

תכנון לינארי

מהדורה אינטרנטית מעודכנת 2016



המחלקה להוראת המדעים

אין להפיץ, לשכפל, להעתיק, למכור, לשדר, לפרסם, או לאפשר לאחרים לעשות כן בכל דרך אחרת בתכנים
נשוא תקליטור/אתר זה לרבות באתרי אינטרנט אחרים, בפרסומים אלקטרוניים, בפרסומים מודפסים
וכדומה, לכל מטרה בין שהיא מסחרית ובין שאינה מסחרית שאינה לצורך שימוש אישי ופרטי, אלא אם
ניתנה רשות כתובה וחתומה לכך בכתב על ידי המחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן למדע.

© כל הזכויות שמורות

מכון ויצמן למדע ולמשרד החינוך

אדר א תשע"ו

מרץ 2016

חובר על-ידי:

יוני עמיר

נורית הדס

ייעוץ:

אברהם הרכבי

מקסים ברוקהיימר

מיכאל קורן

עריכה לשונית:

נגה ואן דורמולן - אברהמי

הדפסה ועריכה במחשב:

אבי טל

שרטוטים ועיצוב גרפי:

זיו אריאלי

בחוברת זו תינתן לכם ההזדמנות להרחיב חלק מהנושאים שנלמדו בהנדסה אנליטית. תעברו ממשוואות ישרים לאי-שוויונים ותיאורם הגרפי. בעזרת הכלים האלה תוכלו לפתור בעיות כלכליות. אנו מקווים שהלימוד יהיה מעניין ומהנה.

תודתנו לכיתה י"א תשנ"ב בבית-הספר אורט תל נוף, לכיתה י' תשנ"ג בבית-הספר המקיף ברנר, ולכיתה י"א תשנ"ג בבית-הספר עמל א' רמלה, על שיתוף הפעולה שגילו בעת לימוד מהדורות הניסוי.

7	נגיעה קלה בכלכלה
9	בין מקבילים
17	"הפרד ומשול" במישור
21	שרטוט ישרים (חזרה)
23	עוד על הפרדה במישור
29	"טובים השניים מן האחד"
37	קוד לחישוב קדקוד
40	התחום האפשרי
44	"אל המטרה"
48	"על הגובה"
52	"אל הקודקוד"
57	"חלוצים ואילוצים" - שאלות לסיכום
60	מי ירוויח יותר? עוד שאלות לסיכום
63	ארגון נתונים בתכנון לינארי
70	"הכל פתוח"...
73	ומה אם מתעניינים רק בנקודות שלמות?
75	בעיות שלמות

ביאור סמלים

תרגיל "מפתח"



עבודה עצמית



מחשבון



תרגיל אתגר



סיכום

הכנה



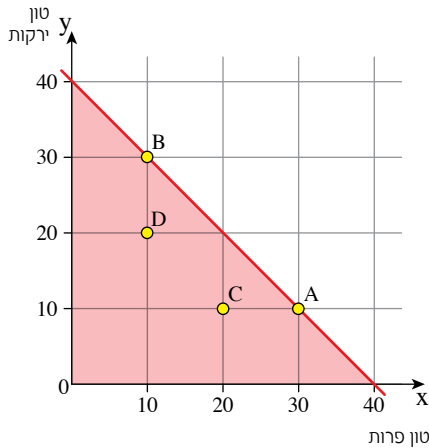
נגיעה קלה בכלכלה



1. מטוסי תובלה מובילים ירקות ופירות. מנהל חברת "שחף" נתן למנהל הייצור דף ובו הגרף הבא. השטח הצבוע מתאר את כל המשלוחים האפשריים. עזור לו לפענח את הגרף.

א. כמה טון פירות וכמה טון ירקות יש לשלוח, אם המשלוח הוא:

- לפי הנקודה A?
- לפי הנקודה B?
- לפי הנקודה C?
- לפי הנקודה D?



ב. סמנו נקודות המתארות הובלה של: 30 טון פירות ו-5 טון ירקות, 20 טון פירות ו-20 טון ירקות, 20 טון פירות, ללא ירקות.

ג. האם אפשר לשלוח 30 טון פירות ו-20 טון ירקות? נמקו.

ד. היכן נמצאות כל הנקודות, המתארות משלוח של ירקות בלבד?

ה. היכן נמצאות נקודות, המתארות משלוח של פירות בלבד?

ו. אם המשלוח הוא על-פי נקודה C, האם לדעתכם יש עוד מקום בטיסה?

ז. רשמו שיעורים של שלוש נקודות, המתארות מטוס מלא.

ח. היכן בתחום המשורטט ימצאו המשלוחים הנ"ל? נמקו!

ט. האם ניתן לשלוח 50 טון של פירות וירקות ביחד?

המשך ←

י. ידוע שהרווח ממשלוח טון אחד של פירות הוא 700 ש"ח ומטון אחד של ירקות 500 ש"ח.

יא. מה יהיה הרווח:

- לפי הנקודה A?
- לפי הנקודה B?
- לפי הנקודה C?
- לפי הנקודה D?

יב. באיזה מקרה מהמקרים שחישבתם, הרווח של החברה יהיה הגדול ביותר?

יג. סמנו במערכת הצירים נקודה, המייצגת רווח גדול יותר מאלה שמצאנו עד כה.

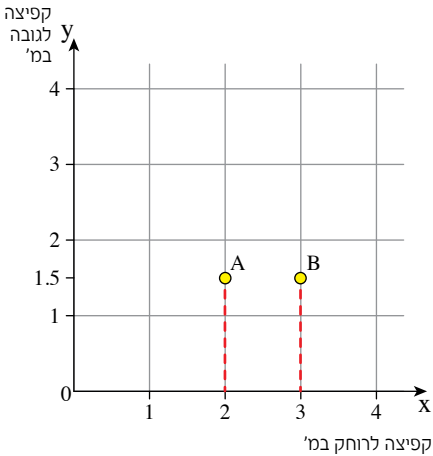
בהמשך הפרק תלמדו לפתור בעיות מן הסוג הזה, ותחפשו בשאלות מורכבות את הרווח הגדול ביותר.

יד. נסו למצוא בגרף נקודה המייצגת את הרווח הגדול ביותר.

בין מקבילים



1. ביום ספורט נרשמו תוצאות של תחרויות בקפיצה לרוחק ולגובה.
המורה לספורט תיאר את התוצאות באמצעות **נקודות**, במערכת צירים.
אחת הטיטות שלו התגלגלה לידי התלמידים.
ההישגים של דן מיוצגים על-ידי הנקודה A ושל שירה על ידי B.

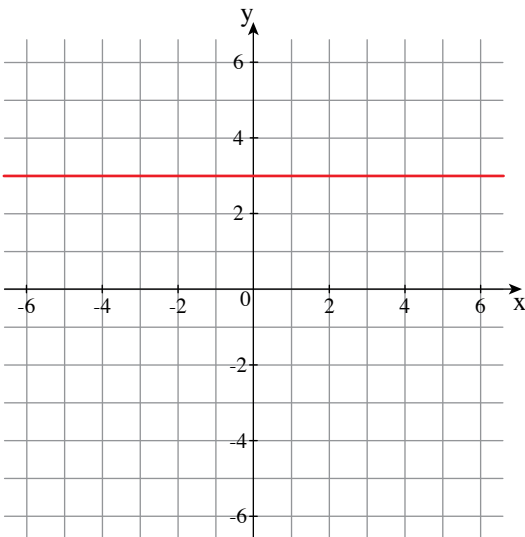


- א. מה ההישגים של דן ושירה בכל אחת מהקפיצות?
- ב. רשמו וסמנו נקודות נוספות, המתאימות לתלמידים שקפצו **לגובה** כמו דן ושירה.
- ג. מהי **משוואת הישר**, העובר דרך הנקודות A, B?
- ד. אילו תוצאות מיוצגות על-ידי הנקודות על הישר AB?

2. א. רשמו את משוואת הישר המשוורט.



- ב. סמנו ורשמו שיעורים של ארבע נקודות, ששיעור y שלהן גדול מ-3.
- ג. צבעו את כל האזור המתאים לנקודות, ששיעור y שלהן **גדול** מ-3.

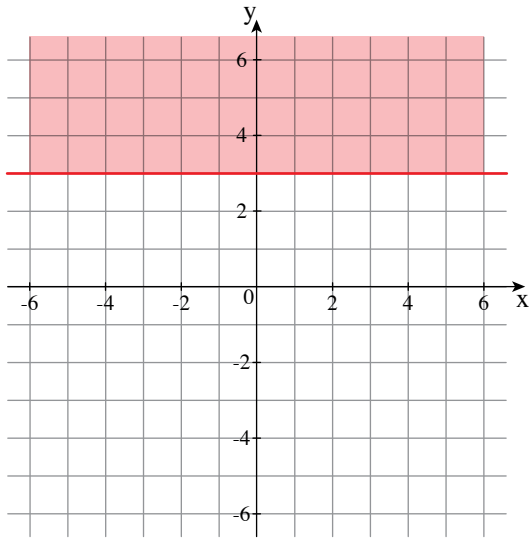


אי השוויון המתאים לאזור הצבוע, כולל הישר, הוא $y \geq 3$.



3. א. מהי משוואת הישר בגבול האזור הצבוע?

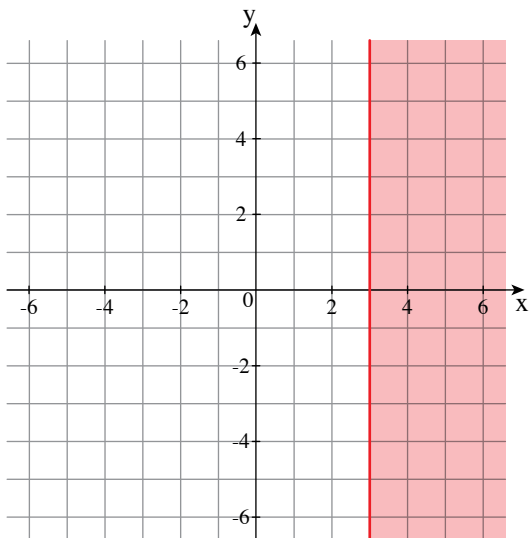
ב. נסו לאפיין בעזרת אי שוויון מתאים את האזור הצבוע.



כשמדובר ב"אזור צבוע", הכוונה לאזור כולל הישר שבגבולו, ולכן סימני האי-שוויון המתאימים הם $\leq$ או $\geq$.

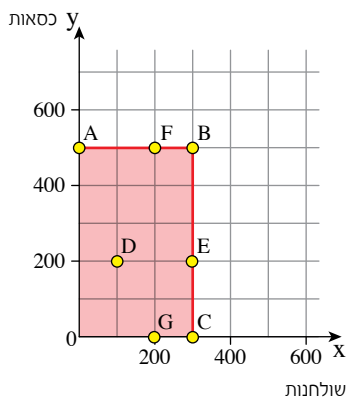
4. א. מהי משוואת הישר בגבול האזור הצבוע?

ב. רשמו אי שוויון מתאים לאזור הצבוע.



5. א. סמנו במערכת צירים נקודות, ששיעור x שלהן 5, ורשמו את משוואת הישר העובר דרכן.

ב. צבעו את האזור בו נמצאות כל הנקודות, ששיעור x שלהן קטן מ-5. רשמו אי-שוויון מתאים לאזור הצבוע.



6. יצרן מייצר שולחנות וכיסאות. אפשרויות הייצור השבועי מתוארות בשרטוט.



א. כמה שולחנות וכמה כיסאות מייצרים, אם הייצור השבועי הוא:

לפי הנקודה A?

לפי הנקודה B?

לפי הנקודה C?

לפי הנקודה D?

לפי הנקודה E?

ב. סמנו נקודה המתארת ייצור של 100 שולחנות בלבד.

ג. היכן נמצאות הנקודות, המתארות ייצור של שולחנות בלבד?

ד. היכן נמצאות הנקודות, המתארות ייצור של כיסאות בלבד?

ה. ידוע שהרווח ממכירת שולחן 50 ש"ח, וממכירת כיסא 30 ש"ח.

מהו הרווח ממכירה של: 200 שולחנות ו-300 כיסאות?

150 שולחנות ו-100 כיסאות?

300 שולחנות בלבד?

200 כיסאות בלבד?

ו. האם ניתן לייצר **רק** כיסאות ולהרוויח לפחות 17,000 ש"ח? נמקד?

ז. כמה שולחנות וכמה כיסאות אפשר לייצר, לפי המגבלות, ולקבל רווח מקסימלי?

ח. מהי משוואת הישר AB?

ט. רשמו אי-שוויון מתאים לנקודות מתחת לישר AB.

י. רשמו אי-שוויון מתאים לנקודות משמאל לישר BC.

יא. נסו להסביר מה מתאר האזור הצבוע.

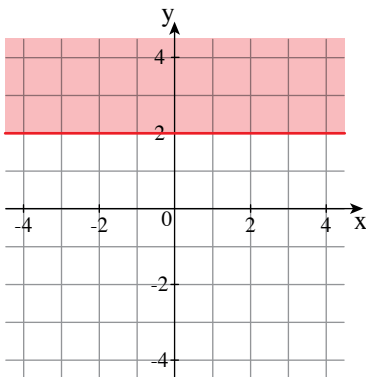


7. א. שרטטו ישר מתאים לנקודות, ששיעור x שלהן שווה ל-2.
ב. צבעו את האזור בו נמצאות כל הנקודות, ששיעור x שלהן גדול מ-2.
ג. רשמו אי-שוויון מתאים.

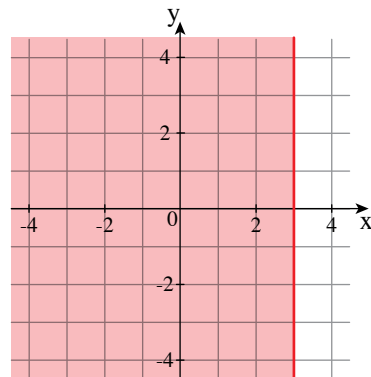
בסעיף זה למדתם לתאר אי שוויונות בצורות שונות,

דוגמה

לאוסף הנקודות, ששיעור y שלהן גדול או שווה ל-2, מתאים האי-שוויון $y \geq 2$ והגרף:



לאוסף הנקודות, ששיעור x שלהן קטן או שווה ל-3, מתאים האי-שוויון $x \leq 3$ והגרף:

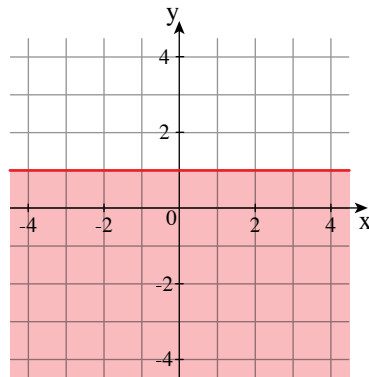


כמו כן ראינו, שכדי לשרטט גרף של אי-שוויון, שהישר בגבולו מקביל לאחד הצירים, יש לשרטט תחילה את הישר.

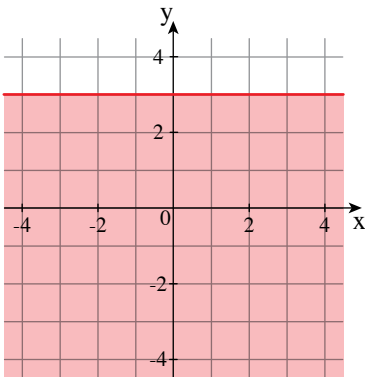
8. רשמו את משוואת הישר המודגש.

רשמו את האי-השוויון המתאים לאזור הצבע.

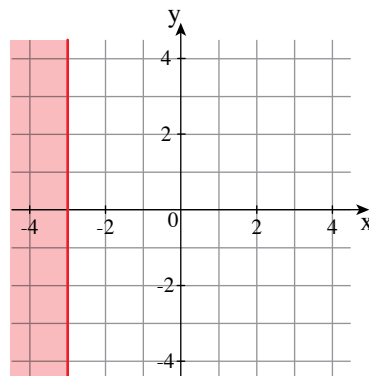
א.



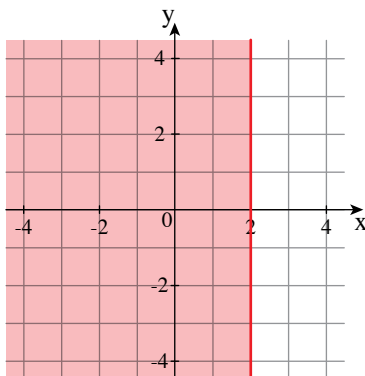
ב.



ג.

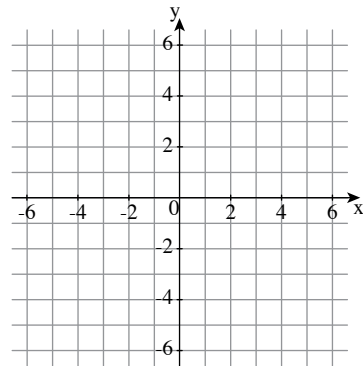
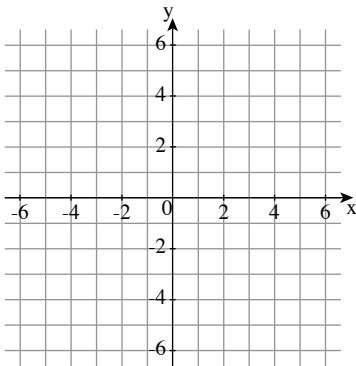


ד.



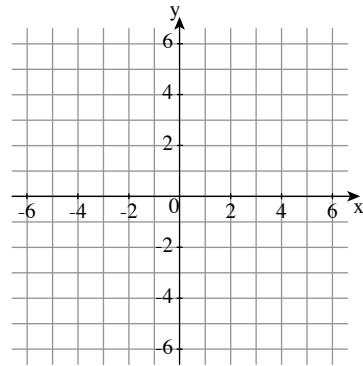
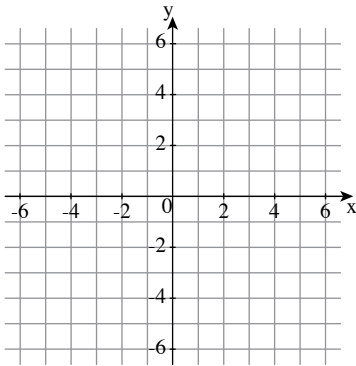
9. שרטטו גרפים מתאימים.
א. $x \geq 5$

ב. כל הנקודות ששיעור x גדול או שווה
ל-1, $(x \geq -1)$



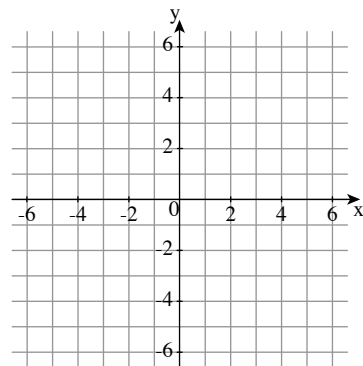
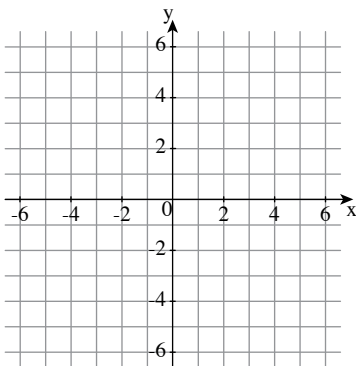
ד. $x \leq 0$

ג. כל הנקודות, ששיעור y שלהן גדול או
שווה ל-5.



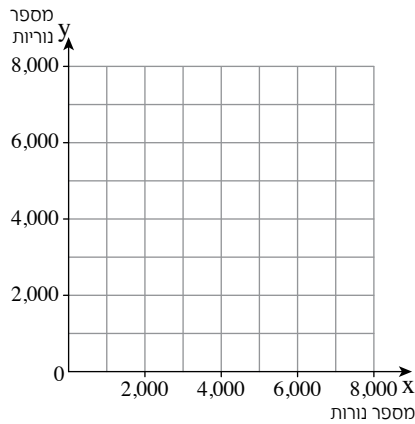
ו. כל הנקודות ששיעור y שלהן גדול או
שווה ל-1

ה. $y \leq 0$



10. במפעל מייצרים נורות ונוריות.

