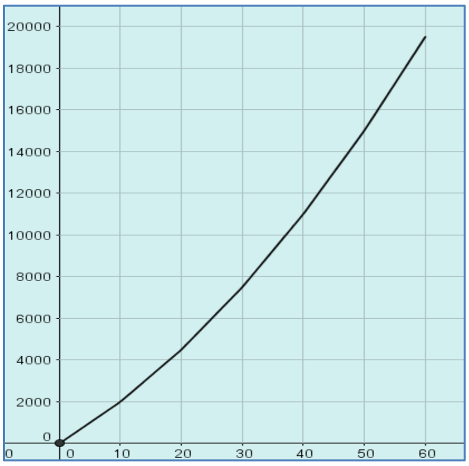
תכנית אימון 1



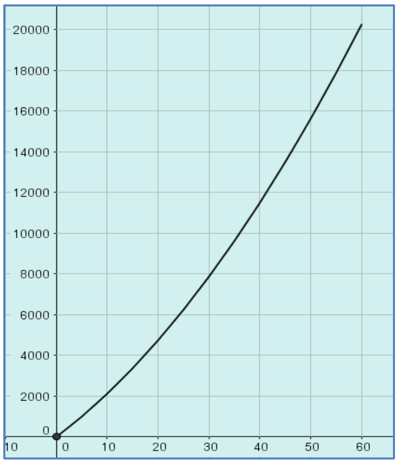
תכנית אימון 2



תכנית אימון 3



תכנית אימון 4



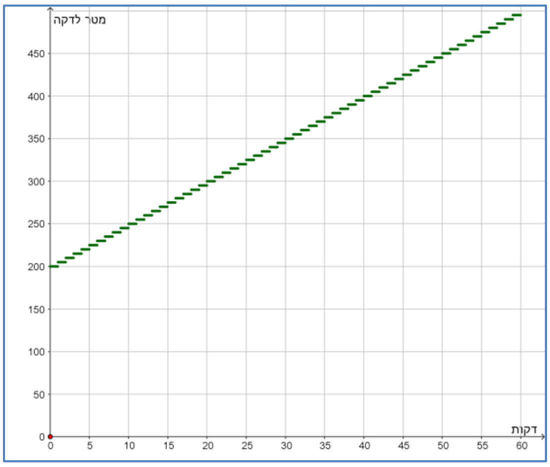
תכנית אימון 5

ה. איך יראה גרף פונקציית מרחק הרכיבה בהתאם לזמן, אם נקטין עוד ועוד את מקטעי הזמן השווים בהם המהירות קבועה?

גרף פונקציית המהירות יתקרב לישר, והגרף של פונקציית המרחק המצטבר ייראה יותר ויותר חלק, וימשיך לבטא את סכום שטחי המלבנים שמתחת לפונקציית המדרגות. אם תלמידים יאמרו שמדובר בפרבולה אפשר להציג זאת כהשערה. אין טעם לעסוק בכך בשלב כה מוקדם.

במשימות 3 ו-4 נפתח אינטואיציה למושג פונקציית הצטברות כשטח מתחת לגרף מבלי להגדירה באופן פורמלי. במשימות מוצג גרף מדרגה "צפוף" המקורב לישר. נשים לב שבמשימות אלו , גם המהירויות מהוות סידרה חשבונית וגם שטחי המלבנים מהווים סדרה חשבונית ולכן ניתן לחשב את השטח שמתחת לגרף פונקציית המהירות כסכום סדרה חשבונית. ניתן לראות כי סכום שטחי המלבנים הוא קירוב טוב של השטח שמתחת לישר הרציף.

3. מאמן כושר תכנן אימון של שעה באופני כושר.
המהירות ההתחלתית היא 200 מטרים לדקה.
מהירות הגלגלים גדלה בכל דקה ב- 5 מטר לדקה
ונשארת קבועה במשך דקה שלמה.



א. כמה פרקי זמן יהיו בתוכנית?

במהלך שעה יהיו 60 פרקי זמן.

ב. מה תהיה מהירות הגלגלים בדקה השנייה?
בדקה העשירית?

המהירות ההתחלתית היא 200 מטרים לדקה והיא גדלה כל דקה ב-5 מטר לדקה. כלומר בדקה השנייה המהירות תהיה 205 מטר לדקה. בדקה העשירית, על פי נוסחת האיבר הכללי בסדרה חשבונית $v_{10} = 200 + 9 \cdot 5 = 245$ המהירות תהיה 245 מטר לדקה.

מה המהירות המירבית שתושג?
כיצד חישבתם?

הפרש המהירויות בכל דקה הוא 5, לכן סדרת המהירויות היא סדרה חשבונית.

$$v_1 = 200, \quad d = 5\,, \quad n = 60 \quad \longrightarrow \quad v_{60} = 200 + 59 \cdot 5 = 495_{\text{מטר לדקה}}$$

לאחר שעה, 60 דקות, המהירות המירבית תהייה 495 מטר לדקה.

ג. הסבירו מדוע סדרת "מרחקי הרכיבה" שעובר הרוכב בכל דקה היא סדרה חשבונית.

הפרש המהירויות בכל דקה הוא 5. סדרת "מרחקי הרכיבה", נסמן אותה ב- $\{m\}$, מתאימה לסדרת שטחי המלבנים שצלעותיהם 1(זמן של דקה) ו- v_i (המהירות בדקה ה – i).

אפשר לצפות שתלמידים שונים יענו על השאלה מנקודות מבט שונות:

נקודת מבט המעוגנת בהקשר:

"מרחק הרכיבה" שעובר הרוכב בכל דקה שווה למהירות הרוכב במטרים לדקה. אם בכל דקה המהירות גדלה בחמישה מטרים לדקה, הדרך שעובר הרוכב בכל דקה גדלה בחמישה מטרים. מכאן שמדובר בסדרה חשבונית שהפרשה 5.

נקודת מבט גיאומטרית: סדרת מרחקי הרכיבה מתאימה לסדרת שטחי המלבנים שבין גרף פונקציית המהירות לבין ציר ה-x. צלע אחת של המלבן היא 1 (זמן בדקות של קטע רכיבה במהירות קבועה) הצלע השנייה של המלבן שווה למהירות הרכיבה באותה דקה. כיוון שמדקה לדקה המהירות גדלה ב-5 מטרים לדקה, הרי שההפרש בין שטחי המלבנים הוא 5 יחידות שטח.

