

Formulaire de mathématiques

5 unités

Nouveau programme

Algèbre

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Les racines : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Suites :

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Réurrence :	$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases}$	$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$
n ^{ème} terme :	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Somme :	$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ $S_n = \frac{n[2a_1 + (n - 1)d]}{2}$	$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad q \neq 1$ Somme d'une suite infinie dont la somme est convergente : $S = \frac{a_1}{1 - q}$

Puissances : ($a \neq 0$, $b \neq 0$)

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$	$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a > 0$	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	

Logarithmes (selon les contraintes du domaine de définition) :

$\log_a(a^b) = b$	$a^{\log_a x} = x$	$\log_a(x^b) = b \cdot \log_a x$
$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$	$\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$	$\log_c x = \frac{\log_a x}{\log_a c}$

Croissance et décroissance : la quantité après t unités de temps : $f(t) = f(0) \cdot q^t$ lorsque q est le taux de croissance/décroissance par unité de temps t .

Probabilité

Probabilité conditionnelle : $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Loi de Bernoulli – la probabilité de k succès sur n essais dans une distribution binomiale lorsque la probabilité de succès est p :

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Trigonométrie et Géométrie

Identités :

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Loi des sinus : $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

(R est le rayon du cercle dans lequel le triangle est inscrit)

Loi des cosinus : $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \gamma$

(γ est l'angle formé par les côtés a et b)

Aire d'un triangle : $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$

(α est l'angle formé par les côtés b et c)

$$S = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \cdot \sin(\beta + \gamma)}$$

(β et γ sont les angles adjacents au côté a)

Aire d'un disque : $S = \pi \cdot R^2$

Périmètre d'un cercle : $P = 2\pi \cdot R$ (R est le rayon)

Longueur d'un arc de α radians : $\ell = \alpha \cdot R$

Aire d'un secteur de α radians : $S = \frac{1}{2} \alpha \cdot R^2$
(R est le rayon)

Calcul différentiel et intégral

Dérivées :

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(x^t)' = t \cdot x^{t-1}$ (t est un nombre réel)
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	

Dérivée d'un produit de fonctions :

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Dérivée d'un quotient de fonctions :

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Dérivée d'une fonction composée :

$$[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$$

$u'(x)$ est la dérivée de u par rapport à x (dérivée interne)

et $f'(u)$ est la dérivée de f par rapport à u (dérivée externe)

Intégrales :

$\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + C \quad (t \neq -1, t \text{ réel})$	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

Si $F(x)$ est une fonction primitive de la fonction $f(x)$ alors : $\int f(mx + b) dx = \frac{1}{m} F(mx + b) + C \quad (m \neq 0)$

$$\int f[u(x)] \cdot u'(x) dx = F[u(x)] + C$$

Géométrie analytique

Droite :

Coefficient directeur m d'une droite passant par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \neq x_2)$

Équation d'une droite de coefficient directeur m , passant par le point (x_1, y_1) : $y - y_1 = m(x - x_1)$

Coordonnées du point C , partageant (intérieurement) le segment, dont les extrémités sont $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, selon le rapport $\frac{AC}{BC} = \frac{k}{\ell}$: $\left(\frac{\ell x_1 + k x_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + k y_2}{k + \ell} \right)$

Deux droites, de coefficients directeurs m_1, m_2 sont perpendiculaires entre elles si et seulement si :

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Distance d entre les points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Distance d entre le point (x_0, y_0) et la droite $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Distance d entre les droites parallèles $Ax + By + C_1 = 0$ et $Ax + By + C_2 = 0$: $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Cercle :

Équation de la tangente au cercle $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ au point (x_0, y_0)

situé sur le cercle :

$$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$$

Parabole :

Équation de la tangente à la parabole $y^2 = 2px$ au point (x_0, y_0) situé

sur la parabole :

$$y \cdot y_0 = p(x + x_0)$$

Directrice de la parabole d'équation $y^2 = 2px$:

$$x = -\frac{p}{2}$$

Foyer de la parabole d'équation $y^2 = 2px$:

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$$

	Équation	Distance entre le foyer et l'origine	
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	
Hyperbole	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	Équations des asymptotes de l'hyperbole : $y = \pm \frac{b}{a}x$

Nombres complexes

Produit des nombres complexes de forme polaire $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Formule de Moivre :

$$[R(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = R^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Solutions de l'équation $z^n = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$:

$$z_k = \sqrt[n]{R} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right]$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Solides dans l'espace

Prisme et cylindre : Volume : $V = B \cdot h$ (B est l'aire de la base, h est la hauteur du solide)

Pyramide et cône : Volume : $V = \frac{B \cdot h}{3}$ (B est l'aire de la base, h est la hauteur du solide)

Cône droit : Aire latérale : $M = \pi R \ell$ (R est le rayon du cercle, ℓ est la génératrice)

Sphère : Volume : $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ (R est le rayon de la sphère)

Aire totale : $M = 4\pi R^2$ (R est le rayon de la sphère)

Vecteurs

Longueur d'un vecteur $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$:

$$|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Produit scalaire des deux vecteurs $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Produit scalaire lorsque α est l'angle formé par les vecteurs $\underline{u}$ et $\underline{v}$:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$$

Distance entre le point $P(x_1, y_1, z_1)$ et le plan $ax + by + cz + d = 0$:

$$\frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distance entre les plans parallèles $ax + by + cz + d_1 = 0$ et $ax + by + cz + d_2 = 0$:

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Angle β formé par la droite $\underline{x} = \underline{v} + t \cdot \underline{u}$ et le plan $ax + by + cz + d = 0$,

lorsque $\underline{n} = (a, b, c)$:

$$\sin \beta = \frac{|\underline{n} \cdot \underline{u}|}{|\underline{n}| \cdot |\underline{u}|}$$

Angle α formé par les plans $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ lorsque $\underline{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$
 $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ lorsque $\underline{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$

$$\cos \alpha = \frac{|\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2|}{|\underline{n}_1| \cdot |\underline{n}_2|}$$