א. סמנו נקודות, המתאימות לייצור של 5000 נורות. העבירו את הישר המתאים ורשמו את משוואתו.



- צבעו אזור מתאים לייצור של לא יותר מ-5000 נורות.
- רשמו אי-שוויון מתאים לאזור הצבוע.
- ב. סמנו נקודות המתאימות לייצור של 7000 נורות, העבירו את הישר המתאים ורשמו את משוואתו.
- צבעו אזור מתאים לייצור של לא יותר מ-7000 נורות.
- רשמו אי-שוויון מתאים לאזור הצבוע.
- ג. מגבלות הייצור מתוארות בתחום הצבוע פעמיים. רשמו אותן.
- ד. היכן נמצאות הנקודות המתארות ייצור של נוריות בלבד?
- ה. ידוע שהמפעל מרוויח 0.30 ש"ח מנורה ו-0.20 ש"ח מנורית.
מה יהיה רווח המפעל:
 - ממכירה של 2000 נורות ו-1000 נוריות?
 - ממכירה של 5000 נורות ללא נוריות?
 - ממכירה של 7000 נורות ללא נוריות?
- ו. כמה נורות ונוריות אפשר לייצר, כדי להגיע לרווח מקסימלי?



11. מנהל חברת "שחף" עסוק מאוד. מחוסר זמן נתן למנהל הייצור שלו את הדף הבא, כדי שישרטט גרף.

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

x - משקל פרחים בטונות

y - משקל פירות בטונות

א. שרטטו גרף של שני האי-שוויונות, באותה מערכת צירים, ברביע הראשון.
(שרטטו תחילה את הישרים).

ב. מה מייצגות הנקודות $A(2, 4)$, $B(5, 3)$?

ג. סמנו במערכת הצירים נקודות המתארות משלוח של:

3 טון פרחים ו-2 טון פירות.

5 טון פרחים ו-2 טון פירות.

2 טון פרחים ו-3 טון פירות.

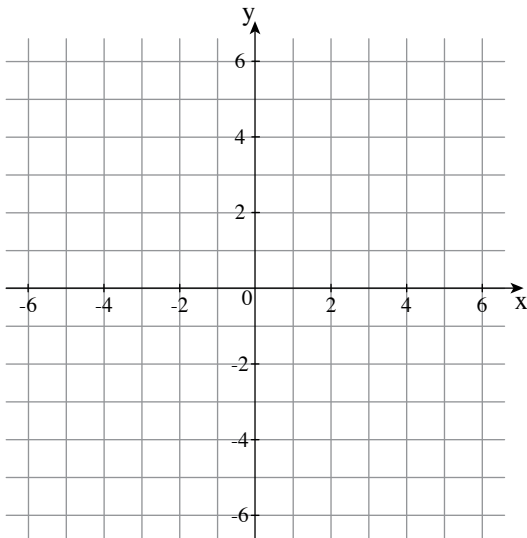
ד. השטח הצבוע בגרף ששרטטתם מתאר את אפשרויות הייצור השונות.
רשמו 3 דוגמאות למשלוחים אפשריים.

"הפרד ומשול" במישור



עד כה שרטטתם גרף של אי-שוויון, כשהישר המתאים מקביל לאחד הצירים. עתה תלמדו לשרטט גרפים של אי שוויונות נוספים. לשם כך נחזור על שרטוט ישרים.

1. א. שרטטו במערכת הצירים את הישר שמשוואתו $y = x + 2$.

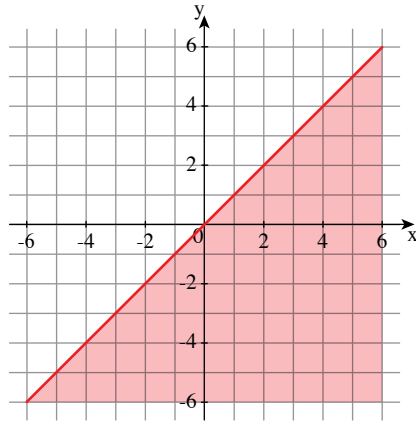


- ב. היכן, לדעתכם, יימצאו הנקודות המקיימות $y \geq x + 2$?
- צבעו אזור מתאים.
- סמנו שלוש נקודות באזור הזה, רשמו את שיעוריהן.
- הציבו ובדקו אם שיעוריהן מקיימים את האי-שוויון הנ"ל.
- סמנו שתי נקודות באזור שאינו צבוע, ובדקו אם שיעורי הנקודות אינם מקיימים את האי-שוויון.

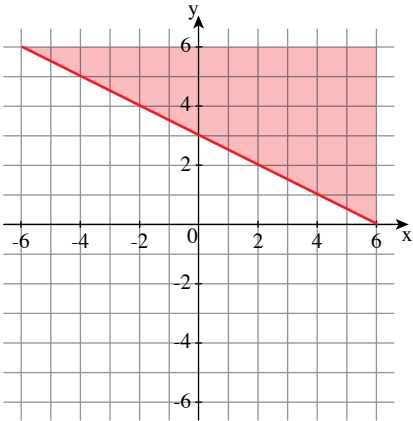


2. - רשמו את משוואת הישר המודגש.
 - רשמו אי-שוויון המתאים לאזור הצבוע.

א.



ב.



3. שרטטו את הישר שמשוואתו $y = \frac{1}{2}x + 3$

א. צבעו את חלק המישור, המתאר את האי-שוויון $y \geq \frac{1}{2}x + 3$.

ב. בחרו 2 נקודות באזור הצבוע, ובדקו על ידי הצבה אם הן מקיימות את האי-שוויון.

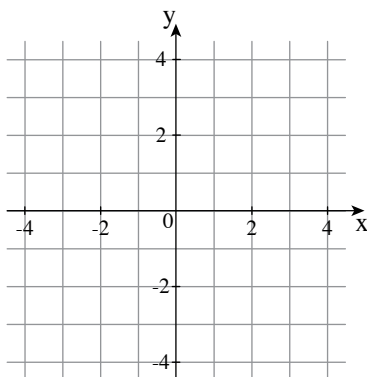
ג. רשמו אי-שוויון, המתאים לאזור **שאינו** צבוע.



ראינו שהישר מפריד בין שני "חצאי מישור", שלכל אחד מהם מתאים אי-שוויון מהצורה

$y \leq$ [] או $y \geq$ [] (האזורים כוללים את הישר המפריד).

4. א. שרטטו את הישר שמשוואתו $y = -3x + 2$.
צבעו את האזור, המתאים לאי-שוויון $y \leq -3x + 2$.

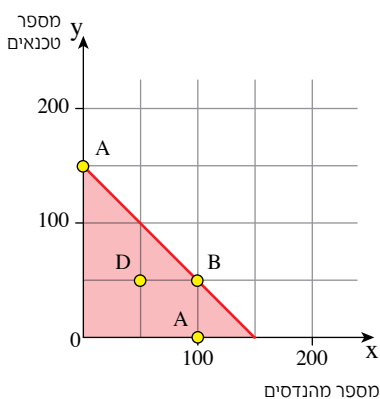


- ב. שרטטו את הישר שמשוואתו $y = 2x - 1$.
צבעו את האזור המתאים לאי-שוויון $y \geq 2x - 1$.

5. שרטטו במערכת צירים נפרדת גרף מתאים לכל אי שוויון (שרטטו תחילה את הישר שבגבול האזור).

- א. $y \geq -\frac{1}{2}x + 1$ ב. $y \leq \frac{1}{2}x + 3$ ג. $x \leq 5$

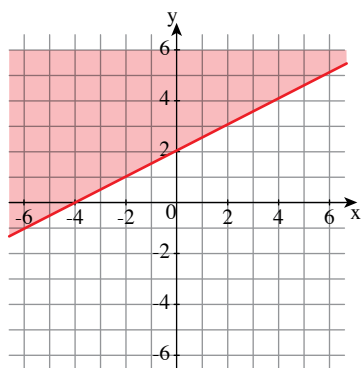
6. מקימים מפעל, שבו יעבדו מהנדסים וטכנאים.
האפשרויות השונות מתוארות בשרטוט.



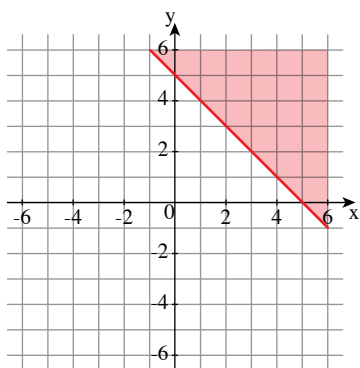
- א. כמה מהנדסים, לכל היותר, יוכלו לעבוד במפעל זה?
ב. רשמו את משוואת הישר AB.
ג. רשמו אי שוויונות מתאימים לבעיה.
ד. מה מייצגת כל אחת מהנקודות A, B, C ו-D?
ה. אילו מהנקודות הנ"ל אינן מאפשרות תוספת עובדים?
ו. מהו המספר הגדול ביותר של עובדים שאפשר להעסיק?
ז. האם הנקודה (52.5, 70) נמצאת בתחום הצבוע?
ח. האם כל הנקודות בתחום הצבוע אכן מתאימות לאפשרויות ההעסקה? נמקו!

7. - רשמו את משוואת הישר המודגש.
 - רשמו אי שוויון, המתאים לאיזור הצבוע.

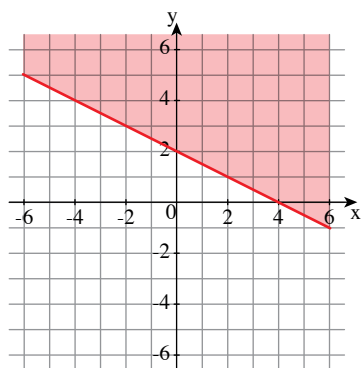
א.



ב.



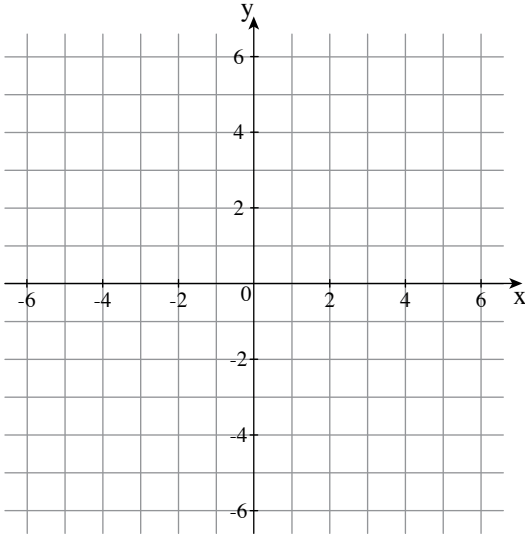
ג.



שרטוט ישרים (חזרה)

כדי לשרטט גרפים של אי שוויונות, שאינם רשומים בצורה $y \geq$ או $y \leq$, נחזור על שרטוט ישרים לפי נקודות.

1. כדי לשרטט ישר שמשוואתו $2x - 3y = 6$, אפשר לבחור שתי נקודות (ושלישית לביקורת) הנמצאות על הישר, לסמן ולהעביר את הישר. השלימו את הטבלה ושרטטו.



x	0		-3
y		0	

2. שרטטו את הישרים שמשוואתיהם נתונות (אפשר באותה מערכת צירים).

$$\frac{x-y}{2} = 3$$

$$x - 2y = 1$$

$$2x - y = 5$$

x	-1	0	-3
y			

x	0		-1
y		0	

x	0		-3
y		0	

כפי שראיתם, נוח לבחור נקודות על הצירים.



3. שרטטו את הישרים.

א. $y - 3x = 5$

ג. $\frac{y-x}{2} = 0$

ב. $2y + x = 10$

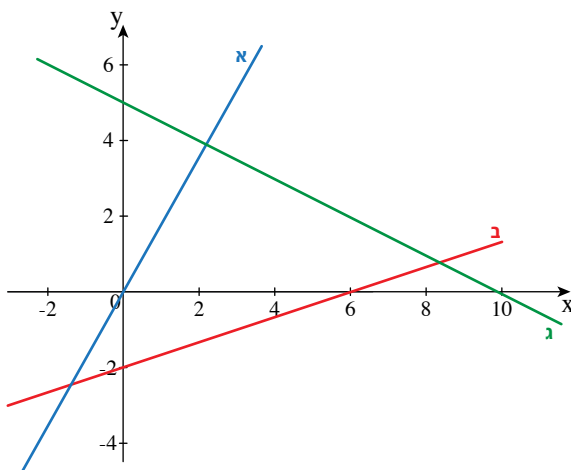
ד. $2x - 3y = 6$

4. התאימו לכל ישר את משוואתו.

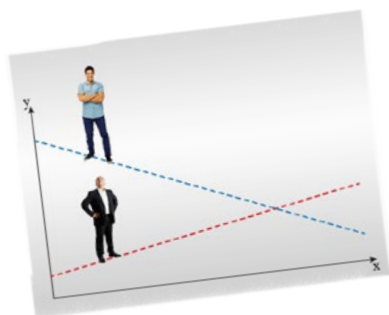
(1) $x + 2y = 10$

(2) $x - 3y = 6$

(3) $2x - y = 0$



עוד על הפרדה במישור



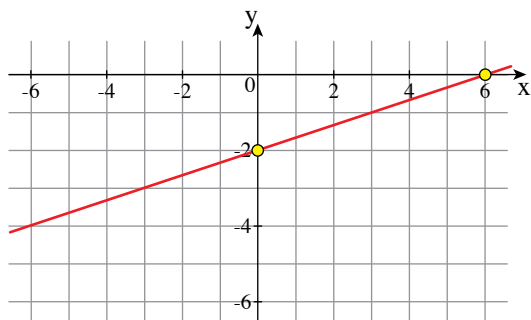
1. נתון ישר שמשוואתו $x - 3y = 6$. הציבו את שיעורי

הנקודה $(5, -1)$ בביטוי $x - 3y$.

אם היא מקיימת $x - 3y > 6$,

סמנו אותה במערכת הצירים בצבע כלשהו.

אם היא מקיימת $x - 3y < 6$, סמנו אותה בצבע אחר.



חזרו על הפעולה לגבי כל אחת מהנקודות הבאות.

$(6, 1)$

$(5, 1)$

$(0, 0)$

$(3, 2)$

$(\frac{1}{2}, -2)$

$(-2, -1)$

$(-5, -4)$

$(3, -2)$

$(0, -4)$

אם לא טעיתם, קיבלתם, כפי שראינו בסעיף הקודם, שהישר מפריד בין שתי הקבוצות של הנקודות:

אלה שמתאימות לאי-שוויון $x - 3y > 6$

ואלה שמתאימות לאי-שוויון $x - 3y < 6$

לכן מספיק לבחור נקודה אחת, ולבדוק בעזרתה איזה אזור מתאים לכל אי שוויון.

כשנתון האי שוויון $2x - 3y \geq 6$, לא נוח לעבור לצורה $y \geq$ או $y \leq$, לכן נשרטט את הישר המפריד על פי נקודות, ואחר כך נקבע את האזור המתאים על ידי בדיקת נקודה.



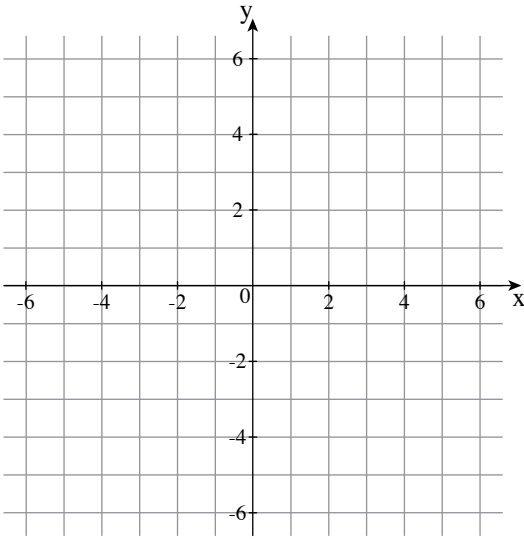
2. א. שרטטו תחילה את הישר $2x - 3y = 6$.

x			
y			

ב. שערו איזהו האזור המתאים לאי שוויון

$$2x - 3y \geq 6$$

בחרו נקודה באזור זה, הציבו שיעוריה, ובדקו אם היא מקיימת האי שוויון $2x - 3y \geq 6$. אם כן, צבעו את האזור. אם לא, צבעו את ה"אזור השני".

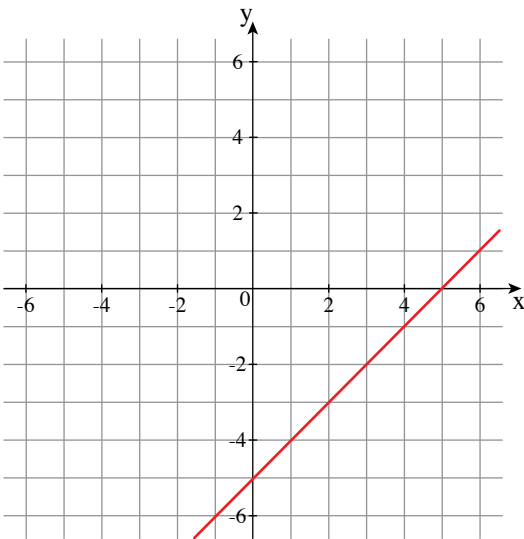


3. נתון ישר שמשוואתו $x - y = 5$ (ראו שרטוט).

א. סמנו נקודה כלשהי מעל הישר ורשמו את שיעוריה.

ב. הציבו ובדקו איזה אי שוויון מתאים לאזור שמעל הישר.

ג. הנקודות $(5, 0)$, $(3, 0)$ נמצאות באזור הצבוע. הציבו ובדקו אם שיעוריהן מקיימים את האי שוויון שרשמתם.





4. א. שרטטו תחילה את הישר $2x - 3y = 6$ במערכת הצירים.

x			
y			

בחרו נקודה באחד משני האזורים,

ובדקו אם היא מקיימת את האי

שוויון $2x - 3y \geq 6$.

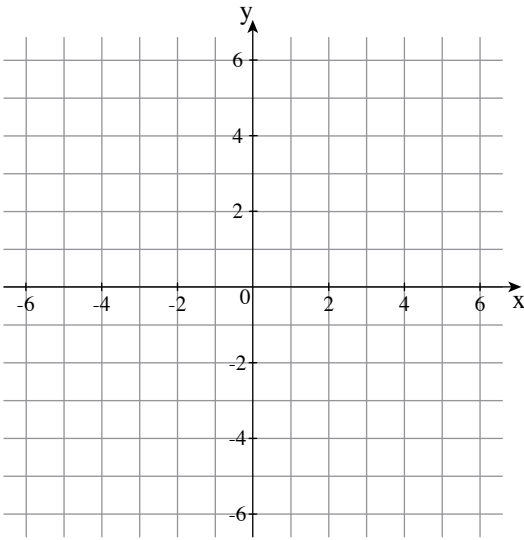
צבעו את האזור המתאים לאי שוויון

$2x - y \geq 6$.

ביקורת: בחרו נקודה נוספת באזור

הצבוע, ובדקו אם שיעוריה מקיימים

את האי שוויון.

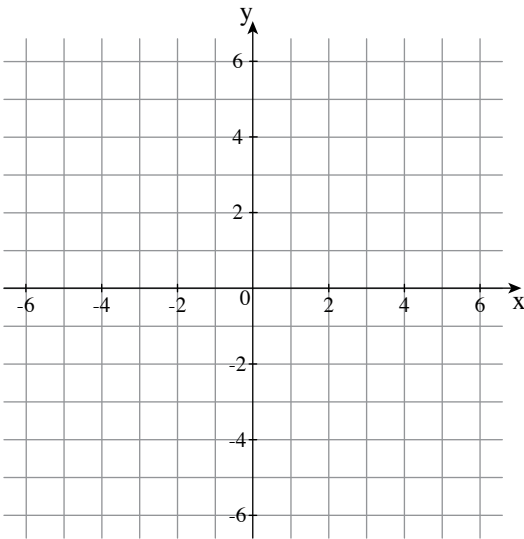


ב. שרטטו את הישר שמשוואתו $x - 2y = 6$.