נקודת מבט אלגברית:

כדי להוכיח שסדרת "מרחקי הרכיבה בדקה" היא חשבונית נראה שההפרש $m_{i+1}-m_i$ קבוע.

$$m_i = 1 \cdot v_i = 1 \cdot (200 + (i-1) \cdot 5) = 195 + 5i \qquad \rightarrow$$

$$m_{i+1} - m_i = 195 + 5(i+1) - (195 + 5i) = 5$$

ד. חשבו את מרחק הרכיבה שהושג באימון זה והשוו עם השטח שבין הגרף לציר ה-x. הסבירו כיצד חישבתם.

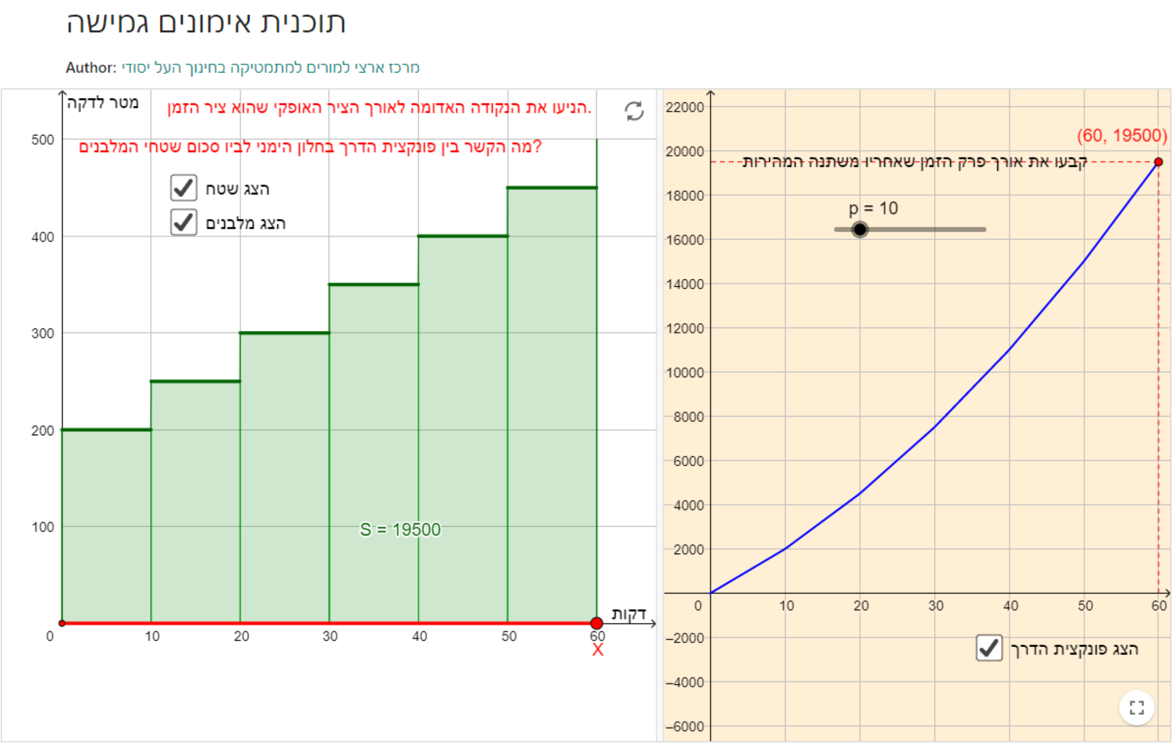
מרחק הרכיבה המצטבר הוא סכום סדרת "מרחקי הרכיבה". על פי סעיף ד הסדרה היא סדרה חשבונית בת 60 איברים ולכן ניתן לחשב את מרחק הרכיבה על פי נוסחת הסכום של הסדרה החשבונית.

$$S_{60} = \frac{m_1 + m_{60}}{2} \cdot 60 = \frac{200 \cdot 1 + 495 \cdot 1}{2} \cdot 60 = 20{,}850_{\text{מטר}}$$

($m_{60} = 1 \cdot 495$ על פי החישוב בסעיף ג)

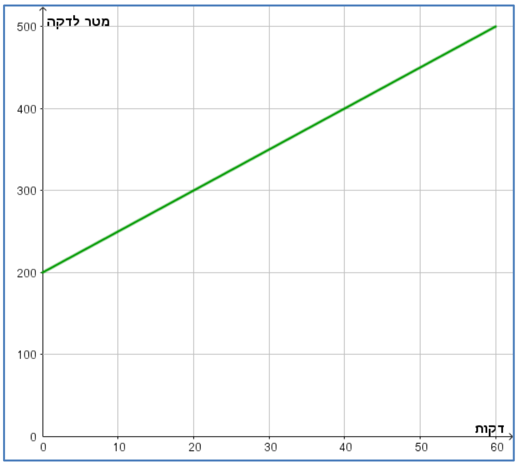
ה. סרטטו את הגרף של פונקציית מרחק הרכיבה המצטבר בהתאם לזמן.

אפשר לסרטט גרף סכמתי על סמך הידיעה שהמהירות הולכת וגדלה ולכן הגרף הולך ונהייה יותר תלול. ניתן להדגים באמצעות <u>היישומון</u>



4. מאמן כושר מתכנן אימון של שעה באופני כושר. בשאלה הקודמת עסקנו באימון שבו המהירות ההתחלתית היא 200 מטרים לדקה, מהירות הגלגלים גדלה בכל דקה בשיעור של 5 מטר לדקה ונשארת קבועה במשך דקה שלמה.

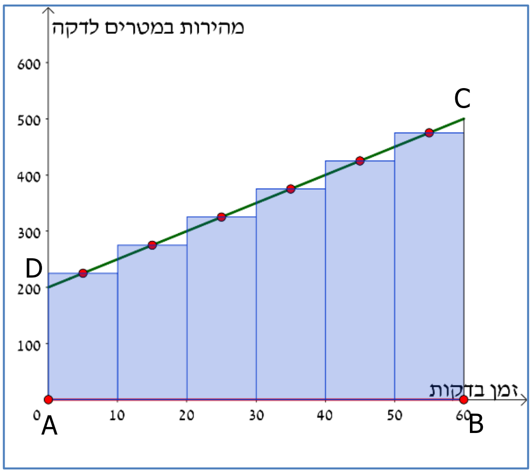
הפעם נעסוק בתוכנית אחרת שבה מתכנתים את אופני הכושר כך שהגדלת המהירות תתואר על ידי פונקציה קווית, כך שבתום שעה המהירות תהיה בדיוק 500 מטרים לדקה (ראו איור 1).



