תוכנית כיתה י"ב – חמש יח"ל

סדר ושעות הלימוד המוצעים:

כיתה י"ב			
נושא I	שעות	נושא II	שעות
וקטורים בגישה גאומטרית ואלגברית (כולל טריגונומטריה במרחב)	50	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי: פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות	40
גאומטריה אנליטית	40	מרוכבים	20
	85		65
סה"כ 150 שעות			

תוכן העניינים

מבוא

בכיתה י״ב יילמדו ארבעה נושאים עיקריים: וקטורים בגישה גאומטרית ואלגברית (כולל טריגונומטריה במרחב), הנדסה אנליטית, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות, ומספרים מרוכבים.

נושאים אלה נלמדו גם בעבר בכיתה י״ב. ברוח התוכנית, התווספו לכל הנושאים הקשרים יישומיים, התווספה קישוריות ואיחוד נושאי הלימוד השונים והושמטו מספר נושאים שנלמדו בעבר במסגרת לימודי החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי בכיתה י״ב ואשר הוסיפו בעיקר לעומס הטכני ופחות להבנה בסיסית של החומר (בפרט, הושמטו: חקירת פונקציות חזקה עם מעריך שבור, מציאת נפח גופי סיבוב).

להלן פירוט התכנים והדגשים בכל אחד מנושאים אלו, בנספח 1 מתוארים בקצרה היבטים מרכזיים הקשורים להוכחות ואופן ביטויים לאורך התכנית ובנספח 2 מופיעות מספר דוגמאות להמחשת סוג השאלות שאנו מציעים לכלול בכל פרק.

כאמור, ברוח התוכנית הכוללת, גם בי״ב יש התייחסות ליישומים של המתמטיקה בכל תחומי הלימוד, כפי שהם באים לידי ביטוי במדעים השונים ובחיי יום-יום[1] תוך מטרה להדגיש את רלוונטיות היישומים של המתמטיקה הנלמדת לנושאים עכשוויים. השאלות היישומיות נכתבו בצורה אוריינית כך שגוף השאלות מסביר את רלוונטיות המתמטיקה הנלמדת מחד ומרחיב את ההשכלה הכללית של התלמידים בתחום היישומי מאידך. נושאים אלה מופיעים בעיקר בדוגמאות לשאלות בפרקים השונים, המוצגות בנספח 2. בנוסף, כהעשרה מתמטית, תרבותית ומדעית, כדאי להפנות את התלמידים לקריאה על דמויות מרכזיות בפיתוח המתמטיקה הנלמדת, על התחומים שפיתחו ועל חשיבותם.

התוכנית כוללת שימוש בטכנולוגיה לשם חקר והמחשת התכנים. השימוש בטכנולוגיה מאפשר ומזמין לדון בשאלות בהקשר רחב ובאופן איכותני ולכן מהווה דרך להדגים את הפוטנציאל לעושר מחשבתי בהקשר המתמטי.

נזכיר כי נושאים ודוגמאות המוגדרים **כהעשרה (ומסומנים באפור)** לא ייכללו כנושאי חובה בתוכנית (בשל קוצר זמן ו/או אופיים המתקדם או אופיים הטכני)[2], אך המורים אמורים להכירם, לאפשר לתלמידים להתבסס בעבודות ובבחינות על עקרונות ושיטות המופיעים בהם, ולהפנות את התלמידים המתעניינים בהם לקריאה נוספת בספרי הלימוד ובמרשתת (עם הרחבה אפשרית נוספת לתלמידים מצטיינים).