בחרו נקודה מעל או מתחת לישר,

והשלימו שרטוט גרף מתאים לאי

שוויון $x - 2y \leq 6$.





5. רשמו את משוואת הישר "המפריד" בין האי שוויונות.

$$y - x \leq 3$$

$$y - x \geq 3$$



6. רשמו לכל אי שוויון את משוואת הישר "המפריד".

ב. $2y - x \leq 5$

א. $2y - x \geq 5$



7. שרטטו גרפים מתאימים לאי שוויונות הבאים.

(שרטטו תחילה את הישר המפריד, בחרו נקודה באחד האזורים, בדקו איזה אי שוויון היא מקיימת, ואחר כך צבעו את האזור המתאים לאי שוויון הנתון).

ג. $y \geq -1$

א. $x + 2y \geq 2$

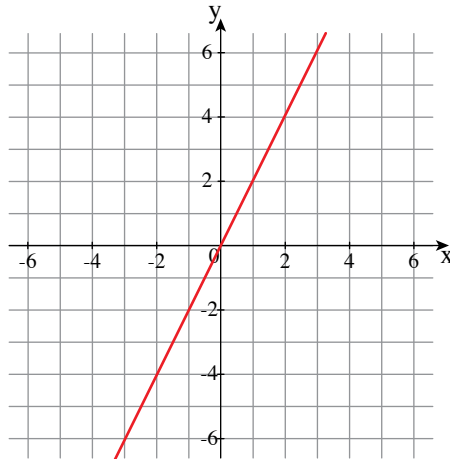
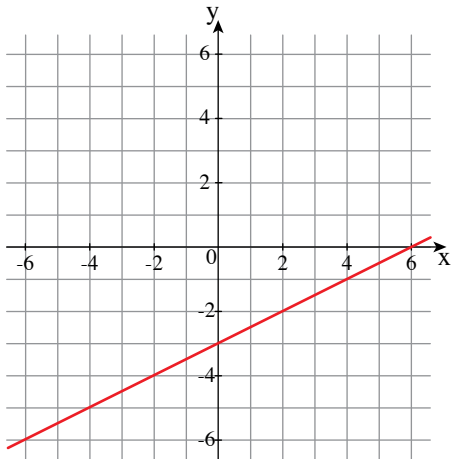
ד. $2x - 5y \leq 10$

ב. $2x - y \leq 0$

8. סמנו נקודה באחד משני האזורים, רשמו את שיעוריה, ובדקו אם היא מקיימת את האי שוויון. אחר כך צבעו את האזור המתאים לאי שוויון.

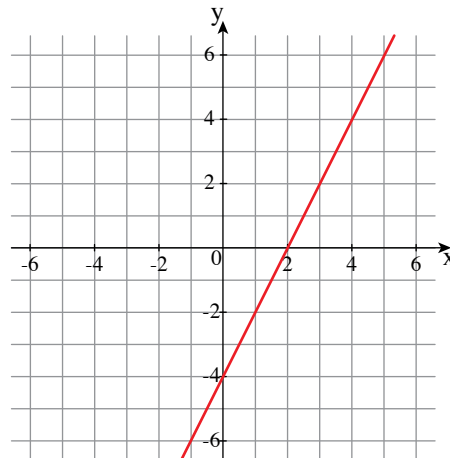
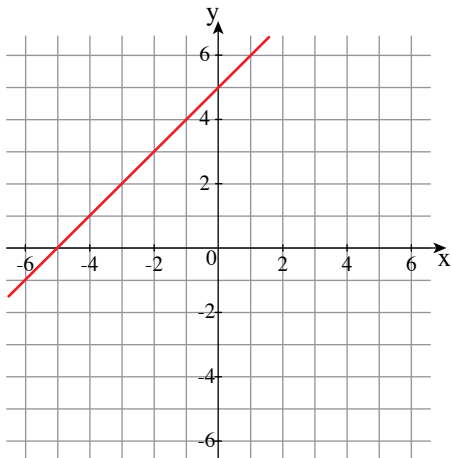
ג. $x - 2y \leq 6$

א. $y \geq 2x$



ד. $y - x \leq 5$

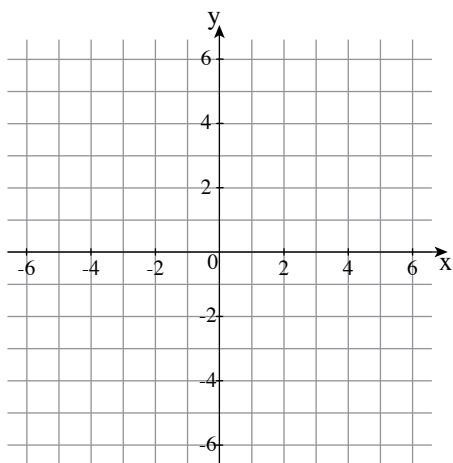
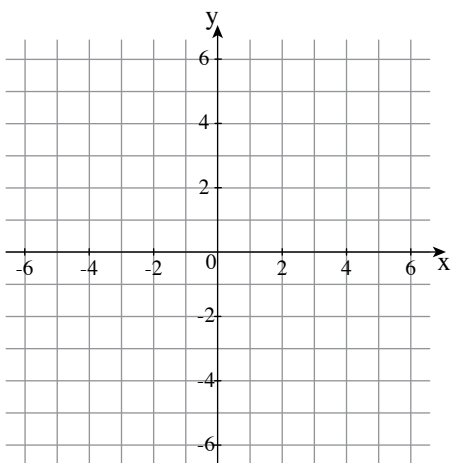
ב. $2x - y \leq 4$



9. שרטטו את הישר המפריד, וצבעו את האזור המתאים לאי שוויון.

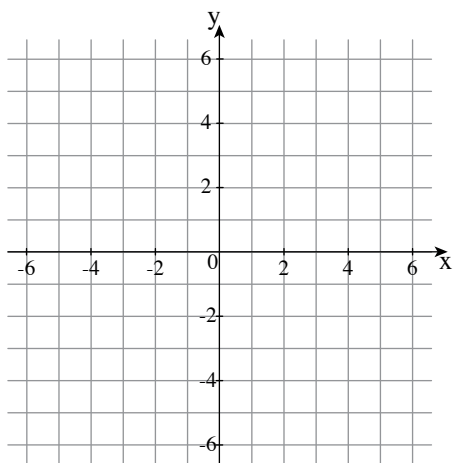
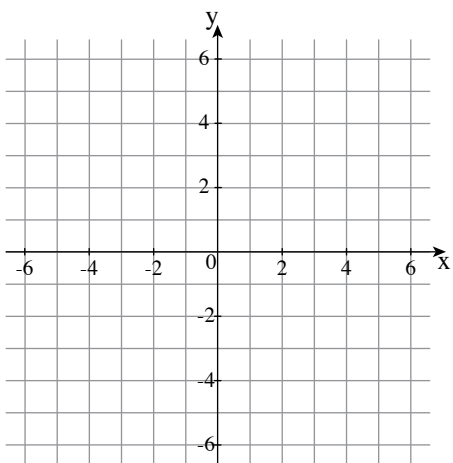
א. $x + y \leq 5$

ג. $x + 2y \geq -6$



ב. $2x + 3y \geq 12$

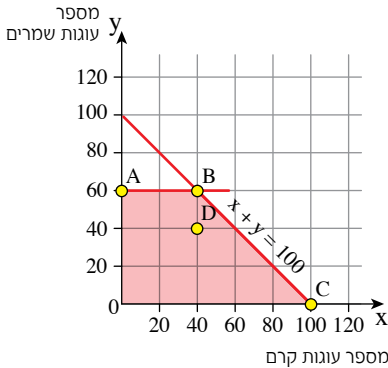
ד. $y \leq \frac{1}{2}x + 3$



"טובים השניים מן האחד"



1. קונדיטוריה מייצרת עוגות שמרים ועוגות קרם, בסך-הכל לא יותר מ- 100 עוגות ביום. מספר עוגות השמרים אינו עולה על 60 (ראה שרטוט).



- א. רשמו מה מתארת כל אחת מהנקודות A, B ו-C.
 ב. רשמו אי שוויונות מתאימים לבעיה.
 ג. ידוע שהרווח מעוגת קרם הוא 10 ש"ח, והרווח מעוגת שמרים 5 ש"ח.
 מהו הרווח על פי הנקודות A, B ו-C?
 היכן, לדעתכם, יהיה הרווח גדול יותר, בנקודה B או D?

בפרק הקודם ראינו כיצד לתאר גרף של אי שוויון בודד. בסעיף זה תלמדו לשרטט גרף משותף לשני אי שוויונות.



2. א. שרטטו את הישר שמשוואתו $y = 2x + 5$.
 ב. צבעו את האזור המתאים לאי שוויון $y \leq 2x + 5$.
 ג. שרטטו באותה מערכת צירים גרף מתאים לאי שוויון $y \leq -x + 5$ (שרטטו תחילה את הישר המפריד).
 ד. רשמו שיעורי נקודה, הנמצאת באזור המשותף לשני האי שוויונות.
 ה. הדגישו את האזור המשותף.



3. א. שרטטו את הגרף של האי שוויון $y \leq 2x + 4$ (זכרו לשרטט תחילה את הישר המפריד).
 ב. שרטטו באופן דומה, באותה מערכת צירים, גרף של האי שוויון $y \leq x + 1$.
 ג. הדגישו את האזור המשותף.
 ד. מצאו נקודה באזור המשותף. רשמו את שיעוריה, ובדקו אם היא מקיימת את שני האי שוויונות.



$$y = -x + 5$$

$$y = x + 3$$

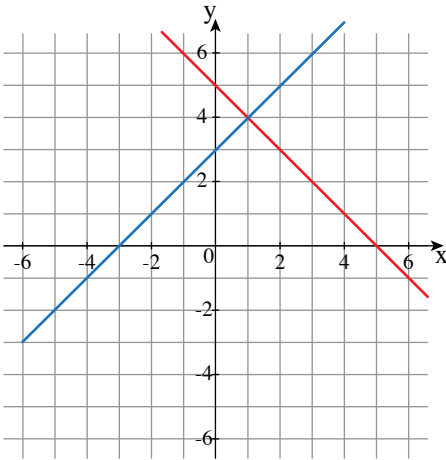
4. במערכת הצירים משורטטים הישרים

א. התאימו כל ישר למשוואתו.

ב. צבעו את הגרפים המתאימים לאי שוויונות

$$y \leq x + 3 \quad y \geq -x + 5$$

ג. הדגישו את האזור המשותף.



5. א. התאימו כל ישר למשוואתו.

$$y = x + 2 \quad (I)$$

$$2x + y = 5 \quad (II)$$

ב. רשמו אי שוויון מתאים לשטח הצבוע

ש"מתחת ל-I.

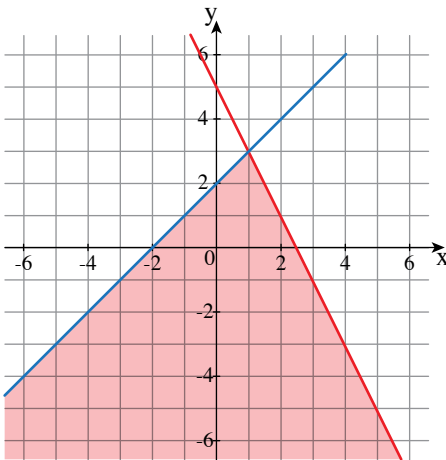
רשמו אי שוויון מתאים לאזור הצבוע

ש"מתחת" ל-II.

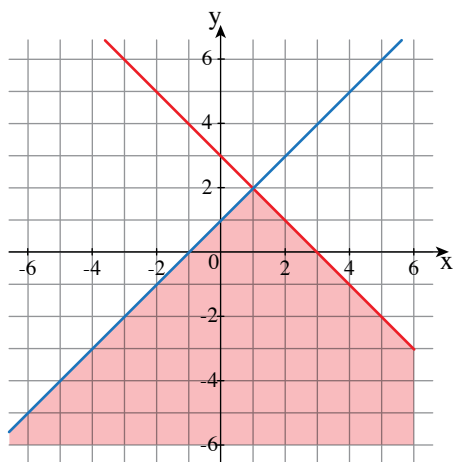
ג. מצאו 3 נקודות באזור המשותף, הציבו

ובדקו אם שיעוריהן מקיימים את שני האי

שוויונות שרשמת.



כדי לשרטט גרף של מערכת אי שוויונות, יש לשרטט תחילה את הגרף של כל אי שוויון בנפרד. האזור המשותף של גרפים אלה הוא **גרף המערכת**.



לדוגמה: השטח הצבוע בשרטוט שלפניך, מכיל את כל הנקודות ש"מתחת" לשני הישרים $y = x + 1$, $y = -x + 3$, ולכן מהווה פתרון למערכת האי שוויונות:

$$\begin{cases} y \leq x + 1 \\ y \leq -x + 3 \end{cases}$$

6. א. סמנו במערכת הצירים את הנקודות:

$A(-1, 3)$ $B(2, 5)$ $C(0, 6)$

שרטטו ישר, כך ש- 3 הנקודות יהיו **מעליו**, ורשמו את משוואתו.

שרטטו ישר נוסף, כך ש- 3 הנקודות יהיו מתחתיו, ורשמו את משוואתו.

ב. צבעו אזור, הכלוא בין הישרים, באופן שיכיל את כל הנקודות הללו.

ג. רשמו מערכת אי שוויונות, המתאימה לשטח הצבוע שנוצר.





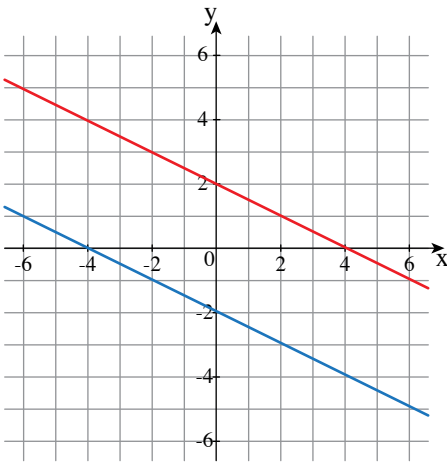
7. א. התאימו כל ישר למשוואה.

$$y = -\frac{1}{2}x + 2 \quad (I)$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 2 \quad (II)$$

ב. שרטטו גרף המתאים למערכת האי שוויונות.

$$\begin{cases} y \leq -\frac{1}{2}x + 2 \\ y \geq -\frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$$

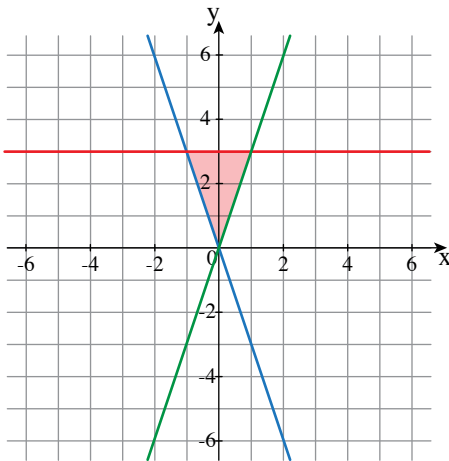


8. א. רשמו את משוואות הישרים שבשרטטו.

ב. רשמו מערכת אי שוויונות, שפתרונה הוא השטח הצבוע שבשרטטו.

ג. רשמו את שיעורי הקדקודים של המשולש שהתקבל.

ד. רשמו שיעוריהן של 2 נקודות בתוך המשולש.



9. א. שרטטו את הישרים הבאים:

$$y = x + 3$$

$$y = -2x + 3$$

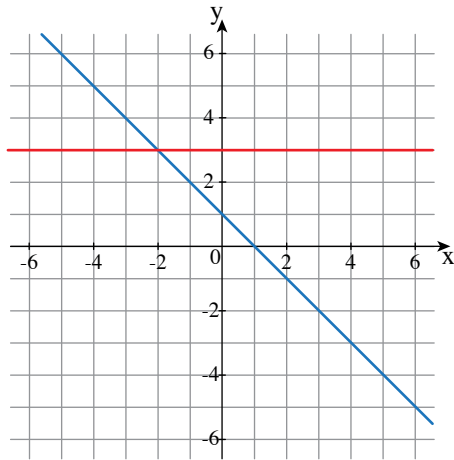
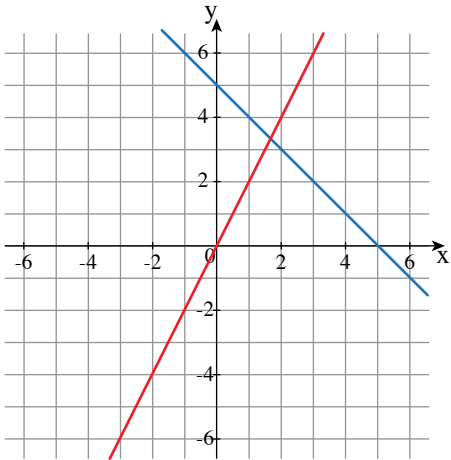
$$y = 1$$

ב. צבעו את האזור המשותף לאי שוויונות: $\begin{cases} y \leq x + 3 \\ y \leq -2x + 3 \\ y \geq 1 \end{cases}$

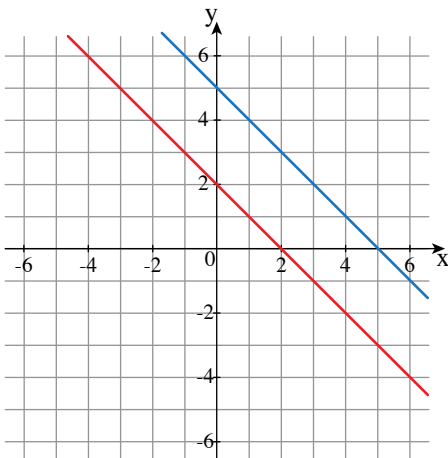
10. צבעו במערכת הצירים את האזורים המתאימים, כך שיתארו את מערכות האי שוויונות.

ב.
$$\begin{cases} y \geq 2x \\ y \leq -x + 5 \end{cases}$$

א.
$$\begin{cases} y \leq 3 \\ y \leq -x + 1 \end{cases}$$



ג.
$$\begin{cases} y \leq -x + 5 \\ y \geq -x + 2 \end{cases}$$



11. שרטטו גרפים מתאימים, והדגישו את האזור המשותף (אם קיים אזור כזה).

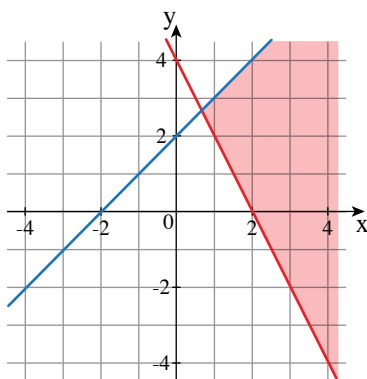
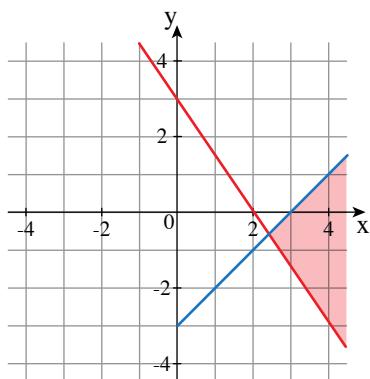
$$\text{א. } \begin{cases} \frac{x+y}{2} \geq 0 \\ y \leq x+5 \end{cases} \quad \text{ב. } \begin{cases} x+2y \leq 10 \\ y \geq x-5 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} 3x+y \leq 5 \\ y \leq -3x \end{cases}$$

12. רשמו מערכות של אי שוויונות, המתאימים לגרף.

א.

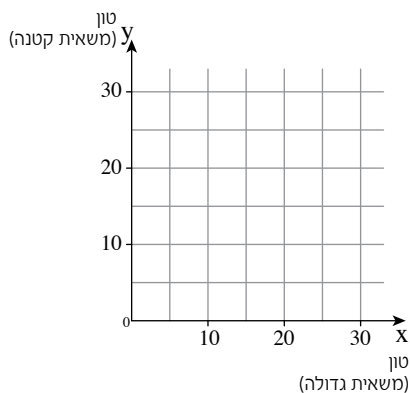
ב.