איור 1

כדי להעריך את מרחק הרכיבה במהלך האימון, נחלק תחילה את האימון ל- 6 פרקי זמן של 10 דקות.

לצורך חישוב אורך הדרך נתייחס אל מהירות המתאמן באמצע כל פרק זמן, כאילו רכב במהירות זו בקטע כולו.



איור 2

א. העריכו את מרחק הרכיבה באמצעות שטחי המלבנים. תוכלו להיעזר בחישוב סכום של סדרה חשבונית.

חשוב לוודא לאורך כל היחידה שהתלמידים מבינים מדוע שטח כל מלבן הוא אומדן למרחק הרכיבה בפרק הזמן המתאים.

נזכור שהמהירות ההתחלתית היא 200 מטר לדקה. המתאמן מגדיל את מהירותו בכל 10 דקות ב – 50 מטר לדקה. לכן עד אמצע פרק הזמן הראשון המהירות גדלה ב – 25 מטר לדקה. לכן: $v_1 = 225_{\text{מטר/דקה}}$, $v_6 = 475_{\text{מטר/דקה}}$

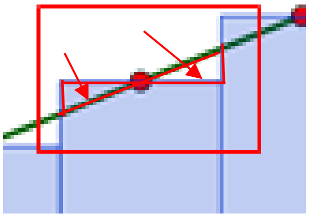
$\{m\}$ סדרת שטחי המלבנים:

$$m_1 = 225 \cdot 10 = 2250_{\text{מטר}}$$

$$m_6 = 475 \cdot 10 = 4750 \;_{\text{מטר}}$$

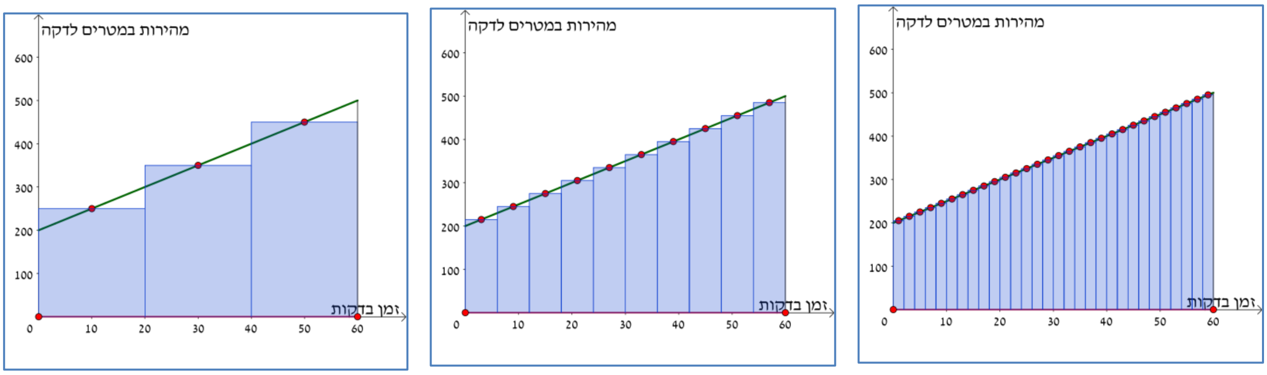
$$S_6 = \text{מרחק הרכיבה} = \frac{m_1 + m_6}{2} \cdot 6 = \frac{2250 + 4750}{2} \cdot 6 = 21{,}000_{\text{מטר}}$$

ב. הסבירו מדוע סכום שטחי המלבנים שווה בדיוק לשטח שבין גרף המהירות לבין ציר ה- x (שטח הטרפז $ABCD$). רמז: היעזרו בחפיפת המשולשים שבאיור המוגדל (איור 3).


איור 3

כפי שמוצג בסרטוט המשולשים ישרי הזווית המסומנים בחיצים חופפים (לשני המשולשים ניצב באורך זהה – 5 וזוויותיהם שוות). כיוון שהדבר נכון בכל אחד מ- 6 קטעי החלוקה, הרי שסכום כל שטחי המלבנים שווה לכל השטח שמתחת לגרף המהירות.

ג. האם תשתנה תשובתכם אם נעריך את מרחק הרכיבה באמצעות חלוקה למספר אחר של פרקי זמן? תוכלו להיעזר ביישומון.

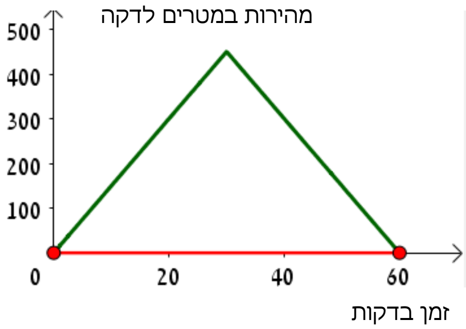


ההסבר בסעיף ב נכון לכל מספר של מלבנים ולכן התשובה לא תשתנה.
גם ביישומון ניתן לראות שלכל חלוקה ל – n פרקי זמן מרחק הרכיבה יהיה זהה – 21,000 מטר.
כאן יש מקום לדון בעובדה שניתן להקטין את רוחב המלבן ככל שנרצה, ובכך תתבסס אצל התלמיד אינטואיטיבית ההבנה שגם השטח מתחת לישר הרציף יהיה זהה.

משימה 5 עוסקת, גם היא, בפונקציית שינוי מרחק – כלומר פונקציית מהירות לינארית, אך כאן יש לסיפור הרכיבה שני חלקים: אחד במהירות עולה ואחד במהירות יורדת. משימה זו מכוונת להכרות עם תכונות של פונקציית ההצטברות, שיכוונו בהמשך לקשר בין גרף של נגזרת לגרף הפונקציה המקורית. התכונות אליהן מתייחסת המשימה:

- פונקציית המרחק הנצבר נבנית על פי השטח שמתחת לגרף המהירות.
- חיוביות/ שליליות של פונקציית המרחק הנצבר – פונקציית ההצטברות
- עליה של פונקציית ההצטברות
- תחומי קעירות למעלה/למטה ונקודת פיתול.

5. באימון אחר של שעה באופני כושר, האופניים מתוכנתים כך שבמחצית השעה הראשונה המהירות עולה ברציפות באופן ליניארי, ובמחצית השעה השנייה המהירות יורדת ברציפות באופן ליניארי (ראו איור).



א. ענו על פי הגרף: מהי המהירות המקסימלית אליה מגיעים באימון זה?

450 מטר לדקה.

