

# ניתוח בעיות מילוליות במתמטיקה באמצעות אסטרטגיות מתחום האוריינות הלשונית

רחל קליין

## המניעים לבחירה בנושא

שנים רבות אני עוסקת בנושא של **שילוב** הבנה והבעה בתחומי דעת שונים (שלהב"ת), הן כמורה ללשון ולהבעה הן כמדריכת מורים. מודעות המורים לבעיות בהבנה בתחומי הדעת השונים גברה מאוד בשנים האחרונות. מורים רבים נעזרים בכלים אורייניים לפתרון בעיות בהבנה בדיסציפלינות שונות, הם מרבים להיוועץ במורי הלשון שבבית ספרם ונעזרים במנחים ובמנחות ללשון ולהבעה. בבתי ספר נוצרו קהילות שיח של מורים ממקצועות שונים, הדנים בבעיות בהבנה ולהבעה בתחומי דעת שונים.

לפני שנים אחדות ריכזתי השתלמות בנושא שלהב"ת באחד מבתי הספר הקיבוציים בצפון. בהשתלמות זו השתתפו מורים ממקצועות, כמו היסטוריה, אזרחות, גאוגרפיה וביולוגיה. מנהלת בית הספר ביקשה לשלב בהשתלמות גם את מורי המתמטיקה. רוב המורים גילו עניין רב בנושא כבר מהמפגשים הראשונים, אך בתחילה המורים למתמטיקה לא גילו כל עניין בנושא ההשתלמות. אט אט הסתייגותם מהנושא נמוגה, והם השתמשו ברעיונות שהועלו בהשתלמות במהלך הוראתם בכיתה. הם שכתבו חוברת תרגילים, אשר הכילה בעיות מילוליות במתמטיקה והתלמידים התקשו בפענוחן. בשכתוב החוברת נעזרו המורים בכלים שרכשו בהשתלמות.

החוויית שחווייתי כמנחה בהשתלמות זו דרבנו אותי להתעניין בנושא של שילוב אסטרטגיות מתחום האוריינות המילולית בניתוח בעיות מילוליות במתמטיקה ובחיפוש אחר כלים להבנת הקשיים.

## מבוא תאודטי

מקובל לחשוב כי המתמטיקה היא שפה, וככל שפה גם היא מורכבת ממילים, ממשפטים, מסימנים, מסמלים ומכללי דקדוק. השפה המתמטית מתייחסת

לסדר, לגודל, לצורות, לשטחים, למושגי זמן (קליין ויבלון, 2008). טיפוח השפה המתמטית הוא אחד מאבני היסוד של הלמידה וחלק מטיפוח השיח בכלל. בשנים האחרונות מושם דגש על פיתוח האוריינות המתמטית וטיפוחה. התפיסה היא שאוריינות מתמטית היא בעיקר היכולת ליישם את הידע המתמטי ואת המיומנויות המתמטיות בחיי היום-יום, להפעיל חשיבה מתמטית במגוון רחב של מצבים ולא רק לבצע חישובים באופן טכני. אוריינות מתמטית היא היכולת להשתמש בשפה מתמטית ולהפעיל תהליכים מטה-קוגניטיביים בהקשרים מתמטיים (קליין ויבלון, 2008). המונח "מטה-קוגניציה" (פלאבל, 1979), המוגדר כ"חשיבה על חשיבה", כולל שני רכיבים: מודעות לתהליך הקוגניטיבי ובקרה של תהליך זה.

במחקרים בתחום המטה-קוגניציה נמצא, כי במהלך של פתרון בעיות לומדים מיומנים יותר מפעילים תהליכים מטה-קוגניטיביים בתדירות גבוהה יותר וביעילות רבה יותר מלומדים שאינם מיומנים. הלומדים המיומנים מודעים לתהליכים הקוגניטיביים המופעלים על-ידם, ומתכננים את אופן הפתרון של הבעיה הניצבת בפניהם. ממצאים אלה הובילו לעיצובם של תהליכי הוראה, המכוונים את הלומד להפעיל תהליכים מטה-קוגניטיביים בעת פתרון של בעיות מתמטיות (מברך וקרמרסקי, 1997). ממצאי מחקרים הצביעו על יעילותן של שיטות הוראה, המדגישות את חשיבות השיח המתמטי והרפלקציה של התלמיד על דרכי הפתרון (קרמרסקי ומברך, 2003).