13. משאית גדולה מסוגלת להעביר בכל הובלה x טון ברזל, ומשאית קטנה y טון ברזל.

לפניך האי שוויונות, המתארים את האילוצים של הבעיה.

א. שרטטו גרף מתאים לבעיה, ורשמו במילים את אילוצי הבעיה (בהקשר לסיפור).



$$\begin{cases} x+y \leq 20 \\ y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

המשך ←

ב. בדקו לגבי כל אחת מהנקודות הבאות, אם שיעוריה מתארים הובלה אפשרית

$$C(-3, 10), D(18, 5), A(20, 0), B(9, 6)$$

ג. סמנו שתי נקודות בתחום המתאים לבעיה, ורשמו מה מתארים שיעוריהן.

ד. רשמו שיעורי נקודה, הנמצאות על אחת מהצלעות של הצורה שהתקבלה, רשמו מה מתארים שיעורי הנקודה.

ה. היכן נמצאות הנקודות, המתארות משלוח של 20 טון ברזל בסך הכל?

14. שרטטו במערכת צירים את הגרפים של מערכות האי שוויונות.

צבעו את האזור המשותף (אם קיים כזה), ורשמו עבורו את שיעורי הקדקודים.

$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ y \leq -2x \\ x \geq -2 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

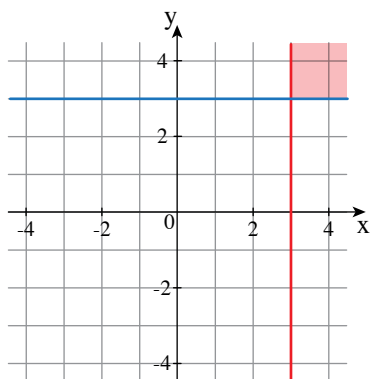
$$\begin{cases} y \geq 2x \\ y + x \leq 5 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq x \end{cases} \quad \text{ד.}$$

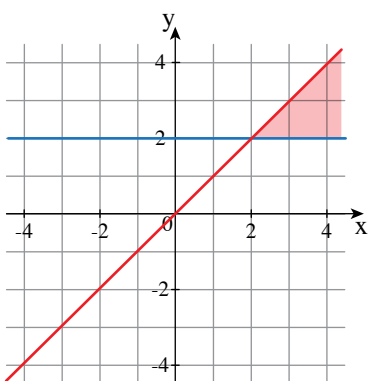
$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq x + 2 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 2x + 1 \\ x - y \leq 5 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

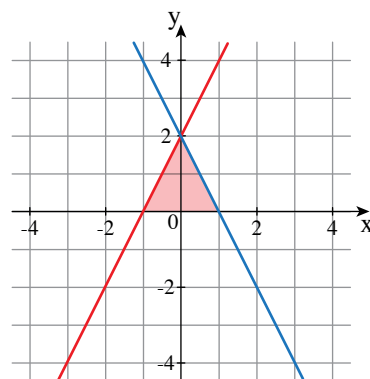
15. רשמו מערכת אי שוויונות, המתאימה לאזור הצבוע.
א.



ב.



ג.



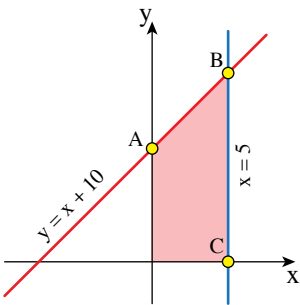
קוד לחישוב קדקוד



עד כה קראנו מתוך השרטוט את שיעורי הקדקודים של התחום המשוורט. בסעיף זה נחזור על מציאת שיעורי הקדקודים כשאין יחידות בשרטוט, כפי שעשינו בגיאומטריה אנליטית.

1. א. רשמו מערכת אי שוויונות, שתתאר את התחום הצבוע.

ב. מצאו את שיעורי A, B ו-C, (רשמו את השיעור הידוע, ואחר כך חשבו את השיעור הנוסף).



2. א. התאימו כל ישר למשוואתו.

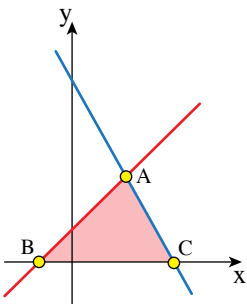
$$y = x + 1$$

$$y = -2x + 10$$

ב. רשמו מערכת אי שוויונות, המתאימה לאזור הצבוע.

ג. חשבו את שיעורי הנקודות B, C.

ד. חשבו את שיעורי הנקודה A.



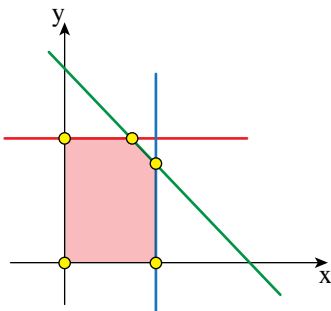
3. א. רשמו מערכת אי שוויונות, שתתאר את האזור הצבוע.

$$y = 5 \quad \text{משוואות הישרים:}$$

$$y + x = 8$$

$$x = 4$$

ב. מצאו את קדקודי הצורה שהתקבלה.

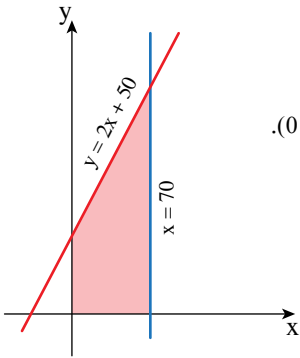




4. א. רשמו מערכת אי שוויונות מתאימה לאזור הצבוע.

ב. חשבו את שיעורי הקדקודים.

ג. רשמו אי שוויונות, היוצרים משולש שקדקודיו: $(0, 2)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$.



תרגילים

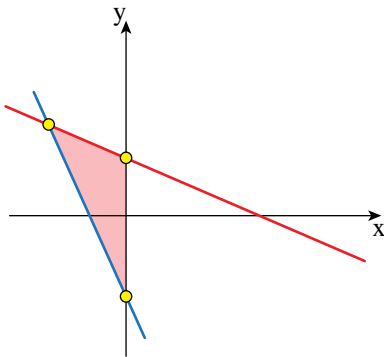
5. א. משוואות הישרים:

$$y = -2x - 3$$

$$x + 3y = 6$$

רשמו מערכת אי שוויונות, שתתאר את האזור הצבוע.

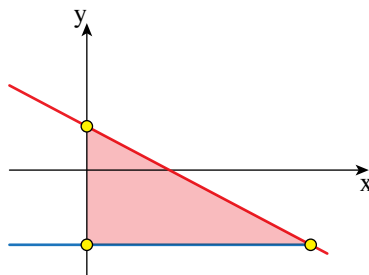
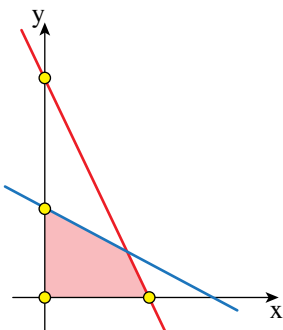
ב. מצאו את שיעורי הקדקודים.



6. מצאו את הקדקודים

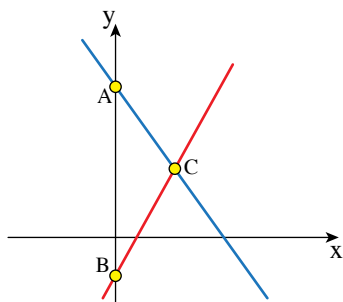
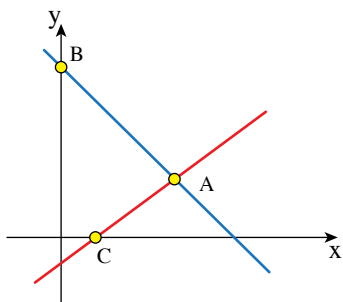
ב.
$$\begin{cases} x + 2y \leq 3 \\ 3x + y \leq 4 \end{cases}$$

א.
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -2 \\ x + 2y \leq 3 \end{cases}$$

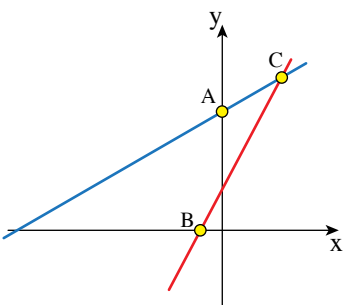
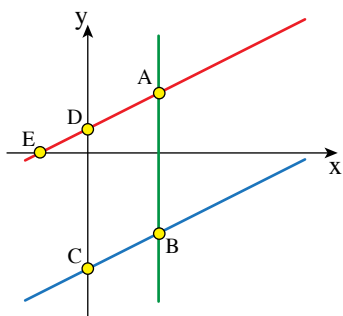


7. מצאו את שיעורי הנקודות, המסומנות בכל שרטוט, על פי המשוואות הרשומות.
(התאימו תחילה לכל ישר את משוואתו.)

$x - 2y = 2$	ג.	$y = 2x - 1$	א.
$x + y = 5$		$3x + 2y = 6$	



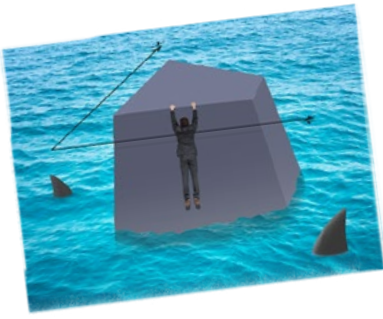
$x = 5$	ד.	$2x - y = -1$	ב.
$x - 2y = 15$		$x - 2y = -5$	
$x - 2y = -2$			



8. פתרו את מערכות המשוואות הבאות
(רשמו תחילה, אם אפשר, בצורה $y = ax + b$).

$\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$	ה.	$\begin{cases} y - 5x = 10 \\ 2y - 3x = 6 \end{cases}$	ג.	$\begin{cases} x = 5 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$	א.
$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 9 \end{cases}$	ד.	$\begin{cases} x = 3 \\ y - x = 5 \end{cases}$	ב.		

התחום האפשרי



1. בבעיות הבאות נעבוד ברביע הראשון בלבד, כלומר $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$



במפעלים מייצרים שני סוגי מיצים: מיץ אשכוליות ומיץ ענבים.

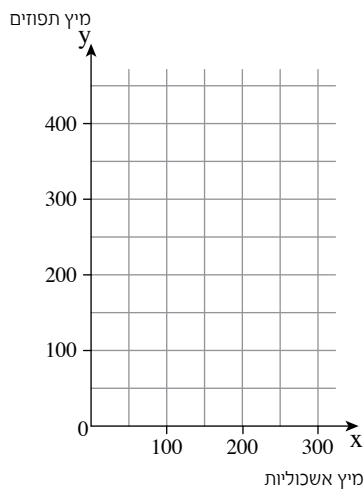
x כמות בליטרים של מיץ אשכוליות, שמייצר המפעל בשעה.

y כמות בליטרים של מיץ ענבים, שמייצר המפעל בשעה.

א. רשמו פונקציית מטרה לכמות המיץ שמייצרים במשך 5 שעות.

ב. במשך 5 שעות ניתן לייצר לא יותר מ- 1000 ליטר. רשמו אי שוויון מתאים.

ג. שרטטו במערכת הצירים גרף מתאים לאי שוויון.

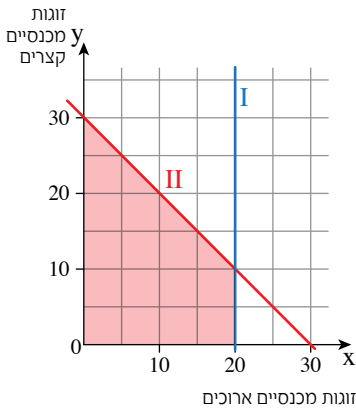


ד. האם הנקודות הבאות נמצאות בתחום שנוצר?

$A(50, 200)$, $B(100, 100)$, $C(0, 200)$

ה. האם המפעל יכול לייצר 70 ליטרים מיץ אשכוליות ו- 140 ליטרים מיץ ענבים?

אוסף כל הפתרונות האפשריים של בעיה נקרא **התחום האפשרי**.



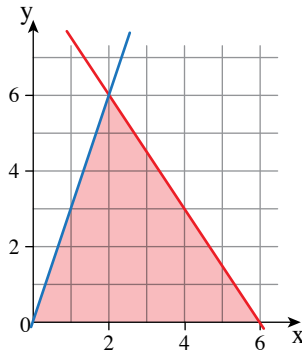
2. בית חרושת מייצר מכנסיים ארוכים וקצרים. כמות המכנסיים, שהמפעל יכול לייצר בשעה, מתוארת בגרף.
- א. האם ניתן לייצר בשעה 20 זוגות של מכנסיים קצרים בלבד?
- ב. האם ניתן לייצר בשעה 6 זוגות של מכנסיים קצרים ו-12 זוגות של מכנסיים ארוכים?
- ג. רשמו את משוואת הישר II שבשרטוט.
- ד. רשמו מערכת אי שוויונות מתאימה לאזור הצבוע.
- ה. רשמו במילים את המגבלות של בית החרושת.

מערכת אי שוויונות, המתארת מגבלות, נקראת **מערכת אילוצים**.

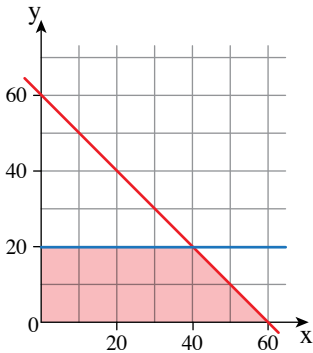


3. כתבו מערכות של אי שוויונות מתאימים.

א.

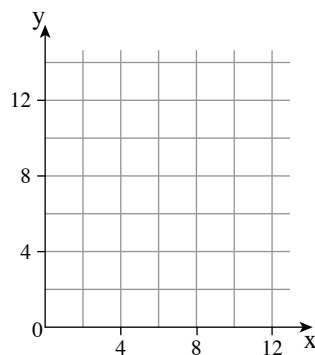
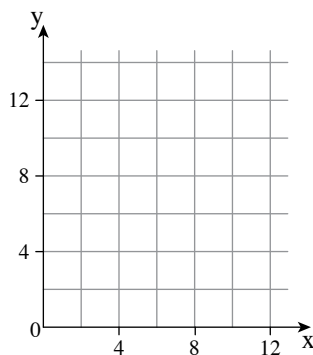
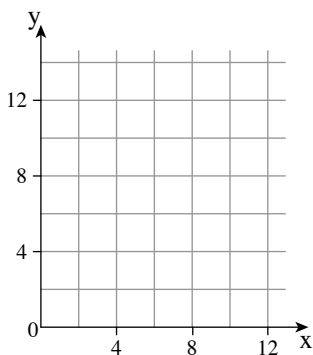


ב.



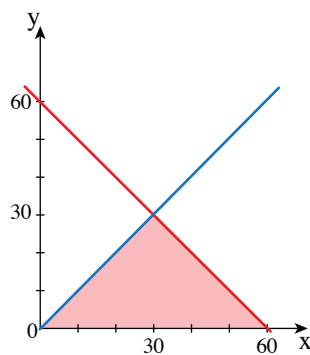
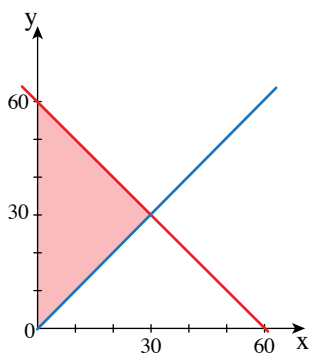
4. שרטטו גרף מתאים לכל מערכת, ברביע הראשון.

א. $\begin{cases} y \leq 3 \\ y \leq -x + 10 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y \leq 10 \\ x - y \leq 5 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} x \leq 4 \\ 2x + y \leq 10 \end{cases}$



5. לאיילת התפזרו הדפים של שיעורי הבית. עוזרו לה "לשדך" את האי שוויונות לגרפים המתאימים (ברביע ה-I).

א. $\begin{cases} y \leq 60 - x \\ y \geq x \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y \leq 60 - x \\ x \geq y \end{cases}$



6. א. ידוע, שדרור מקבל **לכל היותר** 50 ש"ח לשבוע דמי-כיס.

האם ייתכן, שבשבוע שעבר קיבל דרור 30 ש"ח?

האם ייתכן שקיבל 60 ש"ח?

האם ייתכן שקיבל 50 ש"ח?

- ב. איילת מקבלת **לכל הפחות** 40 ש"ח דמי-כיס.
האם ייתכן, שאיילת קיבלה בשבוע מסוים 30 ש"ח?
האם ייתכן שקיבלה 60 ש"ח?
האם ייתכן שקיבלה 50 ש"ח?
- ג. האם ייתכן, שבשבוע מסוים יקבלו דרור ואיילת אותו סכום?
7. משאית גדולה מסוגלת להעביר בכל הסעה x טון ירקות, ומשאית קטנה y טון ירקות.
כמות הירקות, שמעבירות 2 המשאיות ביחד ב- 3 הסעות, היא לכל היותר 60 טון.
- א. כיתבו פונקציית מטרה לכמות הירקות המועברת ב- 3 הסעות.
- ב. כיתבו אי שוויון מתאים לאילוץ הנ"ל, ושרטטו גרף.
- ג. רשמו אילו מהנקודות A, B, C, D, E מהוות פתרון אפשרי.
 $E(6, 15)$, $D(10, 12)$, $C(10, 10)$, $B(20, 0)$, $A(5, 12)$

"אל המטרה"



למדתם לשרטט תחום אפשרי. כעת תלמדו להשתמש בתחום האפשרי, כדי לבצע שיקולים כלכליים. לשם כך תכירו בסעיף זה מושג חדש: "פונקציית מטרה".



1. במפעל מייצרים שני מוצרים.

רווח המפעל הוא 5 ש"ח מק"ג של המוצר הראשון, ו-1.5 ש"ח מק"ג של המוצר השני.

א. מה יהיה הרווח מייצור של 5 ק"ג מהמוצר הראשון ו-10 ק"ג מהמוצר השני?

ב. רשמו פונקציית מטרה לרווח, המתקבל מייצור x ק"ג מהמוצר הראשון ו- y ק"ג מהמוצר השני.

$$f(x, y) = \boxed{} \cdot x + \boxed{} \cdot y$$

ג. חשבו את ערך פונקציית המטרה אם $x = 12$ ו- $y = 3$.

ד. חשבו את הרווח אם $x = 7$ ו- $y = 50$.

ה. חשבו את רווח המפעל מייצור 4.8 ק"ג מהמוצר השני **בלבד** (ללא ייצור של המוצר הראשון)



2. x מייצג משקל, בק"ג, של עגבניות הנמכרות ביום:

y מייצג משקל, בק"ג, של מלפפונים הנמכרים ביום.

ממכירת ק"ג עגבניות מרוויחים 1 ש"ח.

ממכירת ק"ג מלפפונים מרוויחים 0.5 ש"ח.

א. רשמו פונקציית מטרה לרווח המתקבל ביום: $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$

ב. מה ערך פונקציית המטרה שרשמתם, אם $x = 20$ ו- $y = 30$?

ג. מה היה הרווח ביום בו נמכרו 50 ק"ג עגבניות ו-40 ק"ג מלפפונים?

ד. ערך פונקציית המטרה 100. רשמו שתי אפשרויות שונות ל- x ול- y .

ה. הרווח 120 ש"ח. רשמו שתי אפשרויות שונות של מכירה.



3. x מייצג כמות של חלב בליטרים, הנמכרת ביום.

y מייצג כמות של מיץ בליטרים, הנמכרת ביום.

ממכירה של ליטר חלב מרוויחים 0.5 ש"ח.

ממכירה של ליטר מיץ מרוויחים 2 ש"ח.

רשמו פונקציית מטרה מתאימה לרווח.

פונקציות כמו אלה שרשמתם, נקראות "פונקציות מטרה". אנו מעוניינים בערכיהן בנקודות מסויימות בתוך התחום האפשרי.