כמו בשאלה הקודמת, בשביל להעריך את מרחק הרכיבה במהלך האימון, נחלק תחילה את האימון ל- 6 קטעים של 10 דקות כל אחד. לצורך חישוב המרחק הנצבר מתחילת הרכיבה נתייחס אל מהירות המתאמן באמצע כל קטע, כאילו רכב במהירות זו בקטע כולו.

ב. העריכו את מרחק הרכיבה באמצעות שטחי המלבנים.

משיקולי סימטריה נוכל לחשב את השטח של שלושת מלבנים השמאליים ולכפול ב- 2.

פונקציית המהירות בחלק העולה: $y = 15x$

באמצע פרק הזמן הראשון : $x = 5$ ולכן: $y = 75$

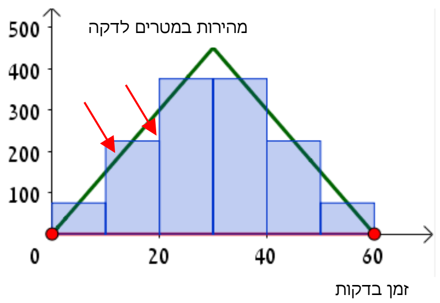
נוכל לבנות טבלה:

מספר המלבן	גובה המלבן	המרחק הנצבר שווה לשטח המלבן
1	$15 \cdot 5 = 75$	$75 \cdot 10 = 750$
2	$15 \cdot 15 = 225$	$225 \cdot 10 = 2250$
3	$15 \cdot 25 = 375$	$375 \cdot 10 = 3750$

סה"כ: 6750 מ'

סה"כ בששת פרקי הזמן: 13,500 מ' שהם 13.5 ק"מ.

ג. הסבירו מדוע סכום שטחי המלבנים שווה בדיוק לשטח שבין גרף פונקציית המהירות לבין ציר ה- x.



נשים לב שעדיין לא ביססנו את ההשערה שהמרחק המצטבר שווה לשטח שבין גרף המהירות לבין ציר ה- x. חישוב המרחק הנצבר נעשה באמצעות סכום שטחי המלבנים שכל אחד מבטא את המרחק הנצבר בפרק הזמן המתאים (זמן×מהירות).

בשאלה 4 סעיף ב הראינו באמצעות חפיפת משולשים שסכום שטחי המלבנים המשמשים לאומדן המרחק המצטבר שווה בדיוק לשטח שמתחת לגרף של פונקציית המהירות. אותו הסבר תקף גם כאן. המשולשים המסומנים בחיצים חופפים, ולכן נוכל להמיר את החישוב של סכום שטחי המלבנים בחישוב שטח המשולש כולו.

שטח המשולש: $\frac{60 \cdot 450}{2} = 13{,}500$ ומכאן שמרחק הרכיבה המצטבר הוא 13,500 מטרים שהם 13.5 ק"מ.

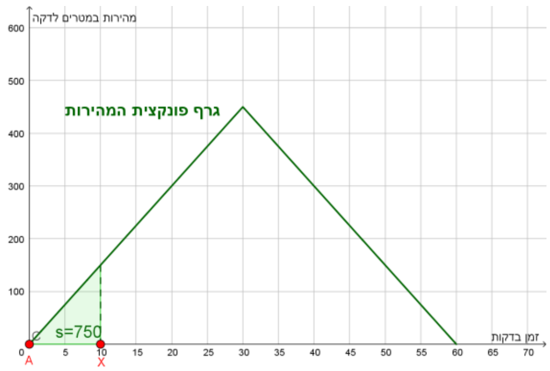
ד. האם תשובתכם תשתנה אם נחלק את האימון לפרקי זמן קטנים יותר? הסבירו. אפשר להיעזר בתשובה לשאלה 4 ואפשר להיעזר [ביישומון](#).

[ביישומון הבא](#) תוכלו לראות את מרחק הרכיבה המצטבר לאורך האימון.

ה. מדוע, לדעתכם, ביישומון זה המרחק הנצבר מוצג באמצעות השטח שבין גרף פונקציית המהירות לבין ציר ה-x מבלי להיעזר בשטחי מלבנים?

כפי שהראינו בשאלות קודמות באמצעות חפיפת משולשים, במקרה של פונקציית מהירות ליניארית השטח שמתחת לגרף הפונקציה שווה לסכום שטחי המלבנים וסכום שטחי המלבנים שווה למרחק הנצבר. (נשים לב שהשוויון מותנה בחלוקה למלבנים "שווי רוחב") הדבר נכון גם בפרק הזמן בו המהירות גדלה וגם בפרק הזמן בו המהירות קטנה.

ו. מהו מרחק הרכיבה המצטבר באימון זה ב- 30 הדקות הראשונות? בכל 60 הדקות? כיצד חישבתם? השוו את תוצאות החישוב שלכם עם התוצאות המתקבלות בעזרת **היישומון**.



את מרחק הרכיבה הנצבר נחשב באמצעות חישוב שטח המשולש בין גרף פונקציית המהירות וציר ה $-x$ בכל אחד מהמקרים:

ב- 30 הדקות הראשונות: $\frac{30\cdot 450}{2} = 6{,}750$

ב- 60 הדקות הראשונות: $\frac{60\cdot 450}{2} = 13{,}500$

ז. מה מרחק הרכיבה באימון זה לאחר 10 דקות? לאחר 20 דקות? לאחר 30 דקות? לאחר 40 דקות? לאחר 50 דקות?

שערו כיצד נראה הגרף של פונקציית מרחק הרכיבה המצטבר בהתאם לזמן. בדקו **ביישומון** והסבירו את ההבדל בין שני חלקי הרכיבה.

את מרחק הרכיבה הנצבר נחשב באמצעות חישוב שטחי משולשים וטרפזים שבין גרף פונקציית המהירות וציר ה $-x$. ניעזר בהצגה האלגברית של פונקציית המהירות :

$$y = \begin{cases} \frac{450}{30}x = 15x & 0 \le x \le 30 \\ -\frac{450}{30}x + 900 = -15x + 900 & 30 < x \le 60 \end{cases}$$