מורים, המדורבנים את התלמיד לשאול את עצמו שאלות מטה-קוגניטיביות בעת פתרון בעיות בכלל ובמתמטיקה בפרט (כגון מה הבעיה דורשת מהלומד? איזו אסטרטגיה מתאימה לפתרון הבעיה ומדוע? האם הבעיה דומה לבעיות אחרות שנפתרו בעבר או שונה מהן? האם הפתרון הגיוני או ניתן לפתור את הבעיה בדרך אחרת?), מסייעים מאוד ללומד בהבנת הבעיה המילולית.

החוקרים מדגישים את חשיבותן של אסטרטגיות ההוראה המכוונות את התלמידים לתכנן את הפתרון, לשאול שאלות, לבחור באופן מודע את האסטרטגיות המתאימות, לחקור מצבים מתמטיים, להעריך את הקשיים העומדים בפניהם ולערוך רפלקציה על תהליכי החשיבה.

אחת הבעיות המרכזיות בהוראת המתמטיקה היא ההתמודדות עם בעיות מילוליות; המעבר משפה טבעית לשפת המתמטיקה הוא קשה. צריך להתייחס אל הבעיות המילוליות במתמטיקה כאל טקסט ולהיות מודעים לעובדה, שיש מאפיינים זהים לשפת המתמטיקה ולשפה הטבעית, אך יש גם מאפיינים שונים לשתי השפות. כשרוצים לפתור בעיות מילוליות במתמטיקה המלוות בטקסט, צריך לגשר בין השפה המתמטית, המחייבת את ראיית הרכיבים במתמטיקה לבין השפה הטבעית, המחייבת התייחסות אוריינית לטקסט השלם.

אמנם המתמטיקה היא סוג של שיח ייחודי, אולם האוריינות הלשונית, המתייחסת לשליטה בשיח גנרי ומשמשת בסיס משותף לכל סוגי השיח בדיסציפלינות השונות, יכולה לסייע לאוריינות המתמטית.

המתמטיקה היא סוג של שיח ייחודי מכמה בחינות (ספרד, 2011): הוא ייחודי במטרותיו ובאמצעים שהוא משתמש בהם; הוא אוניברסלי אך חד־משמעי; כללי התחביר מפורשים; המונחים והסימונים בו מוגדרים באופן חד־משמעי. השפה המתמטית מורכבת מסמלים המאפשרים לבטא בצורה קצרה תהליכי חשיבה; היא חסכונית ויש בה דחיסות לשונית. אוצר המילים והשימוש בו ייחודיים (מילים כגון "שטח", "מספר", "פונקציה"). כך גם המתווכים והשימוש בהם (נוסחאות, סמלים).

בבעיות מילוליות במתמטיקה נתקל התלמיד בשתי שפות שונות זו מזו, המופיעות יחד בערבוביה (שפה טבעית ושפה מתמטית). כאשר פערי המידע בשפה המתמטית גדולים, על השפה הטבעית למלא את החסר ולהיות ברורה ומפורשת (מרגולין ואילני, 2007). מבנה השפה המתמטית מדויק יותר וגמיש פחות ממבנה השפה הטבעית, ומכאן נובע המתח שנוצר בשימוש בשפה הטבעית בבעיות מתמטיות. בעיה מילולית במתמטיקה היא יחידת טקסט עצמאית, הכוללת **משפט שאלה** ומתארת אירוע לשוני, לעתים אירוע מחיי היום־יום. מטרת התיאור היא מתן ביטוי למבנה לוגי המכתיב פעולה חשבונית מסוימת (מרגולין ואילני, 2007).

הקושי בפתרון בעיות במתמטיקה נובע מהצורך לתרגם את האירוע המתואר בשפה טבעית לפעילות חשבונית המנוסחת בשפה מתמטית. המעבר מהשפה הטבעית מחייב הבנה תחבירית, סמנטית ופרגמטית. הקשיים נובעים מחוסר הבנה של משמעות מילים ומושגים, מפערי מידע בין שפה מתמטית לשפה טבעית. לא כל המידע נמצא במפורש בטקסט, יש מידע שצריך להפיק (ספרד, 2011).