4. בתחרות ידע זוכים ב- 5 נקודות עבור כל תשובה נכונה, ומפסידים 2 נקודות עבור כל תשובה שאינה נכונה.

x מייצג את מספר התשובות הנכונות של משתתף בתחרות.

y מייצג את מספר התשובות השגויות שלו.

רשמו פונקציית מטרה, שתייצג את מספר הנקודות שצבר.

א. מה ערך פונקציית המטרה אם $x = 7$ ו- $y = 10$?

ב. מה מספר הנקודות שצבר מתחרה שענה נכון על 10 שאלות, ושגה ב- 3 שאלות?

ג. רשמו שתי אפשרויות, המתאימות למשתתפים שצברו 45 נקודות.

ד. אילו מספרים ניתן להציב במקום x ו- y בשאלה זו?



5. לחברת נסיעות ישנן הוצאות קבועות: 100 ש"ח לטיול פרטי, ו- 50 ש"ח לטיול קבוצתי.

א. רשמו פונקציית מטרה להוצאות החברה עבור x טיולים פרטיים ו- y טיולים קבוצתיים.

ב. מה הוצאות החברה עבור 50 טיולים פרטיים ו- 10 טיולים קבוצתיים?

ג. אילו מספרים ניתן להציב במקום x ו- y בשאלה זו?

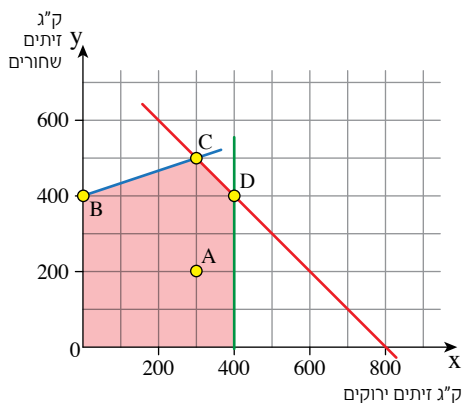




6. מפעל מייצר שימורי זיתים ירוקים ושחורים.

א. רשמו מערכת אילוצים מתאימה לתחום המשוורטט (מערכת אי שוויונות).

סמנו ב- x את המשקל בק"ג של זיתים ירוקים, שמייצר המפעל במחזור ייצור, וב- y את המשקל בק"ג של זיתים שחורים שמיוצר במחזור ייצור.



רווח המפעל מזיתים ירוקים הוא 2 ש"ח לק"ג, ומזיתים שחורים 1 ש"ח לק"ג.

ב. חשבו את רווח המפעל מייצור של 200 ק"ג זיתים ירוקים ו- 450 ק"ג זיתים שחורים.

ג. רשמו פונקציית מטרה לרווח.

ד. מצאו את הערך של פונקציית המטרה שרשמתם בנקודה A.

ה. מצאו את ערך פונקציית המטרה בנקודות B, D, C.

ו. באיזו מהנקודות A, B, C, D הרווח הוא הגדול ביותר?

ז. האם ניתן להרוויח 1300 ש"ח במחזור ייצור אחד? נמקו.

7. א. רשמו פונקציית מטרה לרווח ממכירה של x ק"ג פירות ו- y ק"ג ירקות, אם הרווח לק"ג פירות 2 ש"ח, ולק"ג ירקות 1.5 ש"ח.

ב. מצאו את הרווח, אם מוכרים 30 ק"ג פירות ו- 20 ק"ג ירקות.

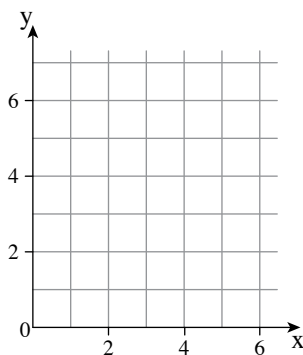
ג. רשמו שתי אפשרויות של מכירה, המתאימות לרווח של 150 ש"ח.

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - y \leq 2 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

8. נתונה מערכת אילוצים:
(ברביע ה- I: $x \geq 0$, $y \geq 0$)



א. שרטטו את התחום האפשרי.



ב. סמנו בתחום את הנקודות $A(1, 1)$, $B(1.5, 2)$, $C(0.5, 2)$.

ג. חשבו את ערך פונקציית המטרה $f(x, y) = x - 5y$ בנקודות A , B , C .

ד. באיזו מהנקודות הנ"ל הערך הוא הגדול ביותר?

9. במפעל מייצרים שני סוגי מרצפות: ריבועיות ומלבניות. ייצור מרצפת ריבועית נמשך 3 דקות, וייצור מרצפת מלבנית נמשך 4 דקות.

א. רשמו פונקציית מטרה לזמן, בדקות, הדרוש לייצור x מרצפות ריבועיות ו- y מרצפות מלבניות.

ב. רשמו 3 אפשרויות שונות לייצור מרצפות בשעה (60 דקות).

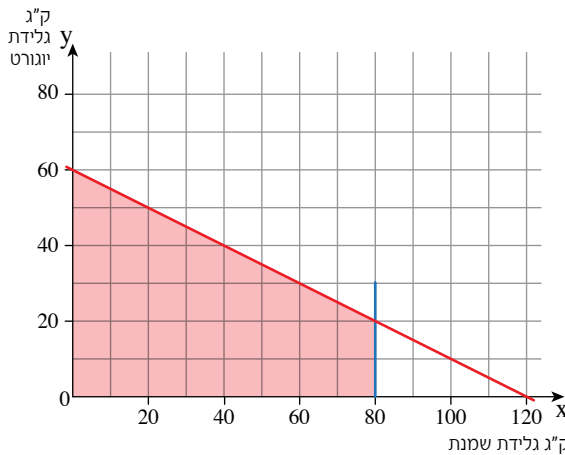
"על הגובה"



בסעיף הקודם ראינו ש"פונקציית מטרה" מקבלת ערכים שונים בתחום האפשרי. בסעיף זה נחפש היכן נמצאות הנקודות, שעבורן מקבלת "פונקציית המטרה" אותו ערך.

1. במחלבה מייצרים גלילות שמנת וגלילות יוגורט. אפשרויות הייצור מתוארות בשרטוט.

א. רשמו את האי שוויונות, המתאימים לתחום המשוורטט



ב. מק"ג גלילות שמנת מרוויחים 4 ש"ח. ומק"ג גלילות יוגורט מרוויחים 2 ש"ח. רשמו פונקציית מטרה לרווח.

ג. נניח שהרוויחו 120 ש"ח. רשמו משוואה מתאימה, ושרטטו את הישר.

ד. נניח שהרוויחו 60 ש"ח. רשמו משוואה מתאימה, ושרטטו את הישר.

ה. נניח שהרוויחו 40 ש"ח. רשמו משוואה מתאימה, ושרטטו את הישר.

הקווים ששרטטתם נקראים קווי גובה.

ו. מה תוכלו לומר על כל קווי הגובה?

ז. רשמו את משוואות הישרים ששרטטתם בצורה מפורשת ($y = ax + b$), ובדקו את שיפועי הישרים. מה מצאתם?

ח. מה תוכלו לומר על הרווח, המתקבל בנקודות על הישר $4x + 2y = 120$?



2. א. רשמו את המשוואות הבאות בצורה $y = ax + b$.

$$2x + y = 10$$

$$2x + y = 7$$

$$2x + y = 100$$

ב. הסבירו את הטענה הבאה: "אם במשוואות מהצורה הנ"ל המקדמים של x שווים והמקדמים של y שווים, אז הישרים מקבילים".

ג. רשמו משוואה של ישר המקביל לישר שמשוואתו $2x + 3y = 0$.



3. התחום המשוורטט מתאר אפשרויות שונות של הוצאות נגריה.

x מייצג את מספר הארונות שמייצרים ביום, y מייצג את מספר השולחנות שמייצרים ביום. ההוצאות לייצור ארון 450 ש"ח, וההוצאות לייצור שולחן 150 ש"ח.

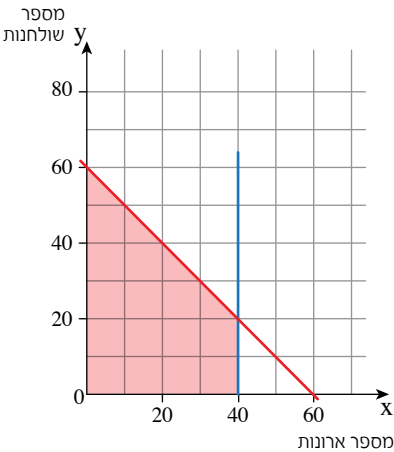
א. רשמו פונקציית מטרה להוצאות הנגריה ביום.

ב. נניח שההוצאות ביום מסוים היו 6000 ש"ח.

- רשמו משוואה, צמצמו, שרטטו את קו הגובה.
- רשמו שיעורים של שתי נקודות, הנמצאות בתחום האפשרי ועל קו הגובה.
- מה הסכום המתקבל בכל נקודה?

ג. ביום מסוים היו ההוצאות 10,500 ש"ח. רשמו משוואה, צמצמו, שרטטו ישר מתאים.

- רשמו שיעורים של שתי נקודות, הנמצאות בתחום האפשרי ועל קו הגובה.
- תארו מה מייצגות הנקודות האלה.



- כשקובעים ערך לפונקציית המטרה, מתקבלת משוואת ישר, שנקרא קו גובה. ערך הפונקציה זהה בכל הנקודות על קו גובה זה.
- כשמשינים את הערך של פונקציית המטרה, מתקבל קו גובה מקביל לקו הגובה הקודם.

4. א. שרטטו את הישרים. $x - 2y = 5$

$x - 2y = 7$

ב. רשמו משוואה של ישר מקביל להם, ושרטטו אותו באותה מערכת צירים.

5. א. ערן טען, כי הישרים: $5x + 2y = 3$

מקבילים. $5x + 4y = 10$

האם צדק? נמקו?

ב. שירה טענה, כי הישרים: $5x + 2y = 3$

מקבילים. $10x + 4y = 10$

האם צדקה? נמקו!



6. לפניכם משוואות ישרים מקבילים זה לזה. חלק מהמידע על המשוואות נמחק. השלימו, כך שהישרים יהיו מקבילים.

$x + 2y = \underline{\hspace{2cm}}$

$x + \underline{\hspace{2cm}} = 8$

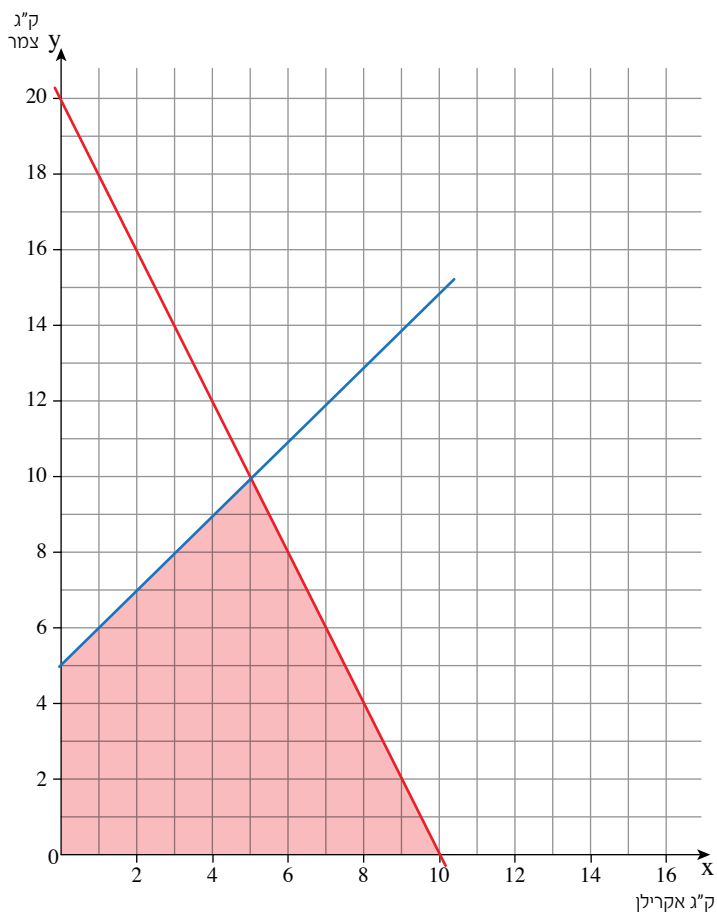
$\underline{\hspace{2cm}} + 2y = \underline{\hspace{2cm}}$

$\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = 20$

$2x + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

7. אפשרויות הייצור בשעה, של מפעל חוטים, מתוארות בשרטוט.

א. רשמו אי שוויונות, המתארים את התחום האפשרי.



ב. מק"ג אקרילן מרוויחים 5 ש"ח, ומק"ג צמר 2 ש"ח.
רשום פונקציית מטרה לרווח.

ג. נניח שהרוויחו 20 ש"ח. רשמו משוואה ושרטטו קו גובה מתאים.

ד. רשמו שיעורי נקודה, שנמצאת על הישר ובתחום האפשרי.

ה. מכרו 2 ק"ג אקרילן. כמה ק"ג צמר יש למכור, כדי להרוויח 20 ש"ח?

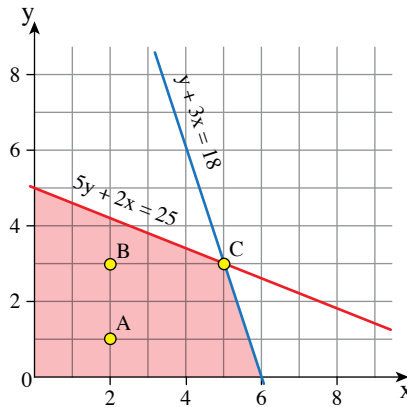
ו. מכרו 3 ק"ג אקרילן. כמה ק"ג צמר יש למכור, כדי להרוויח 20 ש"ח.

ז. מה ערכה של פונקציית המטרה בנקודה $(1, 7)$? האם ייצור כזה אפשרי?

ח. שרטטו קו גובה מקביל לישר ששרטטתם בסעיף ג'. מה משוואתו?



1. א. נתונה פונקציית המטרה: $f(x, y) = 6x + 3y$. שרטטו במערכת הצירים את הישר שמשוואתו $6x + 3y = 24$. מה ערך פונקציית המטרה בנקודות על הישר ששרטטתם?



ב. הניחו ישר על הישר ששרטטתם, והזיזו אותו במקביל לישר המשוורטט, עד שיעבור דרך A. מה ערך פונקציית המטרה ב-A?

ג. הזיזו את הישר במקביל, לכיוון ראשית הצירים, וקבעו אם ערך פונקציית המטרה גדל או קטן.

ד. באיזה כיוון יש להזיז את הישר, אם רוצים להגדיל את ערך פונקציית המטרה?

ה. הזיזו את הישר במקביל (כך שערך פונקציית המטרה יגדל) עד יציאתו מהתחום האפשרי. מה ערך פונקציית המטרה בנקודה זו?

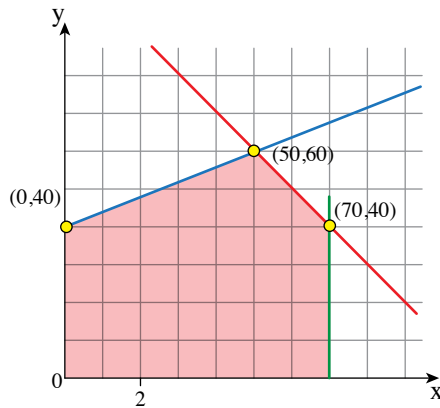
ו. מהו הערך המקסימלי של פונקציית מטרה בתחום האפשרי?

כל קו גובה מבטא ערך של פונקציית מטרה. הזזה מקבילה לכיוון אחד מגדילה את ערך הפונקציה, והזזה לכיוון השני מקטינה אותו.

בתרגיל הקודם ראתם, שהזזה עד לקודקוד הגדילה את ערך פונקציית המטרה עד למקסימום בתחום האפשרי.



2. נתון תחום אפשרי משורטט, ופונקציית מטרה $f(x, y) = 5x + y$.



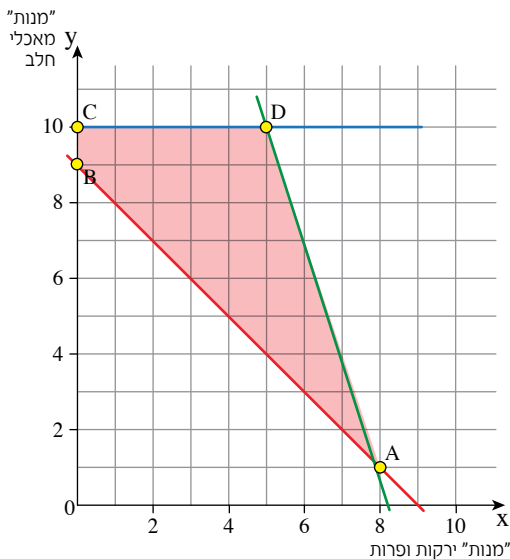
א. השלימו למשוואת ישר כלשהו, $5x + y = \square$, ושרטטו את הישר.

ב. הניחו ישר על הישר ששרטטתם, והזיזו במקביל, כך שערך פונקציית המטרה יגדל.

ג. באיזו נקודה בתחום האפשרי מתקבל הערך הגבוה ביותר?
מה ערך פונקציית המטרה בנקודה זו?



3. בחישוב קלוריות נקרא לכל 100 גר' "מנה".
במנה אחת של פירות וירקות 40 קלוריות.
במנה אחת של מאכלי חלב 70 קלוריות.



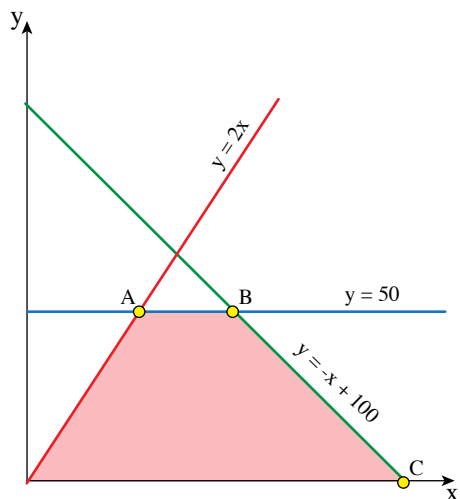
א. רשמו פונקציית מטרה למספר הקלוריות המתקבל מ x מנות של ירקות ופירות ו- y מנות של מאכלי חלב.

ב. רשמו משוואת קו גובה כלשהו (המתאים לפונקציית המטרה), ושרטטו במערכת הצירים.

ג. כמובן שמעוניינים להפחית את כמות הקלוריות ככל האפשר. הזיזו את הישר בכוון המתאים. באיזו נקודה בתחום מתקבל מינימום קלוריות? מהו הערך המינימלי?



4. א. רשמו את שיעורי הקדקודים של התחום האפשרי המשוורטט: A, B, C ורשמו יחידות על הצירים. (דייקו עד כמה שאפשר).



ב. נתונה פונקציית מטרה $f(x, y) = 2x + y$. השלימו למשוואת ישר כלשהו $2x + y = \square$ ושרטטו.

ג. הניחו ישר על הישר ששרטטת, והזיזו במקביל, כך שערך פונקציית מטרה יגדל. באיזו נקודה בתחום מתקבל הערך הגבוה ביותר של פונקציית המטרה, מהו?

ד. נתונה פונקציית מטרה $f(x, y) = x + y$. השלימו למשוואת ישר כלשהו $x + y = \square$ ושרטטו.

ה. הזיזו ישר במקביל לישר ששרטטתם, כך שערך פונקציית המטרה יגדל.

- היכן בתחום מתקבל הערך הגבוה ביותר?

- כמה נקודות מתאימות לערך זה?

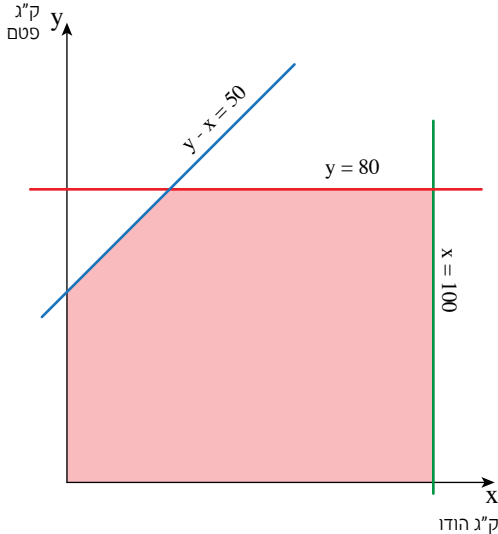
5. מתי, לדעתכם, יהיה לפונקציית המטרה בתחום נתון יותר מערך מקסימלי אחד?