ב- 10 הדקות הראשונות: $\frac{10\cdot 150}{2} = 750$

ב- 20 הדקות הראשונות: $\frac{20\cdot 300}{2} = 3{,}000$

ב- 30 הדקות הראשונות: $\frac{30\cdot 450}{2} = 6{,}750$

ב- 40 הדקות הראשונות:

$$6750 + \frac{450+(-15\cdot 40+900)}{2}\cdot 10 = 6750 + 1500 = 8{,}250$$

ב- 50 הדקות הראשונות :

$$6{,}750+\frac{450+(-15\cdot 50+900)}{2}\cdot 20=6{,}750+6000=12{,}750$$

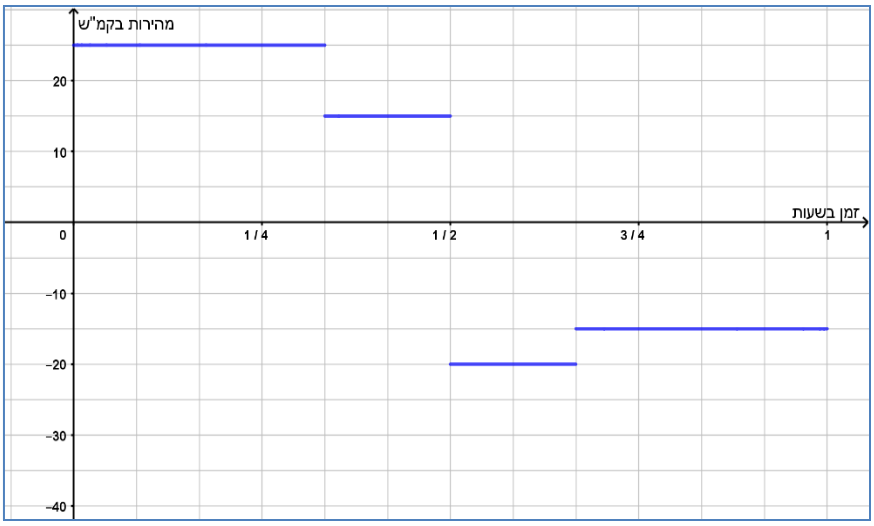
פונקציית מרחק הרכיבה הנצבר היא פונקציה חיובית כיוון שהמתאמן ממשיך ברכיבה לאורך כל הדרך ואינו חוזר לנקודת מוצאו.

הפונקציה עולה כיוון שהמתאמן צובר דרך לאורך כל זמן האימון.

האופניים מתוכנתים כך שבמחצית השעה הראשונה המהירות עולה ברציפות באופן ליניארי, ובמחצית השעה השנייה המהירות יורדת ברציפות באופן ליניארי לכן שיפועי פונקציית מרחק הרכיבה הולכים וגדלים במחצית השעה הראשונה והולכים וקטנים במחצית השעה השנייה. ניתן להציג לתלמיד, באמצעות היישומון, את נקודת הפיתול שנוצרת לאחר 30 דקות רכיבה ואת תכונת הקעירות כלפי מעלה במחצית הראשונה של האימון וקעירות כלפי מטה במחצית השניה של האימון.

במשימה 6 נבדוק מה המשמעות של פונקציית ההצטברות של המרחק כאשר בחלק מהזמן הרוכב מתרחק מנקודת המוצא ובחלק מהזמן מתקרב אליה. במקרה זה מהירות הרכיבה בכיוון האחד נחשבת חיובית ומהירות הרכיבה בכיוון המנוגד נחשבת שלילית.

6. אורן יצא מביתו לרכיבת בוקר בשביל אופניים במסלול ישר למשך שעה. בחלק מהרכיבה הוא מתרחק מביתו ובחלק אחר הוא חוזר לכיוון ביתו.
גרף הפונקציה $f(x)$ מתאר את מהירות הרכיבה של אורן בהתאם לזמן. מהירות שלילית פירושה התקדמות בכיוון מנוגד לכיוון הרכיבה כאשר המהירות חיובית.



א. מהו **המרחק שעובר אורן** בכל אחד מקטעי הרכיבה?

המרחק בכל אחד מקטעי הרכיבה יחושב באמצעות הנוסחה |מהירות| · זמן = דרך,

או על ידי חישוב שטח המלבן הנוצר בין פונקציית המהירות וציר ה – x .

ניתן לראות בגרף ששעת הרכיבה מחולקת ל-12 חלקים.

המקטע הראשון הוא של $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$ הדקות (שליש) שעה. אורך הדרך: $25\cdot\frac{1}{3}=8\frac{1}{3}$ קמ"ק

ב- $\frac{1}{6}$ השעה הבאה: $15\cdot\frac{1}{6}=2.5$ קמ"ק

ב- $\frac{1}{6}$ השעה הבאה: $20\cdot\frac{1}{6}=3\frac{1}{3}$ קמ"ק

ב- $\frac{1}{3}$ האחרון של השעה $15\cdot\frac{1}{3}=5$ קמ"ק

ב. מה המרחק של אורן מביתו לאחר 20 דקות? 30 דקות? 40 דקות?

20 דקות הן $\frac{1}{3}$ שעה. לאחר $\frac{1}{3}$ שעה המרחק של אורן מביתו הוא: $8\frac{1}{3}$ קמ"ק

30 דקות הן $\frac{1}{2}$ שעה. המרחק של אורן מביתו לאחר $\frac{1}{2}$ שעה הוא: $8\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}=10\frac{5}{6}$ קמ"ק

כדי לחשב את המרחק של אורן מביתו לאחר 40 דקות צריך להתחשב גם בכיוון הנסיעה.

40 דקות הן $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ שעה. לפי הגרף ב- $\frac{2}{12}$ שעה (כלומר 10 דקות) האחרונה של הדרך אורן חוזר לכיוון ביתו. לכן המרחק שלו מהבית הוא: $10\frac{5}{6}-3\frac{1}{3}=7\frac{1}{2}$ קמ"ק

ג. מה המרחק של אורן מביתו בסיום הרכיבה (לאחר 60 דקות)?

$$8\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}-3\frac{1}{3}-5=2\frac{1}{2}\text{ קמ"ק}$$