כדי לגשר על פערי המידע שבין השפה הטבעית לשפה המתמטית בבעיות מילוליות במתמטיקה, צריך לפתח מודעות לפער באמצעות יחסי גומלין משמעותיים בין הלומד לבין סביבתו ובעזרת פעולות אותנטיות, המציגות סיטואציות מהמציאות הקרובה לעולמו. על התלמיד לתרגם את הסיטואציה הלשונית למושגים מתמטיים ולארגן את יחידת התוכן המתמטי. בפיצוח בעיות מילוליות במתמטיקה ניתן להשתמש באסטרטגיות מתחום האוריינות הלשונית. לשם כך כדאי להשתמש במדדים למיון השאלות המלוות טקסטים מילוליים. מיון זה עשוי להועיל באיתור הקשיים בבעיות המילוליות במתמטיקה ובניסיון לפתרם.

קיימים מדדים אחדים למיון שאלות המלוות טקסטים מילוליים:

1. **רמת ההבנה:** רמה מילולית (איתור מידע), רמת הפירוש וההיסק, רמת הביקורת והיישום.
2. **אופי הידע הנדרש או המופעל לפתרון הבעיה:** המיומנות הנדרשת לפתרון הבעיה על בסיס כל אחד מהמרכיבים של הבנת הנקרא: ידע לשוני, ידע לשוני-טקסטואלי (מבני) הכולל גם את הבנת היחסים הלוגיים, ידע פרגמטי.
3. **מבנה השאלות ואופן ניסוחן:** במקרים רבים הטכניקה לבניית השאלה קובעת את רמת הקושי בפתרון הבעיה לא פחות מן התכנים (בלום-קולקה, 1985). בלום-קולקה ממיינת את השאלות לפי מבנים. לטענתה, ניתן לזהות בשאלות שני מבנים יסודיים:  
**שאלה שיש בה תנאי מכין ואחר כך תנאי ביצוע** (בתנאי המכין כתוב על מה מסתמכת השאלה, כגון על טקסט מצורף או על גרף או על ידע קודם; בתנאי הביצוע כתובה המטלה). **שאלה שבה, בתוך תנאי הביצוע נרמז התנאי המכין** (שאלה הקודמת בסדר הופעתה לפירוט הנתונים שיש להתייחס אליהם). הקשיים בפענוח לשון ההוראות בספרי לימוד נובעים משני מוקדים עיקריים (בלום-קולקה, 1985): קשיים הכרוכים באיתור הנתונים הנדרשים לשם ביצוע המשימה (התנאים המכניים) וקשיים בהבנת אופי המשימה, כלומר בהבנה של תנאי הביצוע. לדעת בלום-קולקה, הסדר הרצוי בשאלות הוא תנאי מכין ואחר כך תנאי ביצוע.
4. **גודל היחידה הלשונית שיש לתהלך כדי לענות על השאלה:** צירוף מילים, משפט, פסקה או טקסט שלם.
5. **אופי תנאי הביצוע – שאלת שדר או מסר** (בלום-קולקה, 1985): לא ברור אם נדרש רק איתור מידע, או נדרשות גם הערכה וביקורת בשאלה.
6. **הטכניקה לבניית השאלה:** שאלה סגורה או פתוחה או בטכניקת ביניים: ארגון בתבנית לוגית מסוימת באמצעים בלתי-מילוליים (תרשים, גרף).
7. **סגנון ההנחיה:** שאלה הבנויה כמשפט שאלה, כהיגד או כהוראה.

גורמי הקושי בבעיות מילוליות בכל התחומים וגם במתמטיקה יכולים לנבוע ממבנה השאלה, שאלה שבה התנאי המכין מובלע בתנאי הביצוע (קושי תחבירי ולוגי). לפעמים התנאים המכניים או תנאי הביצוע אינם ברורים. השאלה לעתים ארוכה ומורכבת משרשרת של הוראות (ניסוח שאלה במשפט ארוך ומורכב מבחינה תחבירית). הקושי יכול לנבוע מהלשון ומהסגנון – מילים קשות, בלתי-מוכרות, מילים מכלילות ומופשטות. לעתים יש קושי בזיהוי הקשרים הלוגיים או הקשרים הלוגיים בתנאים המכניים אינם זהים לקשרים הנדרשים בפענוח הבעיה. שאלות סגורות עלולות לגרום גם הן לקושי, בעיקר

כשהמסיחים קרובים לתשובה הנכונה. גם השימוש באמצעים גרפיים בשאלות עלול להקשות.