הערך המקסימלי, או המינימלי, של פונקציית מטרה בתחום נתון, מתקבל באחד הקדקודים, או בנקודות שעל אחת הצלעות של התחום.

6. התחום האפשרי מתאר אפשרויות שונות של ייצור מאכלי עוף בשעה, במפעל "עוף-עף".
 x מייצג מספר ק"ג של בשר הודו, y מייצג מספר ק"ג של פטם.

א. חשבו את שיעורי הקדקודים של התחום האפשרי.
 סמנו יחידות על הצירים.



ב. מק"ג בשר הודו מרוויחים 2 ש"ח.

מק"ג בשר פטם מרוויחים 4 ש"ח.
 רשמו פונקציית מטרה.

ג. השלימו את פונקציית המטרה למשוואת
 ישר כלשהו, ושרטטו.

ד. הזיזו ישר במקביל, כך שערך פונקציית
 מטרה יגדל. לאיזה קדקוד הגעתם?
 מהו הרווח המקסימלי האפשרי?

ה. כמה ק"ג מכל סוג אפשר לייצר, ולקבל
 רווח מקסימלי?

7. א. שרטטו את התחום האפשרי, המתאים למערכת האי שוויונות.

$$\begin{cases} x \leq 30 \\ y \geq 2x + 10 \\ y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

ב. חשבו או קראו את שיעורי הקדקודים.

ג. נתונה פונקציית מטרה $f(x, y) = x + 2y$.

ד. מצאו באיזה קדקוד ערך פונקציית מטרה הוא הגדול ביותר, ומה ערך פונקציית המטרה בנקודה זו?



8. בחנות יש מקרר, שיכול להכיל 60 ק"ג גלילה.

x מייצג את הכמות של גלילת וניל.

y מייצג את הכמות של גלילת שוקולד.

בעל החנות מוכר לכל היותר 50 ק"ג גלילת וניל, ולכל היותר 40 ק"ג גלילת שוקולד.

א. רשמו מערכת אי שוויונות מתאימה, ושרטטו תחום אפשרי.

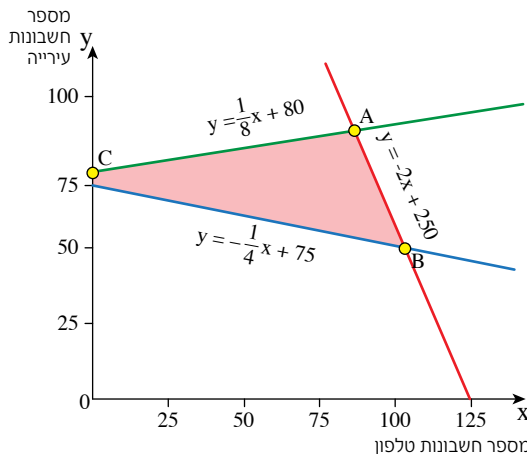
ב. מצאו את שיעורי הקדקודים.

ג. בעל החנות מרוויח 2 ש"ח מק"ג אחד של גלילת וניל, ו-3 ש"ח מק"ג אחד של גלילת שוקולד,

רשמו פונקציית מטרה.

כמה ק"ג מכל סוג כדאי לו למכור, כדי שהרווח יהיה מקסימלי.

9. התחום המשוורט מתאר מגבלות של עבודת מחשב, הנותן שירותים לחברת טלפונים ולעירייה.



א. זמן חישוב לחשבון טלפון - 1 שנייה.

זמן חישוב לחשבון עירייה - 5 שניות

רשמו פונקציית מטרה לזמן החישוב של x חשבונות טלפון ו-y חשבונות עירייה.

ב. מצאו באיזה קדקוד מתקבל **הערך הנמוך** ביותר של הזמן.

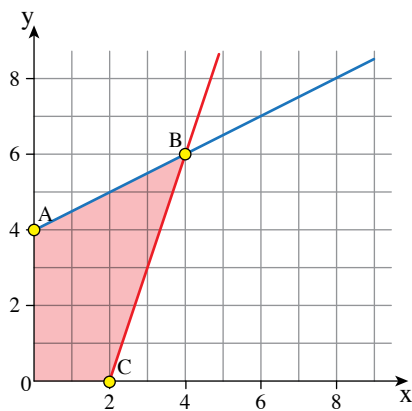
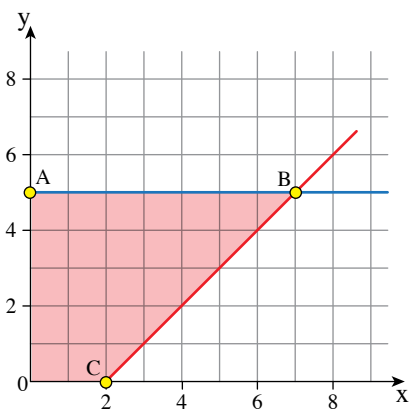
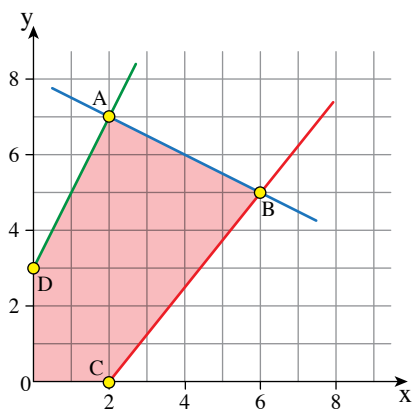
חשבו את שיעורי הקדקוד.

ג. כמה חשבונות מכל סוג ניתן לחשב בזמן המינימלי?

"חלוצים ואילוצים" - שאלות לסיכום

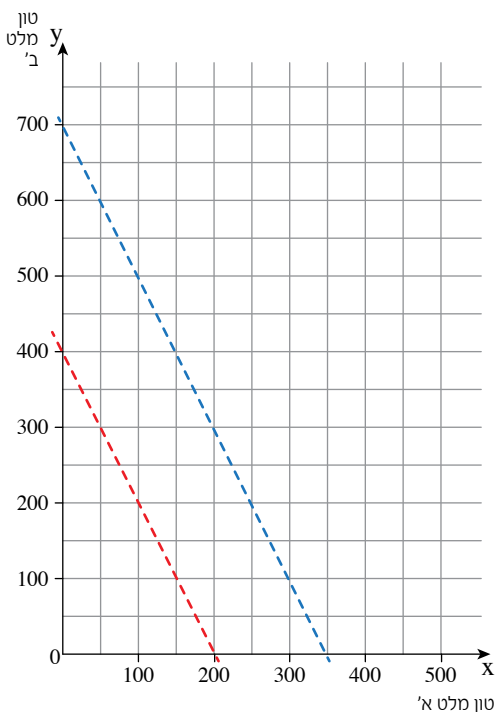


1. לצורך הקמת מפעל, הכינו שלושה תחומים אפשריים שונים, המתארים את האילוצים.



א. ידוע, כי הרווח ממוצר א' 2 ש"ח, ומוצר ב' 3 ש"ח.
מייצרים x מוצרים מסוג א' ו- y מוצרים מסוג ב'.
רשמו פונקציית מטרה.

ב. מי מהתחומים מאפשר רווח מקסימלי?



2. בית חרושת מייצר שני סוגי מלט.

x - משקל בטונות של מלט מסוג א'.

y - משקל בטונות של מלט מסוג ב'.

א. משקל המלט משני הסוגים יחד אינו עולה על 300 טון ליום. רשמו אי שוויון מתאים.

ב. משקל המלט מסוג א' אינו עולה על 200 טון.

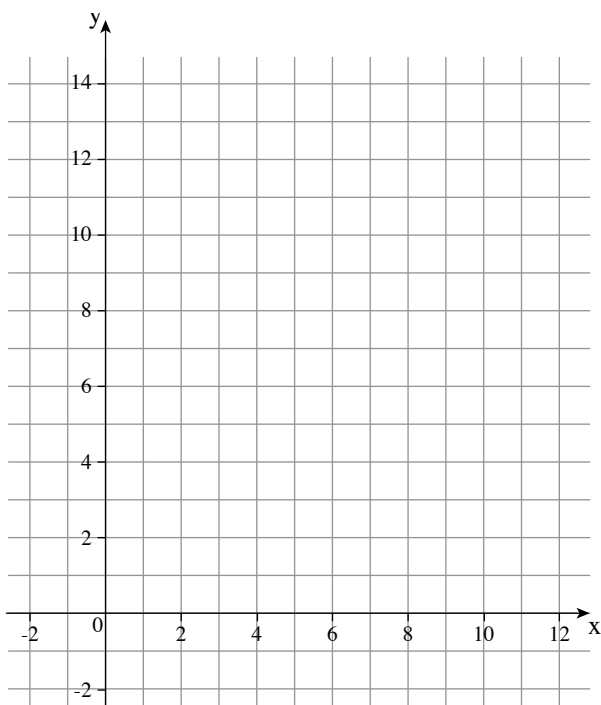
משקל המלט מסוג ב' אינו עולה על 150 טון. רשמו אי שוויונות מתאימים.

ג. שרטטו את התחום האפשרי במערכת הצירים.

ד. הרווח מטון אחד של מלט מסוג א' הוא 2 ש"ח, וממלט מסוג ב' הוא 1 ש"ח.

- רשמו את פונקציית המטרה.

- איזה קדקוד של התחום מאפשר רווח מקסימלי?



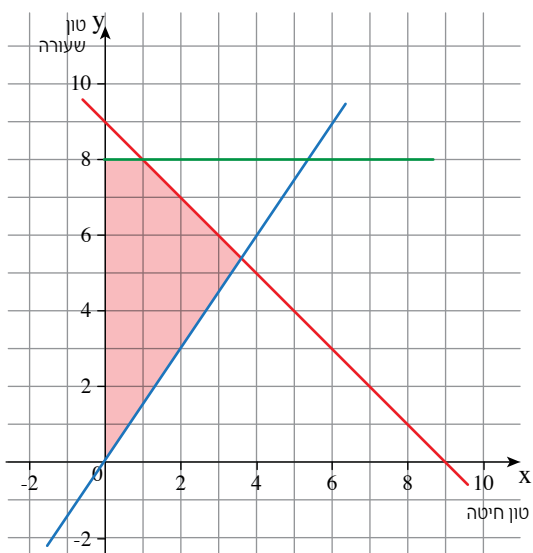
3. שרטטו את התחום המתאים

למערכת האי שוויונות.

$$\begin{cases} x \leq 10 \\ x + 2y \geq 4 \\ x - y \geq -4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



4. א. רשמו מערכת אי שוויונות מתאימה לתחום המשרטט.



- ב. x מייצג משקל, בטונות, של חיטה שקוצרים ביום.
 y מייצג משקל, בטונות, של שעורה שקוצרים ביום.
 נסו לתאר במילים את האילוצים המתוארים באי שוויונות.
- ג. על טון חיטה מרוויחים 100 ש"ח, ועל טון שעורה 50 ש"ח.
 רשמו פונקציית מטרה, ומצאו את הרווח המקסימלי האפשרי.

מי ירוויח יותר? עוד שאלות לסיכום



1. 3 קונדיטוריות מייצרות עוגות שוקולד ועוגות גבינה.

x מייצג מס' עוגות שוקולד, שנמכרות בשעה.

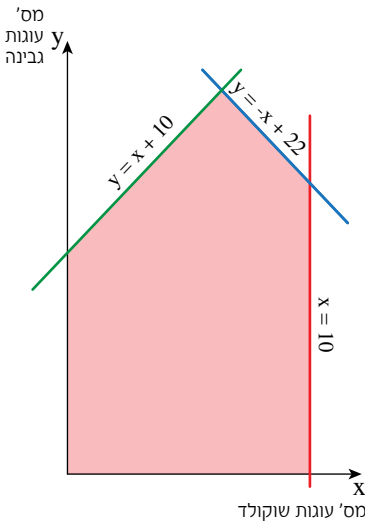
y מייצג מס' עוגות גבינה, שנמכרות בשעה.

לפניכם תחום אפשרי, שנקבע לפי אילוצים שונים,

ומתאים ל- 3 הקונדיטוריות.

א. מצאו את שיעורי הקודקודים,

ורשמו, בערך, יחידות על הצירים.



ב. קונדיטוריה "חיים" מוכרת עוגת שוקולד ליחיד ב- 5 ש"ח,

ועוגת גבינה ב- 3 ש"ח.

קונדיטוריה "איציק" מוכרת עוגת שוקולד ב- 3 ש"ח,

ועוגת גבינה ב- 4 ש"ח.

קונדיטוריה "מלכה" מוכרת עוגת שוקולד ב- 4 ש"ח,

ועוגת גבינה ב- 5 ש"ח.

רשמו פונקציית מטרה למכירות של כל קונדיטוריה.

ג. מצאו עבור כל קונדיטוריה את ההכנסה המקסימלית

האפשרית.

ד. למי מהן ההכנסה המקסימלית הגדולה ביותר?

תרגילים

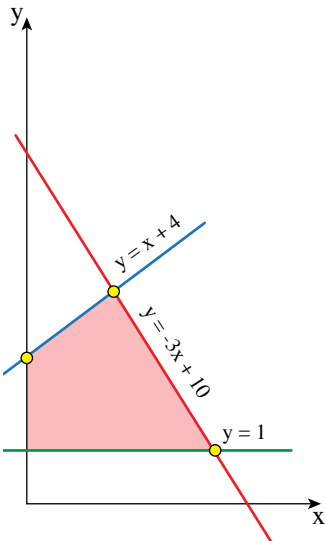
2. לפניכם שרטוט של תחום אפשרי.

א. רשמו את מערכת האי שוויונות המתאימה.

ב. מצאו את שיעורי הקדקודים. סמנו יחידות על הצירים.

ג. באיזו נקודה מקבלת פונקציית המטרה $f(x, y) = 2x + y$ ערך

מקסימלי, ומהו הערך המקסימלי?





3. בבית חרושת מייצרים מוטות של ברזל ושל נחושת.

x מייצג משקל בטונות של מוטות ברזל.

y מייצג משקל בטונות של מוטות נחושת.

בשעה מייצרים, לכל היותר, 8 טון של מוטות משני הסוגים יחד.

בשעה חייבים לייצר, לכל הפחות, 3 טון של מוטות משני הסוגים יחד.

כמות הברזל שמייצרים בשעה היא לכל היותר 7 טון.

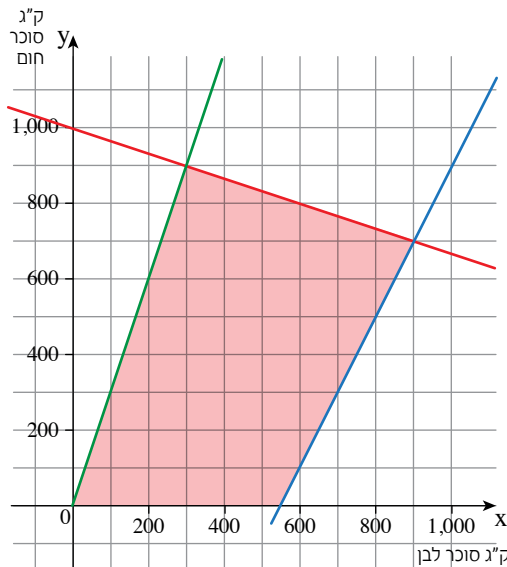
כמות הנחושת שמייצרים בשעה היא לכל היותר 5 טון.

א. רשמו מערכת אי שוויונות, ושרטטו את התחום האפשרי.

ב. מכל טון של ברזל מרוויח ביהח"ר 500 ש"ח, ומכל טון נחושת 1000 ש"ח.

רשמו פונקציית מטרה, ומצאו מהו הרווח המקסימלי האפשרי.

4. הגרף מתאר אפשרויות של ייצור סוכר לבן וחום.



מק"ג אחד של סוכר לבן מרוויח 0.5 ש"ח.

מק"ג אחד של סוכר חום מרוויח 1 ש"ח.

רשמו פונקציית מטרה, ומצאו מהו הרווח הגדול ביותר האפשרי.



5. במפעל מייצרים חומר להדברת נמלים וחומר להדברת תיקנים (ג'וקים).

x מייצג משקל בק"ג של חומר להדברת נמלים, המיוצר ביום.

y מייצג משקל בק"ג של חומר להדברת תיקנים, המיוצר ביום.

- בסה"כ מייצרים לא יותר מ- 500 ק"ג חומרי הדברה ביום.

- כמות החומר המיוצר ביום להדברת תיקנים היא לפחות 50 ק"ג.

- כמות החומר המיוצר להדברת תיקנים היא יותר מפי 2 מהכמות להדברת נמלים.

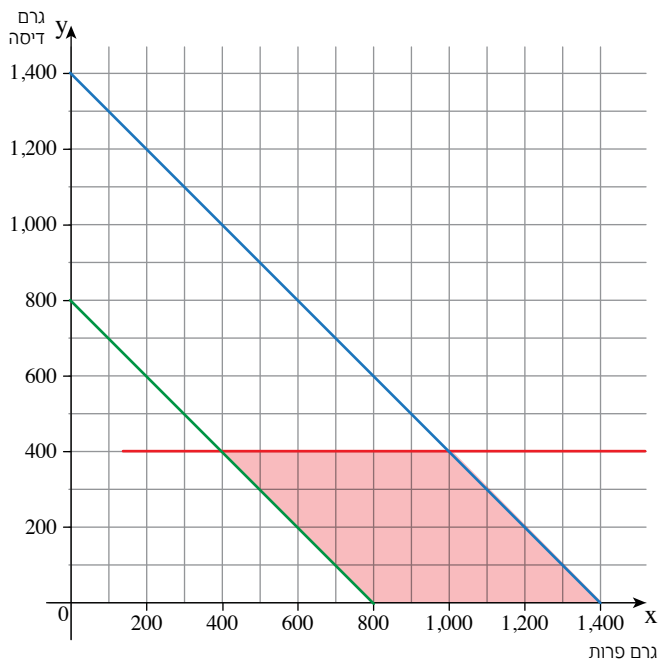
א. רשמו מערכת אי שוויונות מתאימה, ושרטטו במחברתכם את התחום האפשרי. (בחרו ביחידת מידה של 50 ק"ג)

ב. מכל ק"ג של חומר להדברת נמלים מרוויחים 2 ש"ח.

מכל ק"ג של חומר להדברת תיקנים מרוויחים 1.5 ש"ח.

רשמו פונקציית מטרה, מצאו מהו הרווח המקסימלי האפשרי.

6. הגרף מתאר אפשרויות של תפריט יומי לתינוקות.



בכל גרם פירות יש 0.007 גרם ברזל, ובכל גרם דיסה יש 0.005 גרם ברזל.

א. רשמו פונקציית מטרה למשקל הברזל ב x גרם דיסה ו- y גרם פירות.

ב. מצאו תפריט יומי אפשרי, שבו כמות הברזל מקסימלית.

מה כמות הברזל בתפריט שמצאתם?

... ולזהי רק ההתחלה של דעיות תכנון דלא כלה...

ארגון נתונים בתכנון לינארי

עד כה הכרתם כלים לפתרון בעיות פשוטות בתכנון לינארי. בבעיות עם מספר רב יותר של אילוצים, נוח להשתמש בטבלה לארגון הנתונים. נדגים זאת בשאלות הבאות:

1. מפעל מייצר שני סוגי מיצים: מיץ תפוזים ומיץ ענבים. בייצור שלושה שלבים: סחיטה, ערבוב, מילוי. הזמן הנדרש לכל שלב מתואר בטבלה:

סוג המיץ	סחיטה	ערבוב	מילוי
תפוזים	8 דקות לליטר	2 דקות לליטר	5 דקות לליטר
ענבים	3 דקות לליטר	10 דקות לליטר	4 דקות לליטר

א. כמה דקות דרושות לסחיטה של 3 ליטר מיץ תפוזים?