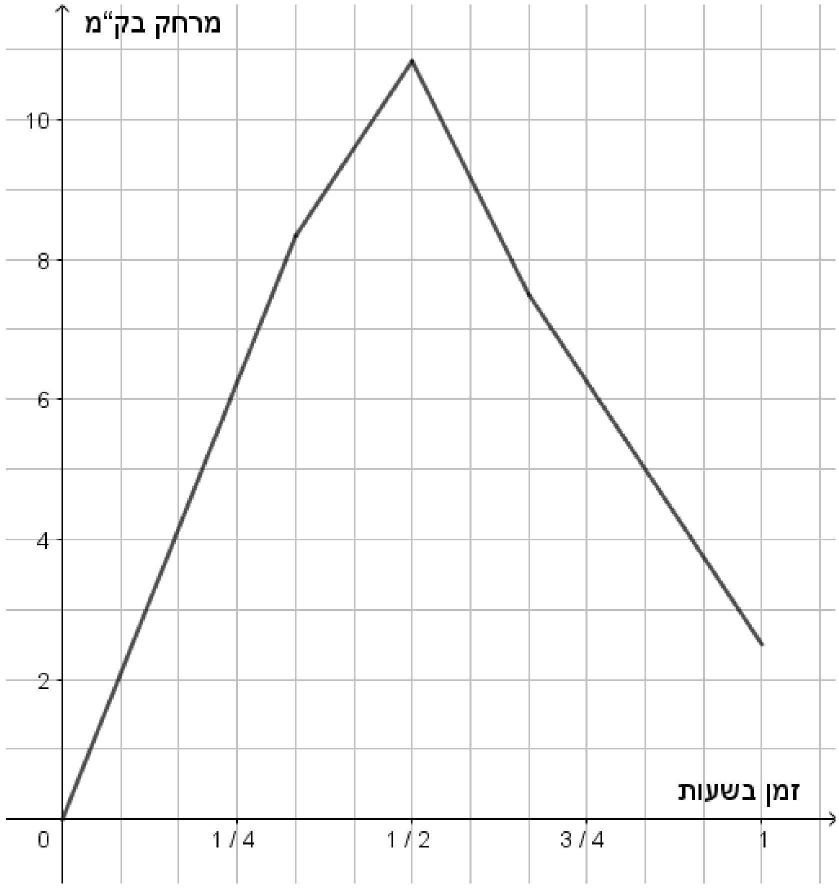
ד. מהו אורך הדרך שאורן עבר בכל הרכיבה? ממה נובע ההבדל שבין התשובה לסעיף זה לבין התשובה לסעיף הקודם.

אורך הדרך שאורן עבר הוא סכום כל הדרכים בפרקי הזמן השונים.

$$8\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}+5=19\frac{1}{6}\text{ קמ"ק}$$

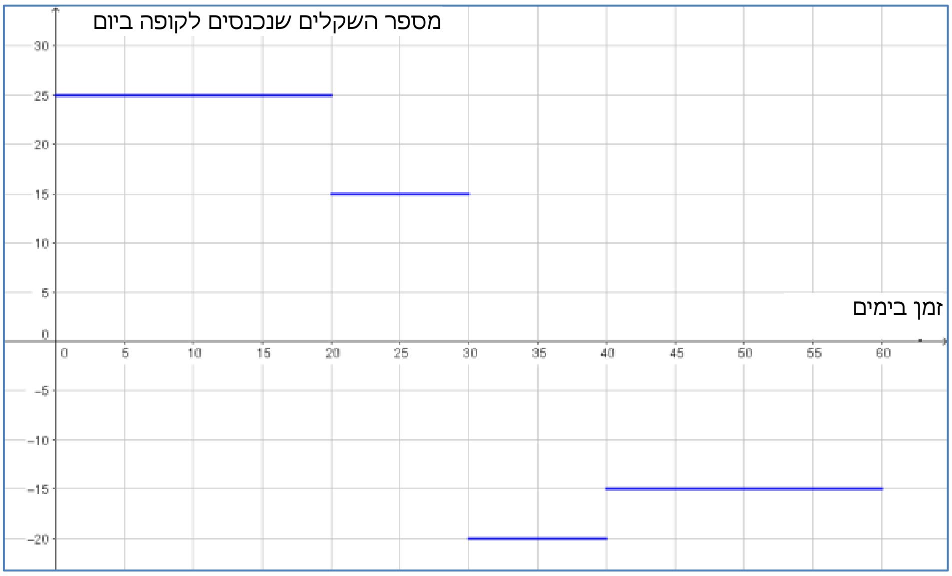
כאן המקום להבהיר את ההבדל בין המושגים אורך הדרך – שהוא גודל חיובי, ובמקרה של אורן $19\frac{1}{6}$ ק"מ לבין המרחק מנקודת היציאה – גודל התלוי בכיוון המהירות ויכול להיות חיובי או שלילי ובמקרה של אורן $2\frac{1}{2}$ ק"מ.

ה. סרטטו את גרף המרחק של אורן מביתו כפונקציה של הזמן.



7. אורי עובד במלצרות ומקבל את התשלום היומי. במהלך כל יום הוא רוכש מזון, לעיתים הולך לסרט, או בילויים אחרים. בסוף כל יום הוא מפקיד את הכסף בקופה. אם הוא נדרש לכך, הוא לוקח כסף מהקופה במהלך היום.

הגרף מתאר את התזרים היומי בקופה של אורי לאורך שישים יום, כלומר: ציר ה- y מתאר את מספר השקלים שאורי הכניס לקופה ביום אחד. במילים אחרות: ציר ה- y מתאר את מהירות הזרמת הכסף לקופה. הניחו כי בתחילת התקופה הקופה היתה ריקה.



א. הסבירו את הגרף: מה מתארים קטעים שנמצאים מעל ציר ה- x? מה מתארים קטעים שנמצאים מתחת לציר ה- x?

הקטעים מעל הציר מתארים ימים בהם הסתכמה הפעילות היומית של אורי בהכנסת כסף לקופה. הקטעים מתחת לציר מתארים ימים בהם התסתכמה הפעילות היומים של אורי בהוצאת כסף מהקופה.

ב. מהו הסכום שנצבר בקופה של אורי בעשרים הימים הראשונים?

$$20 \cdot 25 = 500_{\text{שקלים}}$$

ג. מהו הסכום שנצבר בקופה בשלושים הימים הראשונים?

$$20 \cdot 25 + 10 \cdot 15 = 650_{\text{שקלים}}$$

ד. מה התרחש בין היום השלושים ואחד ליום הארבעים? מהו הסכום שנשאר בקופה?

אורי הוציא בכל יום 20 שקלים מהקופה. בקופה נשארו: $650 - 20 \cdot 10 = 450_{\text{שקלים}}$

ה. מהו הסכום שנצבר בקופה או יצא ממנה בכל אחד מחלקי התקופה, כפי שמראה הגרף?

ב – 20 הימים הראשונים נצברו 500 שקלים;

בין הימים 21 ל – 30 נצברו 150 שקלים;

בין הימים 31 ל – 40 הוצאו מהקופה 200 שקלים;

בין הימים 41 ל – 60 הוצאו מהקופה 300 שקלים.

ו. מהו הסכום שהיה בקופה לאחר 20 יום? 30 יום? 40 יום? לאחר 60 יום?