באוריינות מילולית מנסים להתגבר על הקושי על ידי סימון מילים קשות בטקסט (בתנאי המכין ובתנאי הביצוע). מנסים לאתר מונחים מכלילים ומופשטים (האופייניים לשפה המתמטית), ולבחון מה הם כוללים או כיצד הם מתורגמים בתחומי הדעת השונים (מונחים, כגון חוק, תכונה, זווית, ישר, סמל, תהליך וכדומה). כדי להתגבר על הקשיים נוהגים **לפרק מטלה**: מאתרים את התנאי המכין (מה השאלה אומרת), ולאחר מכן מנסים לאתר את תנאי הביצוע (מה השאלה שואלת). משנים את מבנה השאלה – מתחילים בתנאי המכין (בעובדה), ולאחר מכן עוברים לתנאי הביצוע (למילות השאלה, להוראה).

בניסיון להתגבר על הקשיים בפיצוח בעיות מילוליות במתמטיקה כדאי להיעזר גם במודל שמציעות מרגולין ואילני (2007). הוא מקשר בין סיטואציה לשונית, מצד אחד, לבין המבנים המתמטיים המופשטים מהצד השני. המודל מורכב מתשעה שלבים.

### עיקרי המודל (מרגולין ואילני, 2007)

1. **שלב ראשון**: איסוף פרטים; קריאת הטקסט "מלמטה למעלה" – חשיפת המשמעות בטקסט.
2. **הבנת הסיטואציה הלשונית**: קריאת הבעיה פעם נוספת תוך גישוש רב-כיווני ("סיעור מוחין"). הקורא שואל את עצמו שאלות, כגון האם כל המילים ברורות? האם המשפטים ברורים? מה הן מילות המפתח? מהי השאלה? כיצד אפשר לתאר את הבעיה במילים פשוטות ומובנות יותר?
3. **הבנת הסיטואציה המתמטית**: הסיטואציה המתמטית כוללת נתונים ושאלה. הנתונים יכולים להופיע באופן גלוי או סמוי. הנתונים הלא מפורשים הם לעתים **האקסיומות** שאפשר להיעזר בהן לפתרון הבעיה. כדי להבין את הסיטואציה המתמטית אפשר להיעזר **בפירוק, בהדגמה, בתרגול ובהמחשה**. הפירוק הוא לנתונים גלויים, לנתונים סמויים ולשאלה. הדגמת הבעיה נעשית באמצעות מקרים פרטיים. פירוש נעשה באמצעים, כמו ציור, טבלה, תרשים וכדומה, העוזרים בפישוט הבעיה. הלומד צריך לזהות את **העובדות הידועות** (התנאים המכניים) ואת התנאים הלוגיים-מתמטיים של הבעיה, כלומר את הקשרים הלוגיים בין הנתונים המתמטיים ובין הניתוח הלוגי שלה. השאלות שצריך לשאול הן מהו היחס שלי כלומד לנושא המתמטי שבבעיה? מהו הקושי בבעיה? האם כל הנתונים ברורים? האם יש נתונים סמויים בבעיה? האם אפשר להדגים את הבעיה באמצעות מקרים פרטיים?

4. **התאמת הסיטואציה המתמטית לסיטואציה הלשונית:** בשלב זה יש לקרוא את הבעיה פעם נוספת "מלמעלה למטה" ולהחיל סכמות מתמטיות על הטקסט. תהליך הקריאה כעת הוא מצטבר – חיבור של סכמת הידע במתמטיקה לסכמה של הטקסט; עיבוד האינפורמציה המילולית לצורך הפיכתה לתרגיל מתמטי או למשוואה אלגברית. ניתן להיעזר ברמזים מילוליים (פחות מ-, יותר מ-, שווה, סכום). בשלב זה הלומד יוכל להיעזר גם בתרשים כלשהו.
5. **העלאת רעיונות לפתרון:** לפני פתרון הבעיה, צריך לחקור אותה. הלומד ישאל את עצמו האם הבעיה היא ייחודית או האם נתקל בבעיות דומות בעבר, ואז יוכל להיעזר בפתרונות שמצא בעבר. הוא ינסה לבנות סכמה לפתרון הבעיה על סמך ניסיון העבר.
6. **ניפוי הרעיונות:** לאחר העלאת הרעיונות לפתרון הבעיה צריך לבדוק כל אחד מהם, אם הוא אכן מסייע לפתרון הבעיה. יש לנפות רעיונות מיותרים.
7. **בניית מודל מתמטי:** בניית ייצוגים בשפה המתמטית, כמו **תרגילים או משוואה**, לפתרון הבעיה.
8. **מציאת הפתרון:** לאחר מציאת המודל המתמטי יש להחיל אותו על הבעיה הנדונה. יש לבדוק אם הוא הפתרון היחיד, כי ייתכן שקיים יותר מפתרון אחד. במקרה זה יש למצוא את הפתרונות האפשריים.
9. **בקרה:** צריך לבדוק אם פתרון הבעיה אכן מתאים לבעיה. יש לחזור אל הבעיה המקורית, לקוראה שוב ולבדוק אם הפתרון הגיוני, אם הוא מתאים לסיטואציה הלשונית, אם הוא מתאים לסיטואציה המתמטית אם המודל המתמטי (המשוואה או התרגיל) מתאים לבעיה. לדעת הכותבות, בכל בעיה מילולית במתמטיקה יש לעבור את השלבים, אך לומדים שונים צריכים להתמקד בשלבים שונים, ולעתים לומד אינו צריך לעבור את כל השלבים. יש שלבים הנעשים באופן אוטומטי. בזמן ההוראה צריך להתמקד בכל פעם בשלב אחר, לאתר שלבים שיש בהם קושי ולהתמקד בהם.