לערבוב של 3 ליטר מיץ תפוזים?

למילוי של 3 ליטר מיץ תפוזים?

חשבו כמה דקות דרושות לייצור כולל של 3 ליטר מיץ תפוזים.

רשמו פונקציית המטרה למספר הדקות הדרושות לייצור כולל של x ליטר מיץ תפוזים.

ב. חשבו כמה דקות דרושות לסחיטה של 4 ליטר מיץ תפוזים ו- 5 ליטר מיץ ענבים.

ג. רשמו פונקציית מטרה למספר הדקות הדרושות לסחיטה של x ליטר מיץ תפוזים ו- y ליטר מיץ ענבים.

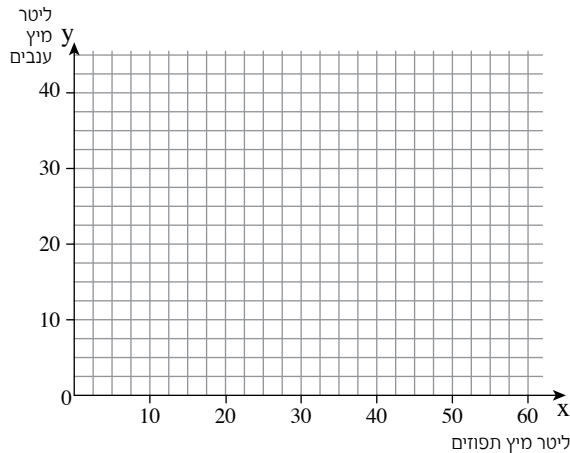
ד. רשמו פונקציית מטרה למספר הדקות הדרושות לערבוב של x ליטר מיץ תפוזים ו- y ליטר מיץ ענבים.

ה. רשמו פונקציית מטרה למספר הדקות הדרושות למילוי של x ליטר מיץ תפוזים ו- y ליטר מיץ ענבים.

ו. ביום מסוים פרצה במפעל שביתה לאחר שעתיים של עבודה (120 ד') רשמו משוואות מתאימות.

ז. שרטטו את הישרים שבסעיף ו'.

(צבעו שטח המתאים לייצור אפשרי של מיץ תפוזים ומיץ ענבים.)



ח. האם אפשר ביום זה לסיים יצור של 10 ליטרים מיץ תפוזים ו-10 ליטרים של מיץ ענבים? הסבירו.

האם אפשר להספיק לייצר 10 ליטרים של מיץ תפוזים ו-8 ליטרים מיץ ענבים? הסבירו.

תרגילים 4 ו-5 בהמשך דומים לתרגיל 1, תוכלו להיעזר בפתרון של תרגיל 1 כדי לפתור אותם.

2. מפעל מייצר שני סוגי מרגרינה: דלת-קוריות ורגילה. הייצור נעשה בשלושה שלבים:

ייצור מרגרינה דלת-קלוריות:

משך הבישול: 30 דקות לק"ג.

ערבוב: 5 דקות לק"ג.

מיצוק: 2 דקות לק"ג.

ייצור מרגרינה רגילה:

משך הבישול: 10 דקות לק"ג.

ערבוב: 15 דקות לק"ג.

מיצוק: 5 דקות לק"ג.

א. הכינו טבלה מתאימה לנתונים ורשמו אותם בתוכה.

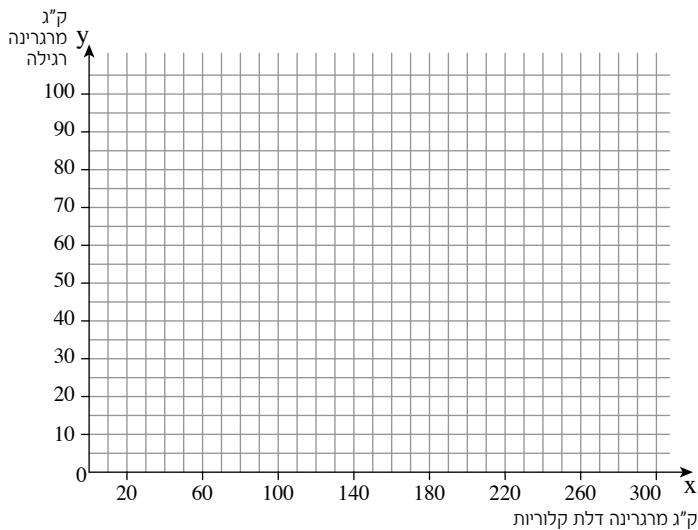
ב. מהו זמן הבישול של 3 ק"ג מרגרינה דלת-קלוריות, ו-5 ק"ג מרגרינה רגילה.

ג. האם ניתן להספיק לבשל 10 ק"ג מרגרינה דלת-קלוריות ו-5 ק"ג מרגרינה רגילה במשך שעתיים?

ד. רשמו פונקציית מטרה לזמן הבישול של x ק"ג מרגרינה דלת-קלוריות ו- y ק"ג מרגרינה רגילה.

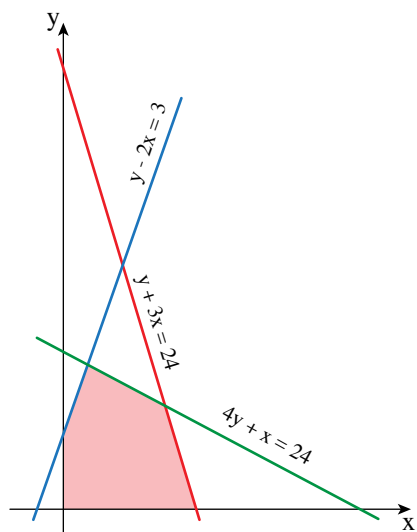
הזמן המוקצב לבישול הוא 10 שעות (____ דקות). רשמו אי-שוויון מתאים.

ה. הזמן המוקצב לערבוב הוא: 12 שעות.
 הזמן המוקצב למיצוק הוא: 8 שעות. רשמו עוד שני אי שוויונות.
 שרטטו גרף של האי שוויונות שרשמתם.



האם ניתן בזמן המוקצב לייצר 20 ק"ג מרגרינה רגילה ו- 30 ק"ג מרגרינה דלת-קלוריות?
 האם ניתן בזמן המוקצב לייצר 20 ק"ג מרגרינה רגילה ו- 20 ק"ג מרגרינה דלת-קלוריות?

כעת תוכלו לפתור את תרגיל 7 בתרגילים



3. נתון תחום אפשרי, המתאר ייצור של x ק"ג מוצר א' ו- y ק"ג מוצר ב'. רשמו את האי שוויונות המתוארים בתחום.
ידוע שהרווח לק"ג מוצר א' הוא 3 ש"ח ולק"ג מוצר ב' 5 ש"ח.

א. רשמו פונקציית מטרה לרווח המתקבל מייצור של x ק"ג מוצר א' ו- y ק"ג מוצר ב'.

ב. היכן יתקבל הרווח המקסימלי? כמה ק"ג מכל מוצר כדאי לייצר? חשבו מהו הרווח המקסימלי.

תרגילים

4. הטבלה שלפניכם מתארת תהליך ייצור של שני סוגי מלח: מלח דק ומלח עבה.

סוג	זמן עיבוד	זמן אריזה
מלח דק	2 דקות לק"ג	5 דקות לק"ג
מלח עבה	3 דקות לק"ג	4 דקות לק"ג

א. חשבו כמה דקות דרושות לעיבוד של 10 ק"ג מלח דק ו- 15 ק"ג מלח עבה.
המכונה המעבדת יכולה לעבוד לכל היותר 15 שעות ביום, (900 דקות), והמכונה האורזת יכולה לעבוד לכל היותר 20 שעות (1200 דקות).

ב. ביום מסוים עיבדו רק מלח דק.

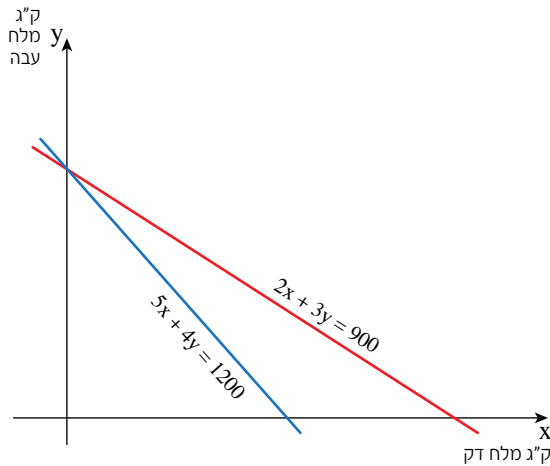
האם אפשר היה להספיק לעבד 300 ק"ג מלח דק?

ג. אם מייצרים רק מלח עבה, האם אפשר להספיק לעבד 300 ק"ג מלח עבה?
האם אפשר היה להספיק לעבד ולארז 300 ק"ג מלח עבה?

ד. רשמו פונקציית מטרה לזמן ה**עיבוד** של x ק"ג מלח דק ו- y ק"ג מלח עבה.
רשמו פונקציית מטרה לזמן ה**אריזה** של x ק"ג מלח דק ו- y ק"ג מלח עבה.

ה. רשמו אי שוויונות מתאימים.

- ו. לפניכם משוואות הישרים שהם גבולות התחומים.
התאימו לכל משוואה את האי שוויון וצבעו שטח מתאים.



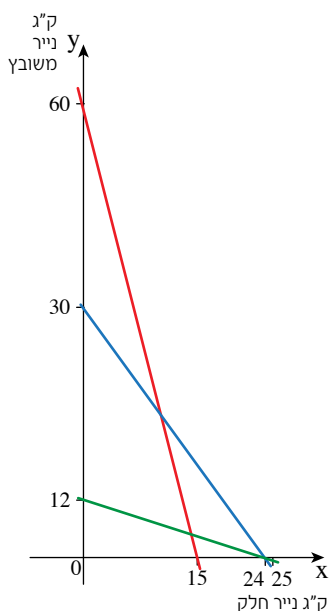
- ז. סמנו 2 נקודות באזור הצבוע, ורשמו במילים כמה ק"ג מכל סוג מייצרים עפ"י נקודות אלה, ומהו זמן העיבוד והאריזה.

5. מפעל מייצר שני סוגי נייר: משובץ וחלק.
תהליך הייצור מורכב מהשלבים הבאים: הרכבת העיסה, ערבוב ועיבוד.
בטבלה נתונים פרטי הייצור **בדקות לק"ג**.

סוג	הרכבת העיסה	ערבוב	עיבוד
נייר חלק	20	10	8
נייר משובץ	5	8	15

- א. כמה דקות דרושות להרכבת עיסה של 20 ק"ג נייר חלק ו- 10 ק"ג נייר משובץ?
כמה דקות דרושות לערבוב עיסה של 20 ק"ג נייר חלק ו- 10 ק"ג נייר משובץ?
כמה דקות דרושות לייצור כולל של 20 ק"ג נייר חלק?
במחזור ייצור אחד:
המכונות המרכיבות את העיסה יכולות לפעול 5 שעות לכל היותר (שהן _____ דקות).
המכונות המערבבות יכולות לפעול 4 שעות לכל היותר (שהן _____ דקות).
המכונות המעבדות יכולות לפעול 3 שעות (שהן _____ דקות).
- ב. רשמו פונקציית מטרה לזמן העיבוד של x ק"ג נייר חלק ו- y ק"ג נייר משובץ, ורשמו אי שוויון מתאים.
- ג. רשמו שני אי שוויונות נוספים, המתאימים לזמן **ההרכבה** ולזמן **הערבוב**.

ד. לפניכם הישרים שבגבולות האי שוויונות. התאימו את המשוואות לישרים וצבעו אזור המתאים לא שוויונים.



ה. אם מייצרים רק נייר חלק, כמה ניתן לייצר במחזור ייצור אחד? אילו מכונות אינן מנוצלות בכל הזמן שניתן להן? הסבירו.

6. נתונה מערכת האילוצים הבאה:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 180 \\ x + y \leq 90 \\ y - x \geq -50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

א. שרטטו את התחום האפשרי.

(כדאי לחלק את הצירים ליחידות של 20).

ב. נתונה פונקציית המטרה: $f(x, y) = 2x + 10y$. שרטטו קו גובה כלשהו, ורשמו את ערכה של פונקציית המטרה בנקודות על הקו הזה.

ג. מצאו את ערכי x ו y , עבורם מקבלת פונקציית המטרה ערך מקסימלי בתחום האפשרי. חשבו ערך זה.

7. מפעל מייצר שני סוגי סלטים: סלט חמוץ וסלט חריף.

ייצור סלט חמוץ: משך הבישול 20 דקות לק"ג.

משך הערבוב: 5 דקות לק"ג

ייצור סלט חריף: משך הבישול 10 דקות לק"ג.

משך הערבוב: 10 דקות לק"ג

א. הכינו טבלה מתאימה לנתונים, ורשמו אותם בתוכה.

ב. מהו זמן הבישול של 5 ק"ג סלט חמוץ ו- 10 ק"ג סלט חריף?

ג. האם ניתן להספיק לבשל במשך שעתיים 3 ק"ג סלט חמוץ ו- 2 ק"ג סלט חריף?

ד. רשמו פונקציית מטרה לזמן הבישול של x ק"ג סלט חמוץ ו- y ק"ג סלט חריף.

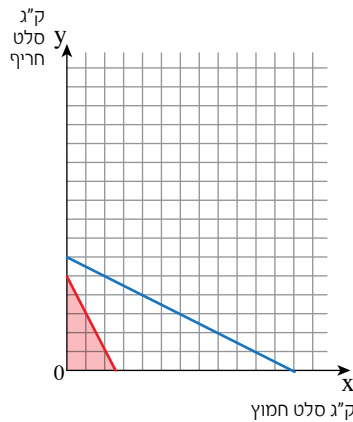
ה. הזמן המוקצב לבישול הוא 8 שעות (____ דקות). רשמו אי שוויון מתאים.

ו. הזמן המוקצב לערבוב הוא 10 שעות. רשמו אי שוויון מתאים.

ז. לפניכם גרף של האי שוויונות שרשמתם. התאימו לכל ישר את המשוואה.

ח. בחרו נקודה באזור הצבוע ורשמו במילים מה היא מתארת.

ט. האם קיים אילוף, שהורדתו לא תשנה את הפתרון? אם כן - רשמו מהו ונמקו.



"הכל פתוח"...



1. נתונה מערכת האילוצים הבאה:



$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 50 \\ y \leq 2x + 40 \end{cases}$$

א. שרטטו את התחום האפשרי; מה המיוחד בתחום הזה?

ב. נתונה פונקציית המטרה $f(x, y) = 3x + 5y$

שרטטו קו גובה מתאים למקרה שבו ערך פונקציית המטרה הוא 100.

הזיזו את קו הגובה במקביל לקו המשוורטט, ובדקו מה קורה לערכה של פונקציית המטרה בהזזה "כלפי מעלה" ובהזזה "כלפי מטה".

היכן, בתחום האפשרי, מקבלת פונקציית המטרה ערך מינימלי?
האם יש ערך מקסימלי לפונקציית המטרה, במסגרת התחום האפשרי? נמקו.

בתחום פתוח, לא תמיד מקבלת פונקציית המטרה ערך מקסימלי או מינימלי, יש לבדוק על פי פונקציית המטרה הנתונה, כלומר, בעזרת קווי הגובה המתאימים.

2. נתונה מערכת האילוצים הבאה:



$$\begin{cases} y - x \leq 3 \\ 5y - x \geq -10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

א. שרטטו את התחום האפשרי.

ב. נתונה פונקציית המטרה
בדקו אם פונקציית המטרה מקבלת מקסימום או מינימום בתחום.

ג. נתונות עוד שתי פונקציות מטרה:

ii) $f(x, y) = x - 2y$

iii) $f(x, y) = x - y$

בדקו לגבי כל אחת מהן, אם היא מקבלת מינימום או מקסימום בתחום.
האם יש יותר מערך אחד כזה בתחום?

3. רשמו מערכת אי שוויונות, כך שהתחום המשותף המתאים להם יהיה פתוח, ושרטטו את התחום.

4. במפעל מייצרים בשעה לפחות 4 ק"ג ריבת משמש ולפחות 5 ק"ג ריבת שזיפים.

ידוע גם, שהמשקל של ריבת המשמש הוא לכל היותר 10 ק"ג יותר מהמשקל של ריבת השזיפים.

א. רשמו מערכת אי שוויונות מתאימה, כאשר x מייצג משקל בק"ג של ריבת משמש, ו- y מייצג משקל בק"ג של ריבת שזיפים.

ב. שרטטו תחום אפשרי מתאים.

ג. עלות הייצור היא 5 ש"ח לק"ג ריבת משמש, ו-7 ש"ח לק"ג ריבת שזיפים. רשמו פונקציית מטרה, $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ ומצאו עלות מינימלית. (מצאו תחילה כמה יש לייצר מכל סוג כדי לקבל עלות מינימלית).

5. נתונה מערכת אי שוויונות:

$$\begin{cases} y \geq 2 \\ x \leq -1 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$$

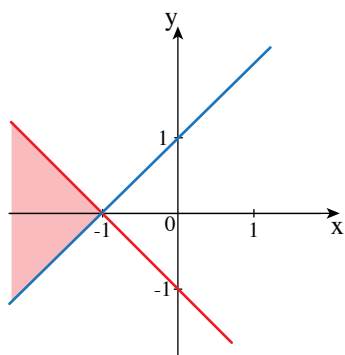
א. שרטטו את התחום המשותף.

ב. הוסיפו אי שוויון כרצונכם, כך שהתחום הנ"ל "יסגר", ושרטטו בהתאם.

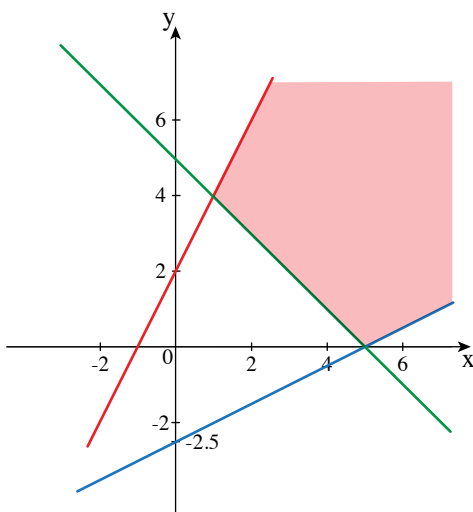
הערה: בשאלות הבאות (6, 7) ניתן להשתמש בגאוגברה, או תוכנה גרפית אחרת, לצורך בקרה.

6. רשמו מערכות אי שוויונות, המתאימות לתחומים הפתוחים הבאים:

ב.



א.



7. רשמו מערכת של 3 אי שוויונות לפחות, כך שהתחום המשותף המתאים להם יהיה פתוח, וכולו מעל ציר ה- x . (תוכלו לשרטט תחילה תחום כזה).

8. מצאו את נקודות המקסימום והמינימום של פונקציית המטרה:
 $f(x, y) = 5 - 5x + 8y$ במסגרת האילוצים:

$$\begin{cases} x \leq 8 \\ x \geq 2 \\ y \geq -3 \\ 3x + 4y \leq 24 \end{cases}$$

9. תזונאית מעוניינת שאדם הבא אליה להרכיב תפריט יקבל שני סוגי ויטמינים. הכמות המינימלית ההכרחית היא 260 מ"ג מכל סוג ויטמינים לשבוע. שני הסוגים נמצאים בתפוחי אדמה ובסלק בלבד. סמנו ב- x את משקל תפוחי האדמה וב- y את משקל הסלק.

	1 ק"ג תפוחי אדמה	1 ק"ג סלק
כמות ויטמין סוג I	20 מ"ג	60 מ"ג
כמות ויטמין סוג II	50 מ"ג	20 מ"ג

א. רשמו אי שוויונות מתאימים ושרטטו את התחום האפשרי.

ב. ידוע, כי מחיר ק"ג תפוחי אדמה 20 ש"ח, ומחיר ק"ג סלק 15 ש"ח, רשמו פונקציית מטרה $f(x, y)$, ומצאו כמה ק"ג מכל סוג יש לאכול לפי ההוראות, כדי שההוצאות יהיו מינימליות.