לאחר 20 יום הסכום שנצבר בקופה היה 500 שקלים

לאחר 30 יום הסכום שנצבר בקופה היה 650 שקלים

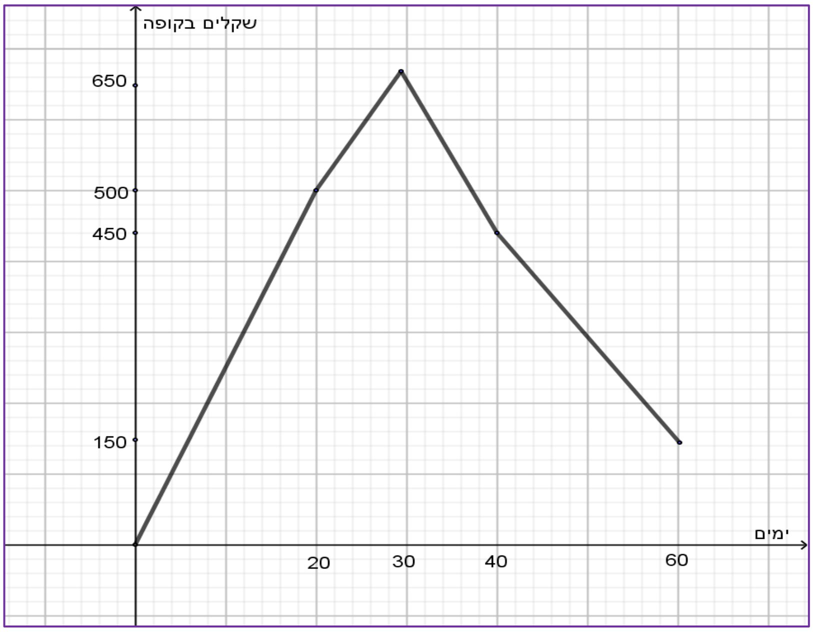
לאחר 40 יום הסכום שנצבר בקופה היה 450 שקלים

ביום ה - 60 הסכום שנצבר בקופה היה 150 שקלים

ז. מהו הסכום שנמצא בקופה בסיום התקופה?

ביום ה - 60 הסכום שנצבר בקופה היה 150 שקלים

ח. סרטטו את הגרף המתאר את סכום הכסף שנמצא בקופה כפונקציה של הזמן.



פונקציית ההצטברות – המקרה הכללי

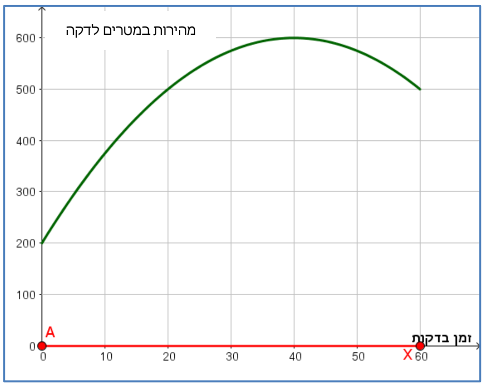
תוכנית אימון על פי הגרף

במשימות אלו נחזור אל אימון הרכיבה ונעריך את מרחק הרכיבה שבאימון כולו באמצעות חלוקת זמן האימון למקטעים, ונחשב את מרחק הרכיבה בכל מקטע בנפרד. בתהליך שנבצע אנו נקטין את האורך של כל מקטע ונגדיל את מספר המקטעים, באופן זה נוכל לשפר את הדיוק בהערכת המרחק.

ביחידה זו, בשונה מהיחידה הקודמת, אין פרקי זמן בהם הרכיבה היא במהירות קבועה, יותר מכך: השינוי במהירות אינו קווי. לכן, אין לנו דרך לחשב את מרחק הרכיבה המצטבר באמצעות חישוב ישיר של מהירות כפול זמן (שמיוצג על ידי שטח של מלבן).

ההבדל בין מצב זה לבין המצב בו גרף המהירות הוא ליניארי (קבוע או לא) נעוץ בעובדה שבמקרה הליניארי הבנו שהשטח מתחת לגרף המהירות השווה בדיוק לסכום שטחי המלבנים המייצגים את המרחק המצטבר, הוא בדיוק גודל המרחק המצטבר מתחילת הרכיבה. ידענו לחשב את סכום שטחי המלבנים שמייצג את המרחק המצטבר וכן היתה לנו אפשרות לחשב באופן ישיר את השטח בעזרת נוסחאות גיאומטריות, גם בלי חלוקה למלבנים קטנים. כאשר גרף המהירות אינו קווי, נוכל לספק הערכה לשטח – המייצג את המרחק המצטבר, על ידי קירוב. אנו **נאמוד** את המרחק המצטבר באמצעות סכום שטחי מלבנים, וככל שנעשה זאת באמצעות מלבנים צרים יותר, כך יגדל הדיוק ויתקרב למרחק המצטבר האמיתי.

1. מאמן כושר טוען שאימון מיטבי של שעה באופני כושר אמור להתנהל כאשר מהירות האופניים מתוכננת לפי הגרף הבא:



א. מה ניתן לומר על המהירות? האם היא קבועה או משתנה? כיצד? נמקו.

המהירות משתנה וקצב שינוי המהירות אינו קבוע. ניתן לראות שהמהירות ההתחלתית היא 200 מטר לדקה ואז המהירות עולה, אך קצב השתנותה הולך ויורד ובדקה ה- 40 מתחילה המהירות לרדת.

ב. מה ניתן לומר על מרחק הרכיבה של רוכב האופניים? האם כאשר המהירות קטנה גם אורך הדרך קטן?

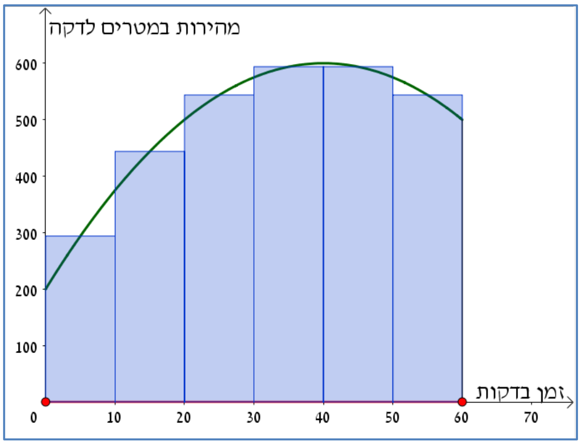
כל עוד רוכב האופניים בנסיעה, המרחק הנצבר גדל, שאת כיוון שהמהירות של רוכב האופניים חיובית. כאשר המהירות חיובית הכוונה היא שהנסיעה היא בכיוון אחד ביחס לנקודת היציאה.