## דוגמה לניתוח בעיה מילולית במתמטיקה

הבעיה המילולית הנדונה לקוחה מתוך קובץ מטלות המיועדות לצורכי השתלמות. הקובץ הוכן על ידי צוות של מנחי מורים להוראת המתמטיקה והוצג בפני צוות מדריכות העברית בשנת תש"ע.

## הבעיה

חשבון חשמל חודשי מורכב מסכום קבוע ומתשלום של 2.05 שקלים לכל קוט"ש שנצרך. משפחה צורכת אותו מספר הקוט"ש בכל חודש. בחודש הראשון היא שילמה 403 שקלים. בחודש שלאחריו הועלה הסכום הקבוע ב-20% והמשפחה שילמה 418 שקלים. כמה קוט"ש צורכת המשפחה בחודש?

### ניתוח השאלה על פי מדדים הנהוגים בהבנת טקסט מילולי

1. **רמת ההבנה:** בבעיה המוצגת נדרשת הבנה מילולית ובעיקר הבנה היקשית (שאלה של פרשנות והיסק).
2. **אופי הידע הנדרש לפתרון הבעיה:** נדרש ידע לשוני, ידע טקסטואלי וגם ידע פרגמטי (הכרת המבנה של הדף המייצג את חשבון החשמל עשוי להועיל בהבנת הבעיה).
3. **מבנה השאלה ואופן ניסוחה:** בבעיה המוצגת יש תנאי מכין ותנאי ביצוע, אך יש כמה שלבים בתנאי הביצוע שלא נכתבו במפורש. מנוסח רק תנאי הביצוע הסופי – **השאלה עצמה**; לכן ניתן להיעזר באסטרטגיה של פירוק המטלה לכמה שלבים. יש לפענח מה השאלה אומרת ומה השאלה שואלת.
4. **טכניקה לבניית השאלה:** שאלה פתוחה.
5. **סגנון ההנחיה:** בעיה הבנויה כהיגד ואחריו שאלה.
6. **הבסיס לתשובה המצופה:** התשובה משתמעת מן הטקסט, אך יכולה להתבסס גם על ידע קודם (ייתכן שהתלמיד פתר בעבר בעיות דומות בעלות נתונים אחרים).

### ניתוח גורמי הקושי

1. **מבנה השאלה:** יש תנאי מכין – חשבון החשמל, המורכב מתשלום קבוע ומתשלום המשתנה על פי צריכה. את התשלום המשתנה על פי הצריכה צריך לחשב, אך לא ידועה כמות הקוט"ש (זה החלק המרכזי במטלה – תנאי הביצוע המרכזי). למעשה, תנאי הביצוע במטלה והתנאים המכניים מעורבבים זה בזה, ולכן צריך לפרק את המטלה.
2. **רמת הלשון:** אין מילים קשות, אך יש כמה מושגים שהתלמיד צריך לפענח, חלקם קשורים בידע עולם: **קוט"ש** (קילוואט לשעה – יחידה למדידה של צריכת החשמל). כמו כן יש מילים הקשורות **לתחום המתמטיקה: סכום, (סכום קבוע), צריך להסיק שיש גם סכום משתנה. מילים כמו צריכה (צורכת), אחוז (סימן מתמטי לביטוי האחוז).**

הבנת הקשרים הלוגיים הקיימים במטלה, אך **לא נכתבו** במפורש ויש להסיקם: גדול מ-, קטן מ-, עלה ב-, ההפרש בין התשלומים החודשיים. מסתתר גם **היחס הלוגי** של סיבה ותוצאה (יידון בהמשך).