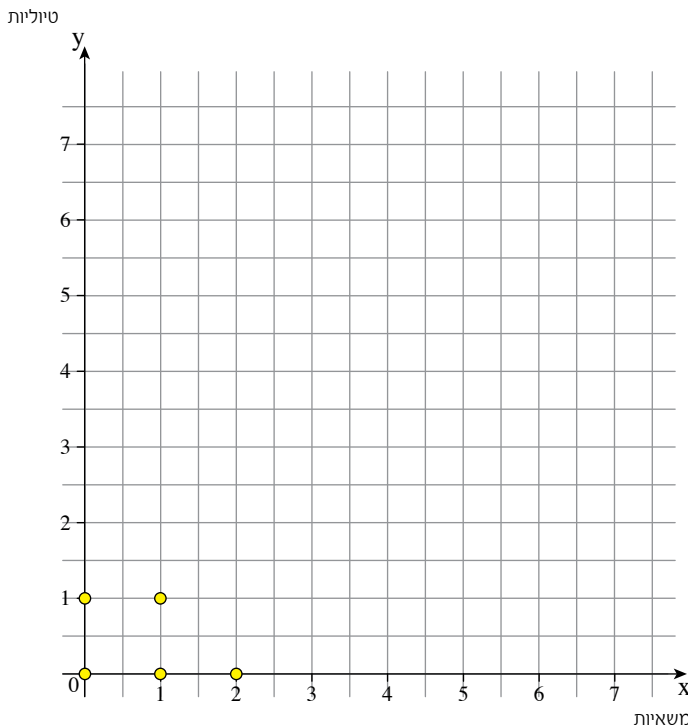
ג. מהן ההוצאות המינימליות?

ומה אם מתעניינים רק בנקודות שלמות?

1. באילו מהמקרים הבאים המשתנים x ו- y מקבלים ערכים טבעיים?
 - א. - רוצים למצוא מקסימום רווח ממכירת כמויות של עגבניות ושל מלפפונים.
 - ב. - תחום אפשרי מתאר אילוצים של מפעל המייצר שולחנות וכסאות.
 - ג. - פונקציית המטרה מתארת זמן פעולה.
 - ד. - פונקציית המטרה מתארת מספר נקודות המתקבל מ- x תשובות נכונות ו- y תשובות לא נכונות.

2. חברת "המטייל" משכירה מכוניות לטיולים. לחברה יש 5 משאיות ו- 7 טיוליות. בית ספר שוכר x משאיות ו- y טיוליות.

- א. רשמו אי שוויונות מתאימים. בשרטוט מסומנות 5 נקודות מהתחום האפשרי.



- ב. המשיכו בסימון נקודות התחום האפשרי. כמה נקודות בתחום האפשרי? הסבירו.
- ג. שכירת משאית ליום עולה 400 ש"ח ושכירת טיולית עולה 200 ש"ח. רשמו פונקציית מטרה למחיר שתגבה חברת "המטייל" $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$

ד. מצאו אפשרות של מספר משאיות ומספר טיוליות המתאים לרווח יומי של 3000 ש"ח.
כמה אפשרויות בתחום האפשרי מתאימות לרווח של 3000 ש"ח?
רשמו את כולן.

ה. סמנו את הנקודה המתאימה לרווח המקסימלי האפשרי (מסעיף א')

3. בי"ס "ארזים" רוצה לשכור משאיות וטיוליות מחברת ה"מטייל" ליום אחד, עבור 200 נוסעים לכל היותר.

משאית יכולה להכיל 50 נוסעים, וטיולית יכולה להכיל 20 נוסעים.

חברת ה"מטייל" יכולה לספק לבי"ס "ארזים" 3 משאיות לכל היותר ו- 7 טיוליות לכל היותר.

יחד עם זאת חברת ה"מטייל" מוכנה לשלוח כלי רכב רק אם מספר המקומות הכולל שבהם יהיה לפחות 100.

ביה"ס, לעומת זאת, מעוניין שלא יסעו יותר מ- 200 תלמידים.

x מייצג את מספר המשאיות ו- y מייצג את מספר הטיוליות.

א. רשמו מערכת אי שוויונות לבעיה ושרטטו את התחום האפשרי.

שכירת משאית ליום עולה 400 ש"ח ושכירת טיולית ליום עולה 200 ש"ח.

ב. בתחום ששרטטתם, כולל הקויים שתוחמים אותו, נמצאות 17 נקודות ששיעוריהן מספרים שלמים.
בחרו 2 נקודות, ורשמו את כל המשתמע מהן: מספר המשאיות והטיוליות, מס' הנוסעים ועלות השכירה.

בסופו של דבר התברר, שיצאו לטיול 170 נוסעים.

ג. המטרה של חברת ה"מטייל" לגבות את התשלום המקסימלי. כמה כלי רכב מכל סוג כדאי לה לשלוח, ומהו המחיר שתגבה? (נסו למצוא יותר מאפשרות אחת).

ד. מטרת הנהלת בית הספר, לעומת זאת, לשלם מחיר מינימלי. כמה כלי רכב מכל סוג תבקש ההנהלה לשלוח, וכמה תשלם עבור שכירתם?

בעיות שלמות

עד כה פתרנו בעיות שלמות עם מספר אילוצים קטן, או בעיות אחרות, בהן היו נתונות טבלאות, ונתבקש לבצע חלקים מפתרון הבעיה: שרטוט התחום האפשרי או רישום האי שוויונות, או מציאת הרווח המקסימלי. למשל, כשהתחום נתון וכו'.
מעתה נפתור בעיות, בהן נבצע את כל השלבים: רישום האי שוויונות. שרטוט התחום ומציאת המקסימום או המינימום.

1. יצרן מייצר שני סוגי ארונות, כמתואר בטבלה:

סוג ארונות	כמות העץ הדרושה לארון	מס' שעות עבודה לארון
מטבח	5 מ"ר לארון	10
בגדים	4 מ"ר לארון	20

כמות העץ שיש למפעל בסה"כ היא 120 מ"ר, ומספר שעות העבודה העומדות לרשותו הוא 450 לכל היותר.

- א. רשמו מערכת אילוצים, ושרטטו את התחום האפשרי.
- ב. הרווח הנקי לארון מטבח הוא 900 ש"ח, ולארון בגדים 600 ש"ח.
רשמו פונקציית מטרה לרווח המתקבל מייצור של x ארונות מטבח ו- y ארונות בגדים.
- ג. כמה ארונות מכל סוג על המפעל לייצר, כדי לקבל רווח מקסימלי, ומהו הרווח המקסימלי
2. האילוצים הם כמו בשאלה הקודמת, אבל הרווח הנקי לארון מטבח הוא 500 ש"ח, ולארון בגדים 1000 ש"ח. רשמו פונקציית מטרה מתאימה.

א. רשמו פתרון מתאים.

ב. רשמו את כל הפתרונות המתאימים.

ג. מצאו שני זוגות (x, y) , שעבורם הרווח של שני המפעלים זהה.

ד. האם תוכלו למצוא רווח זהה מקסימלי עבור שני המפעלים?

פתרתם בעיות שלמות, אולם עדיין בצעתם את העבודה ב- 3 שלבים:

- רישום אי שוויונות לצורך התחום האפשרי
רישום פונקציית המטרה
מציאת האופטימום, כלומר: מציאת מקסימום או מינימום.

בהמשך הסעיף תלמדו לפתור בעיות ללא פרוט השלבים האלה.
תוכלו לפתור כעת את שאלות 6, 7 שבתרגילים.

3. מפעל מייצר שני סוגי סלטים: סלט ירקות וסלט חצילים.
בתהליך הייצור שני שלבים: ערבוב ובישול.
פרטי הייצור מרוכזים בטבלה הבאה:

בישול	ערבוב	
4 דקות לק"ג	2 דקות לק"ג	סלט ירקות
3 דקות לק"ג	3 דקות לק"ג	סלט חצילים

במחזור ייצור אחד ניתן להפעיל את ציוד הערבוב למשך שתיים (120 דקות), ואת ציוד הבישול למשך 3 שעות (180 דקות).

הרווח הנקי של המפעל לק"ג סלט ירקות הוא 8 ש"ח, ולק"ג סלט חצילים - 10 ש"ח.
סמנו את הנתונים הקשורים באילוצים, ובסימון אחר הדגישו נתונים הקשורים בפונקציית המטרה.
רשמו אי שוויונות, ושרטטו את התחום האפשרי.
כמה ק"ג מכל סוג סלט כדאי למפעל לייצר, כדי לקבל רווח מקסימלי?

4. בנגריה מייצרים שולחנות וכיסאות, פרטי הייצור רשומים בטבלה:

שעות עבודה ליחידה	כמות עץ ליחידה	
4 ש'	0.2 מ"ק	כסא
3 ש'	0.5 מ"ק	שולחן

לרשות הנגריה עומדים 4 מ"ק עץ ו- 38 שעות ביום עבודה אחד.
מספר הכיסאות שמייצרים הוא לכל היותר פי 4 ממספר השולחנות.
הנגריה מרוויחה 100 ש"ח לכיסא, ומפסידה 300 ש"ח לשולחן.
כמה שולחנות וכמה כיסאות יש לייצר, כדי שהרווח הכללי יהיה מקסימלי? מהו הרווח המקסימלי?

זכרו, שלבי הפתרון הם:

הפרידו בין הנתונים.

רשמו אילוצים, שרטטו תחום אפשרי, רשמו פונקציית מטרה וענו על השאלה.

זכרו שלבים אלה גם בבואכם לפתור את הבעיות השלמות הבאות.

5. מפעל מייצר גלית וניל וגלית שוקולד.

התליך הייצור מתחלק לשני שלבים: בישול וקירור.

לייצור ק"ג גלית וניל זקוקים ל- 10 דקות בישול ו- 20 דקות קירור, ולייצור ק"ג גלית שוקולד זקוקים ל- 5 דקות בישול ו- 30 דקות קירור.

אפשר להפעיל את מכונת הבישול לכל היותר במשך 40 דקות, ואת מכונת הקירור - לכל היותר במשך 180 דקות

מק"ג גלית וניל מרוויחים 80 ש"ח, ומק"ג גלית שוקולד - 40 ש"ח.

רשמו את הנתונים בטבלה.

	זמן בישול לק"ג	זמן קירור לק"ג	רווח לק"ג
גלית וניל			
גלית שוקולד			

א. מהו הרווח המקסימלי, שיוכל המפעל להרוויח?

ב. אם מרווחים 50 ש"ח על כל ק"ג מכל סוג, מהו הרווח המקסימלי במקרה זה?

6. במפעל מייצרים שני סוגים של לחמניות: עם שומשום ובלי שומשום. ידוע כי לכל לחמניה עם שומשום דרושים 40 גר' בצק ו- 2 גר' שומשום. לכל לחמניה בלי שומשום דרושים 50 גר' בצק.

א. סדרו את הנתונים בטבלה הבאה:

	כמות הברצק הדרושה ללחמניה	כמות השומשום הדרושה ללחמניה
לחמניה עם שומשום		
לחמניה בלי שומשום		

ב. בכל מחזור ייצור עומדים לרשות המפעל 5 ק"ג בצק ו- 160 גר' שומשום.

רשמו מערכת אילוצים מתאימה לבעיה, ושרטטו את התחום האפשרי.

הרווח הנקי של המפעל ללחמניה עם שומשום הוא 20 אג', וללחמניה בלי שומשום 10 אג'.

x מייצג את מספר הלחמניות עם שומשום שמייצרים.

y מייצג את מספר הלחמניות בלי שומשום שמייצרים.

ג. רשמו פונקציות מטרה לרווח הנקי המתקבל $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$

ד. כמה לחמניות מכל סוג צריך המפעל לייצר במחזור ייצור, כדי לקבל רווח מקסימלי, מהו הרווח המקסימלי?

7. ועד עובדים במפעל מעוניין להזמין לעובדיו חבילות שי, המכילות שקיות עם פירות יבשים וחפיסות שוקולד.
- הוחלט כי כל חבילת שי תכיל לכל היותר 8 פריטים, משקלה יהיה לפחות 1000 גר', ונפחה לפחות 2000 סמ"ק.
- המשקל והנפח של שקית פירות יבשים ושל חפיסת שוקולד רשומים בטבלה הבאה:

	משקל	נפח
שקית פירות יבשים	100 גר'	500 סמ"ק
חפיסת שוקולד	200 גר'	100 סמ"ק

- מחיר שקית עם פירות יבשים 4 ש"ח, ומחיר חפיסת שוקולד 2 ש"ח.
- א. כמה שקיות של פירות יבשים וכמה חפיסות שוקולד כדאי למוכר לשים בכל חבילת שי כדי לגבות מחיר מקסימלי?
- ב. המטרה של ועד העובדים לשלם מחיר מינימלי.
- כמה שקיות פירות יבשים וכמה חפיסות שוקולד כדאי לו להזמין בכל חבילת שי?

שאלות נוספות לתרגול וחזרה.

8. לרשותו של חקלאי עומדים מקסימום 80 דונם, המתחלקים על פני שני סוגי גידולים (x דונם גידולי עגבניות ו- y דונם פלפלים).
- א. רשמו אי שוויון מתאים.
- גידול עגבניות דורש 4 ימי עבודה לדונם, וגידול פלפלים - יומיים לדונם.
- ב. רשמו פונקציית מטרה למספר הימים הנדרשים ל- x דונם גידולי עגבניות ו- y דונם גידולי פלפלים. ידוע שסך-הכל ימי העבודה לחודש, שניתן להשקיע בגידולים אלה, הוא מקסימום 200 ימים. ההכנסה לדונם גידולי עגבניות היא 1000 ש"ח, ולדונם גידולי פלפל 2000 ש"ח. שרטטו קו גובה מתאים להכנסה של 4000 ש"ח.
- ג. כמה דונם כדאי לחקלאי להקצות לכל סוג גידול, כדי שהכנסתו תהיה מקסימלית? נמקו.
- ד. אם ידוע שההכנסה לדונם עגבניות היא 1000 ש"ח, ולדונם פלפל 500 ש"ח, כיצד ישתנה הרווח המקסימלי? כמה פתרונות לבעיה? נמקו.

9. בתהליך כימי מפיקים מק"ג חומר גלם 3 חומרים שונים, בשני מפעלים שונים. להלן נתוני ההפקה.

מפעל א'	חומר A	חומר B	חומר C
מפעל א'	4 מ"ג	3 מ"ג	2 מ"ג
מפעל ב'	1 מ"ג	2 מ"ג	5 מ"ג

מסיבות שונות, מפיקים לפחות 140 מ"ג מחומר A, לפחות 180 מ"ג מחומר B, ולפחות 230 מ"ג מחומר C.

סמנו ב- x את משקל חומר הגלם במפעל א', וב- y את משקל חומר הגלם במפעל ב'.

הוצאות ההפקה הן 300 ש"ח לק"ג במפעל א' ו- 200 ש"ח לק"ג במפעל ב'.

- כמה ק"ג חומר גלם כדאי לרכוש מכל מפעל, כדי שיהיו הוצאות מינימליות?
- מהן ההוצאות המינימליות?

10. מבחן אמריקאי בנוי משלושה חלקים.

על הנבחן לענות לכל היותר על 10 שאלות מחלק א', 8 שאלות מחלק ב',

ולפחות על 5 שאלות מחלק ג'.

בסה"כ צריך הנבחן לענות על 15 שאלות

לרשות הנבחן לכל היותר 44 דקות לפתרון 15 השאלות, כאשר יש להקדיש 3 דקות לכל שאלה בחלק

א', 4 דקות לשאלה בחלק ב', ו- 2 דקות לשאלה בחלק ג'.

א. סמנו ב- x את מספר השאלות שפתר התלמיד בחלק א', ב- y את מספר השאלות שפתר בחלק ב'.

רשמו אי שוויונות מתאימים.

לכל שאלה מחלק א' מעניקים 6 נקודות, לכל שאלה מחלק ב' מעניקים 5 נקודות, ולכל שאלה מחלק

ג' מעניקים 4 נקודות.

רשמו פונקציית מטרה לסך כל הנקודות שמקבל תלמיד.

ב. כמה שאלות מכל פרק על התלמיד לפתור, כדי לקבל מספר נקודות מקסימלי, ומהו מספר הנקודות

המקסימלי?

ג. אם מעניקים 5 נקודות לשאלה מחלק א', 5 נקודות לכל שאלה מחלק ב' ו- 4 נקודות לכל שאלה

מחלק ג', כמה שאלות כדאי לפתור מכל פרק, כדי לקבל ניקוד מקסימלי? כמה פתרונות לשאלה?

רשמו אותם והסבירו.

הרווח המקסימלי בנקודה (40, 0)	תרגיל 1:	עמ' 7 - 8
משלוחים אפשריים: (1.5, 2.1), (1, 2), (2, 3)	תרגיל 11:	עמ' 9 - 16
$x + y \leq 150$	תרגיל 6:	עמ' 17 - 20
$y \leq x + 2$	תרגיל 5:	עמ' 29 - 36
$2x + y \leq 5$		
תשובה אפשרית: $y = 2$	תרגיל 6:	
$y \leq 3$	תרגיל 8:	
$y \geq -3x$		
$y \geq 3x$		
הנקודות המתארות משלוח של 20 טון ברזל נמצאות צלע המחברת את הקדקוד (20, 0) עם הקדקוד (10, 10)	תרגיל 13:	
(-3, 3), (0, 2), (-3, 3). נקודת החיתוך: (-3, 3)	תרגיל 5ב':	עמ' 37 - 39
$5x + 5y \leq 1000$	תרגיל 1ב':	עמ' 40 - 43
$x + y \leq 30$	תרגיל 2ד':	
$x \leq 20$		
$f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$	תרגיל 2א':	עמ' 44 - 47
(100, 40), (40, 160)	תרגיל 2ה':	
לדוגמה: $x = 9, y = 0$	תרגיל 4ג':	
1300 לא מתקבל.	תרגיל 6ז':	
הערך הגבוה ביותר מתקבל ב-A	תרגיל 8ד':	
$6x + 3y = 15$	תרגיל 1ב':	עמ' 52 - 56
390	תרגיל 2ג':	
390, מתקבל בנקודה A	תרגיל 3ג':	
150	תרגיל 7ד':	
מקסימום בנקודה (200, 100)	תרגיל 2:	עמ' 57 - 59
104 ש"ח	תרגיל 1:	עמ' 60 - 62
1150 ש"ח	תרגיל 4:	
מקסימום בנקודה (1400, 0)	תרגיל 6ב':	
$(6\frac{6}{11}, 7\frac{5}{13})$	תרגיל 3:	עמ' 63 - 69
מינימום בנקודה (50, 0). אין מקסימום	תרגיל 1:	עמ' 70 - 72

מינימום בנקודה (0, 0). אין מקסימום	תרגיל 2:	
$5x + 7y$, מינימום בנקודה (4, 5).	תרגיל 4:	
א. $x + y \geq 5$ ב. $y \leq -x - 1$	תרגיל 6:	
$y \geq \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$ $y \leq 2x + 2$		
מינימום בנקודה (6, -3), מקסימום בנקודה $(2, 4\frac{1}{2})$	תרגיל 8:	
(5, 7).	תרגיל 2:	עמ' 73 - 74
$50x + 20y \leq 200$	תרגיל 3:	
$0 \leq x \leq 3$		
$0 \leq y \leq 7$		
$50x + 20y \geq 100$		
מקסימום בנקודה (24, 0).	תרגיל 1:	עמ' 75 - 79
בנקודה (30, 20) - רווח מקסימלי של 440 ש"ח.	תרגיל 3:	
ב- (0, 160) רווח של 600 ש"ח.	תרגיל 3ג':	
200 ש"ח	תרגיל 4:	
א.: (0, 6) ב.: $(1\frac{1}{2}, 5)$	תרגיל 5:	
(18, 10)	תרגיל 6:	
מקסימום (6, 2), מינימום (4, 0).	תרגיל 8:	
מקסימום בנקודה (0, 80) והוא 160,000 ש"ח.	תרגיל 9:	
במקרה השני קו הגובה מתלכד עם צלע של התחום.		
מינימום 18,000 ש"ח.	תרגיל 10:	