כאשר מהירות האופניים קטנה המרחק הנצבר עדיין גדל אך קצב הצבירה שלו קטן יותר.

ג. נסו להעריך את מרחק הרכיבה הכולל לפי תוכנית זו.

ניתן להעריך אורך הדרך הכולל על פי שטחי המלבנים הנמצאים מתחת לגרף המהירות. על פי המשבצות בגרף ניתן לתת הערכה מקורבת.

2. בכדי לקבוע את המרחק הנצבר ברכיבה כולה נרצה שוב לחלק את מהלך הרכיבה לפרקי זמן שווים, ובכל אחד מהם נבצע הערכה נפרדת.



נחקור בעזרת **היישומון** הבא את חישוב מרחק הרכיבה, בחלוקות שונות של זמן הרכיבה לפרקי זמן שווים.

א. בחלוקה ל- 6 פרקי זמן של 10 דקות כל אחד, נאמוד את מרחק הרכיבה בכל אחד מפרקי הזמן באמצעות מהירות הרכיבה באמצע פרק זמן זה (ראו איור).

(1) הסבירו כיצד לדעתכם נבנו המלבנים בכל מקטע.

כל מלבן נבנה כך שרוחבו 10 יחידות (המייצגות דקות) וגובהו הוא ערך פונקציית המהירות באמצע כל קטע.

גובהי המלבן נקבעים על ידי שיעור ה – y בגרף בנקודות $x = 5, 15, 25, 35, 45, 55$

(2) מה הקשר בין שטח המלבן לבין אומדן המרחק הנצבר בפרק הזמן המתאים? הסבירו.

שטח המלבן הוא בקירוב מרחק הרכיבה שנצבר תוך כדי תנועה באותה מהירות. ככל שרוחב המלבן קטן יותר, מרחק הרכיבה יתקרב יותר למרחק האמיתי.

(3) חשבו את השטח של כל אחד משׁשׁת המלבנים. כיצד חישבתם?

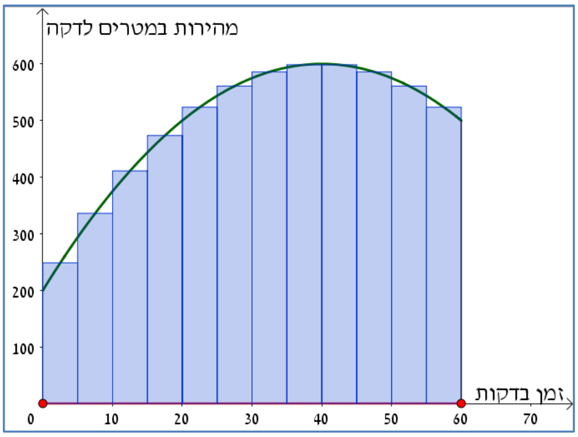
את גובה המלבן באמצע כל קטע נמצא על פי הגרף.

מספר המלבן	גובה המלבן	שטח המלבן
1	300	$300 \cdot 10 = 3000$ מ"ר
2	450	$450 \cdot 10 = 4500$ מ"ר
3	550	$550 \cdot 10 = 5500$ מ"ר
4	600	$600 \cdot 10 = 6000$ מ"ר
5	600	$600 \cdot 10 = 6000$ מ"ר
6	550	$550 \cdot 10 = 5500$ מ"ר
סכום השטחים		30,500 מ"ר

(4) מה מרחק הרכיבה הכולל בהערכה זו?

על פי סכום השטחים בטבלה מתקבל האומדן – 30,500 מטר

(5) השוו באמצעות **היישומון** את מרחק הרכיבה הכולל שקיבלתם בתשובתכם לסעיף (4) לשטח שבין העקום לציר ה- x.



על פי היישומון השטח מתחת לגרף הוא 30,000 מטרים.

לעומת 30,500 מטר שהתקבלו בסעיף 4 בחלוקה ל - 6 מלבנים.

ב. רוכב האופניים בדק את המהירות כל 5 דקות (חלוקה ל-12 מקטעים), ולפיה חישב את מרחק הרכיבה.

מה מרחק הרכיבה הכולל בהערכה זו?

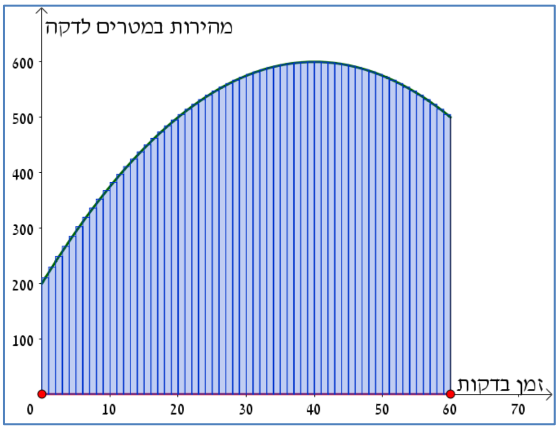
נשים לב שאומדן המרחק מתקבל תמיד כסכום שטחי המלבנים.

מרחק הרכיבה בחלוקה ל – 12 קטעים הוא 30,031.25 מטר.

השוו את המרחק שקיבלתם לשטח שבין העקום לציר ה- x, כפי שהוא מופיע ביישומון.

ג. רוכב האופניים בדק את המהירות כל 1 דקה (חלוקה ל-60 מקטעים).

תארו כיצד ניתן להעריך את מרחק הרכיבה הכולל?



ניתן להעריך את אורך הדרך הכולל על פי סכום שטחי 60 המלבנים. עלינו לחשב את שטח של 60 מלבנים כך שרוחב כל מלבן הוא יחידה אחת (המייצגת דקה אחת) ואת גובהו נקבע על פי ערך הפונקציה המתאים, אותו נקרא מן הגרף. כלומר:

$$S_{60} = f(0)\cdot 1 + f(1)\cdot 1 + \cdots. + f(60)$$

מהחקירה בסעיפים הקודמים ברור כי ככל שנקטין את הרוחב של כל מלבן, סכום שטחי המלבנים יהיה קרוב יותר לשטח שמתחת לגרף.

על פי היישומון סכום שטחי 60 המלבנים יהיה 30,001.25 מ"ר כאשר השטח מתחת לעקומה הוא 30,000 מ"ר.

אנחנו רואים שככל שהחלוקה למלבנים יותר עדינה כך סכום שטחי המלבנים קרוב יותר לשטח שבין גרף הפונקציה לבין ציר ה-x בקטע המתאים.