### **הניסיון לפתור את המטלה בעזרת המודל שהציגו מרגולין ואילני (2007)**

1. **קריאת הבעיה:** איסוף הפרטים מ"למטה למעלה". יש חשבון חשמל שכולם משלמים מדי חודש בחודשו, בחשבון החשמל יש סכום קבוע וסכום לתשלום המשתנה לפי הצריכה. בעבור כל קוט"ש (איני בטוחה אם הבנתי בשלב זה מהו קוט"ש) משלמת המשפחה 2.05 ש"ח. בחודש הראשון שילמה המשפחה סכום כולל של 403 ש"ח, בחודש השני הסכום הקבוע עלה ב-20% (מהו הסכום בשקלים?). הסכום לתשלום בסה"כ בחודש זה היה 418 ש"ח. כמו כן **נכללת שאלה במטלה** השואלת כמה קוט"ש צורכת המשפחה בחודש.

2. **הבנת הסיטואציה הלשונית:** קראתי פעם נוספת את הבעיה, ושאלתי כמה שאלות: האם כל המילים ברורות? מה הן מילות המפתח? מהי השאלה? האם השאלה מובנת? האם אוכל לתאר במילים שלי את הבעיה? סימנתי מילים שנראו לי קשות או חשובות להבנה, כמו **קוט"ש** (האם המילה מוכרת מידע קודם או עלי להתבונן במילון או עלי לשאול את המורה או אדם אחר שיכול לעזור?) מהו **חשבון חשמל**? ממה הוא מורכב? מהי **צריכה**? מהו **תשלום קבוע**? מהו **התשלום המשתנה**? מהו **סכום** (גדול מ-, קטן מ-, שווה)?

3. **הבנת הסיטואציה המתמטית:** צריך להתייחס לשני סוגים של מידע:

- **נתונים** (חלקם גלויים וחלקם סמויים);
- **שאלה:** מה השאלה אומרת ומה היא שואלת. בשלב זה איעזר בפירוק השאלה או בהדגמה. כמו כן אנסה לגלות את הקשרים שבין האלמנטים הלקסיקליים, שהם שמות עצם הקשורים לכמתים מספריים. אשאל אם כל הנתונים ברורים לי, אם יש נתונים סמויים, אם אני מבינה את הקשר שבין הנתונים לשאלה.

### **פירוק המטלה:**

ראשית, אבדוק מה הם הנתונים לפי התנאים המכניים, ומה לא ברור לי. אנסה לפענח את המושגים שאיני מבינה **קוט"ש**, **סכום**, סכום **קבוע** (סכום **משתנה**).

### **זיהוי הנתונים המפורשים בטקסט:**

- תשלום של 2.05 ש"ח בעבור כל קוט"ש.
- בחודש הראשון שילמה המשפחה 403 ש"ח בעבור צריכת החשמל.

- בחודש השני שילמה המשפחה 418 ש"ח בעבור צריכת החשמל.
  - הסכום 418 ש"ח בחודש השני כולל תוספת של 20% מהסכום הקבוע.
  - המשפחה צורכת אותה כמות של קוט"ש בכל חודש.
- נתונים נסתרים (סמויים):**
- הסכום הקבוע בחשבון החשמל.
  - כמות הקוט"ש בחודש (זאת השאלה המרכזית).
- אם אדע מהו הסכום הקבוע, אוכל לדעת מהו הסכום המשתנה על ידי פעולת חיסור (403 פחות הסכום הקבוע שווה לסכום המשתנה), ואותו אחלק ב-2.05 ש"ח, כדי לגלות את כמות הקוט"ש. בשלב זה אנסה לברר מה הן פעולות החשבון הדרושות לפתרון הבעיה: חיסור? חיבור? כפל? חילוק?
4. **התאמת הסיטואציה המתמטית לסיטואציה המילולית והעלאת רעיונות לפתרון (צירוף של שלבים 4 ו-5):**
- קריאת המטלה מ"למעלה למטה" – החלטת סכמה מתמטית על הטקסט תוך הסתמכות על ידע קודם. זהו שלב של עיבוד האינפורמציה הדרושה לצורך הפיכת הבעיה לתרגיל מתמטי או למשוואה האלגברית.
- ראשית, אני נזכרת בבעיות דומות שנתקלתי בהן בעבר, הקשורות בחישוב משכורות או בתשלומים אחרים, כגון תשלום טלפון. ניתן להיעזר בציור או בתרשים.

## עיבוד מילולי של האינפורמציה

1. הסכום ששולם בחודש השני גבוה מהסכום ששולם בחודש הראשון: 418 ש"ח לעומת 403 ש"ח. כאן אני מגלה קשר לוגי של **סיבה ותוצאה** בין שני הסכומים. הסכום בחודש השני גדול יותר בגלל העלאה של הסכום הקבוע ב-20%.
2. הסכום ששולם בחודש השני גדול ב-15 ש"ח מהסכום ששולם בחודש הראשון.
3. חשבתי תחילה לרשום את הסכום הקבוע כנעלם בעזרת האות X (המקובלת במשוואות עם נעלם אחד) ולציין את התוספת של 20 האחוזים בעזרת הסימן המתמטי  $\frac{x \cdot 20}{100}$ , המוכר לי מבעיות קודמות.
4. גם הסכום המשתנה אינו ידוע (נסתר). ידוע רק שהוא מורכב מ-2.05 ש"ח (תשלום לכל קוט"ש) כפול כמות הקוט"ש (נתון נעלם שהוא השאלה המרכזית). בשלב זה נעזרתי בארגון הנתונים בטבלה. לוח 1 מציג פירוק זה.

לוח 1: פירוק המטלה וארגונה

| מהי השאלה המרכזית?                   | מה ניתן להסיק?                                                                                                                                                                                                                  | מה נסתר?                                                                                                                 | מה ידוע?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| מהי כמות הקוט"ש שהמשפחה צורכת בחודש? | <p>ההפרש בתשלום בין החודש השני לחודש הראשון הוא 15 ש"ח, שהם 20% מהתשלום הקבוע.</p> <p>מכאן ניתן להסיק, שהסכום הקבוע שהוא 100% שווה 75 ש"ח.</p> <p>הנוסחה שעזרה לי בפענוח:</p> $15 = 20$ $X = 100$ $x = \frac{15 \cdot 100}{20}$ | <ul style="list-style-type: none"> <li>הסכום הקבוע.</li> <li>הסכום המשתנה.</li> <li>כמות הקוט"ש לצריכה בחודש.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>סכום לתשלום בחודש הראשון 403 ש"ח.</li> <li>הסכום לתשלום בחודש השני – 418 ש"ח.</li> <li>התשלום לכל קוט"ש – 2.05 ש"ח.</li> <li>העלאה של הסכום הקבוע מהחודש הראשון לחודש השני ב־20%.</li> <li>התשלום החודשי כולל תשלום קבוע ותשלום משתנה.</li> <li>התשלום הקבוע בחודש השני היה גבוה ב־20% (כולל תוספת של 20%).</li> </ul> |

5. ניפוי רעיונות ובניית מודל מתמטי (שלבים 6 ו-7): תחילה הגעתי לשתי נוסחאות מתמטיות שבהן ה־X מייצג את התשלום החודשי הקבוע וה־Y מייצג את כמות הקוט"ש בחודש.

התשלום בחודש הראשון:

$$X + Y \cdot 2.05 = 403$$

$$x + (y \cdot 2.05) = 403$$

התשלום בחודש השני:

$$x + \frac{x \cdot 20}{100} + (y \cdot 2.05) = 418$$

בשלב זה הבחנתי בכך שאני מסתבכת בחישובים עם שני נעלמים, לכן ניסיתי בעזרת הטבלה שריכזה את המידע לפשט את הבעיה. מאחר שגיליתי בעזרת הטבלה שהסכום הקבוע הוא 75, עלי למצוא את הסכום המשתנה המורכב מכמות הקוט"ש (הדבר הלא ידוע שעליו השאלה שואלת) כפול 2.05 לכל קוט"ש. אם כן, צמצמתי את מספר הנעלמים לאחד בלבד, והוא מייצג את כמות הקוט"ש בחודש. אסמן את הנעלם כ־X. מכאן הדרך למשוואה המוכרת מפתרון בעיות בעבר ברורה:

$$75 + (2.05 \cdot X) = 403 \quad (\text{הסכום הקבוע})$$

$$75 + 2.05 \cdot X = 403$$

$$75 + 2.05X = 403$$

$$x = \frac{403-75}{2.05}$$

$$X = 160$$

#### 6. האם זה הפתרון היחיד? (שלב 8)

ייתכן שזה אינו הפתרון היחיד, למשל אין צורך במשוואה אלגברית בעלת נעלם אחד כדי להגיע לאותו הפתרון; בעזרת שתי פעולות של חיסור וחילוק אפשר להגיע לתוצאה זהה.

$$\bullet \quad 328 = 403 - 75$$

$$\bullet \quad 328 / 2.05$$

#### 7. בקרה (שלב 9): האם הפתרון הגיוני ומתאים לסיטואציה הלשונית? הפתרון הגיוני הן מבחינה לשונית הן מבחינת המציאות.

### סיכום

בדוגמה שהוצעה ניתן לראות כיצד אפשר להשתמש בכלים אורייניים ובאסטרטגיות של הבנת הנקרא לפיצוח בעיות מילוליות במתמטיקה. כדי לפענח טקסט שיש בו מרכיבים מתמטיים ולהסיק ממנו מסקנות הגיוניות, וכדי לחנך לאוריינות לשונית מתמטית יש להעניק תשומת לב לא רק לתהליכים האינטואיטיביים, אלא גם לתהליכים הקוגניטיביים והמטה-קוגניטיביים.

תהליך עיבוד הטקסט המילולי של הבעיה המתמטית הוא רב-שלבי ומחייב ביצוע פעולות קוגניטיביות: פענוח סמלים גרפיים, הבנת התוכן הגלוי, הבנת הסיטואציה הלשונית, מציאת מודל מתמטי והתאמה בין הסיטואציה הלשונית למודל המתמטי המתאים.

היעד המרכזי בהוראה של כל מקצועות הלימוד וגם במתמטיקה צריך להיות למידה מתוך הבנה. אמנם אין להזניח את השלב הכולל את החישובים, אך הוא צריך להיות השלב הבא אחרי הבנת המשמעות. הוראה בכלל והוראת המתמטיקה בפרט צריכה להיעשות תוך הדגשת משמעויות. הוראה מתוך הבנה משפרת את הזיכרון, ומגדילה את הסיכוי ליישום החומר הנלמד בעת פתרון של בעיות חדשות.

## רשימת מקורות

### ספרות מחקר

- בלום-קולקה, ש' (1985). לשון ההוראות בספרי לימוד: תנאים מכינים ותנאי ביצוע, בתוך צ' לם (עורך), **בית ספר וחינוך**, ירושלים: האוניברסיטה העברית, בית הספר לחינוך והוצאת מאגנס, 57-64.
- מרגולין, ב' ואילני, ב"ש (2007). בין לשון למתמטיקה – חינוך לחשיבה אוריינית בפתרון בעיות במתמטיקה. **דפים**, 45, 114-139.
- ספרד, א' (2011). אוריינות לשונית ואוריינות מתמטית – מה הקשר? מתוך הרצאה ומצגת ביום העיון: **בין אוריינות לשונית כללית לאוריינות דיסציפלינרית בחטיבת הביניים**. ירושלים: האקדמיה הלאומית הישראלית למדעים, היזמה למחקר יישומי בחינוך.
- קליין, פ"ש ויבלון, י"ב, (עורכים). (2008). כישורים מתמטיים. **מחקר יישומי בחינוך: ממחקר לעשייה בחינוך לגיל הרך**, ירושלים: האקדמיה הלאומית הישראלית למדעים, הוועדה לבחינת דרכי החינוך בגיל הרך, 177-195.
- שראל, צ' (1991). **מבוא לניתוח השיח**. תל אביב: אור עם.

- Flavel, J. H. (1979). Metacognitive and cognitive monitoring: A new area of cognitive developmental inquiry, *American Psychologist*, 31, 906-911.
- Kramarski, B., & Mevarech, Z. R. (2003). Enhancing mathematical reasoning in the classroom: The effects of cooperative learning and metacognitive training. *American Educational Research Journal*, 40, 281-310.
- Mevarech, Z. R. & Kramarski, B. (1997). IMPROVE: A multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classrooms. *American Educational Research Journal*, 34, 365-394.