---

[1] מוצע כי הטמעת נושא היישומים תעשה בהדרגה, ותעודכן בספרי הלימוד ובמשרד החינוך לאורך השנים. יש לשים לב כי הייצוג ביחידות שונות (למשל יחידות אורך לעומת יחידות מהירות) בשאלות יישומיות ייעשה בצורה נכונה – בשאלות היישומיות הצירים בגרפים צריכים לכלול את היחידות של המשתנים/הפונקציות. בספרי הלימוד יש להוסיף דוגמאות מסוג זה עם פתרונות בהם היחידות כלולות ודוגמאות בהם שינוי היחידות במהלך/סוף התרגיל מניב תמיד אותה תוצאה. יש לשים לב שבשאלות היישומיות לא נכון להציג פונקציה ונגזרות שלה על אותו הגרף – שכן היחידות שלהן – שונות. אם דרושים שני הגרפים, אפשר ורצוי לשים את גרף הנגזרת ישר מתחת לגרף הפונקציה.

[2] התלמידים יהיו רשאים להסתמך על שלמדו במסגרת נושאי ההעשרה.

וקטורים בגישה גאומטרית ואלגברית (כולל טריגונומטריה במרחב) (50 שעות)

מבוא

וקטורים הם אובייקטים מתמטיים חדשים לתלמידים שמצד אחד מייצגים אובייקטים בעולם כגון העתקת מקום (displacememt), כוחות, מהירויות, או קוטביות של מולקולה ומצד שני פותחים פתח להתבוננות ראשונית במבנה אלגברי של מרחב וקטורי שמעמיק את הפן המופשט של המתמטיקה הבית ספרית. הפרק עוסק בייצוג של וקטורים ובחישובי וקטורים, אורכיהם והזוויות ביניהם, בהוכחת טענות גאומטריות באמצעות חשבון וקטורים, בהצגת נקודות, ישרים ומישורים והמצבים ההדדיים ביניהם, ובפתרון בעיות טריגונומטריות במרחב.

תכנים

מבוא ותכונות בסיסיות (8 שעות)

1. התבוננות בתופעות של תנועה ושיווי משקל של כוחות וזיהוי גדלים פיזיקאליים שמאופיינים, בנוסף לגודל, גם בכיוון. דוגמאות לשיווי משקל (או העדר שיווי משקל) יכולות להגיע מתחומים שונים: מציאת מיקומה של מטיילת (דוגמא 2) היא דוגמא מתחום הפיסיקה ומציאת קוטביות של מולקולה היא דוגמה מתחום הכימיה (דוגמה 5).

2. הגדרת הווקטור הגאומטרי כקטע מכוון במישור או במרחב תוך הקפדה על סימון הווקטור ש"ראשו" ב-B ו"זנבו" ב-A כ- $\overrightarrow{AB}$, או בנוסף $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. הגדרת השוויון בין שני וקטורים. הגדרת חיבור וחיסור של וקטורים וכפל של וקטור בסקלר (המילה סקלר מתייחסת בהקשר הבית ספרי למספר ממשי). שימושיות של האובייקט המתמטי כמייצג אובייקטים בעולם הפיזיקאלי (המילה "פיזיקאלי" מתייחסת כאן לעולם הממשי ולאו דווקא לקישור עם תחום הדעת שנקרא פיזיקה).

3. אפיון הפעולות של חיבור וקטורים וכפל וקטור בסקלר. המשך השימושיות של האובייקטים המתמטיים כמייצגים אובייקטים בעולם הפיזיקאלי. פרישת הכללים שמגדירים מרחב וקטורי באמצעות תכונותיהם של חיבור וקטורים וכפל וקטור בסקלר:

    - מאפייני פעולת החיבור (סגירות, חילוף, קיבוץ, קיום איבר האפס וקיום איבר נגדי).
        - סכום של כל שני וקטורים הוא וקטור.
        - עבור כל $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ וקטורים מתקיים: $\underline{u}+\underline{v}=\underline{v}+\underline{u}$.
        - עבור כל $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו-$\underline{w}$ וקטורים מתקיים: $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}=\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$.
        - הווקטור $\overrightarrow{AA} = \underline{0}$ הוא וקטור האפס ולכל וקטור $\underline{u}$ מתקיים $\underline{u}+\underline{0}=\underline{0}+\underline{u}=\underline{u}$.
        - לכל וקטור $\overrightarrow{AB}$ קיים וקטור נגדי $\overrightarrow{BA}$ כך ש - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \underline{0}$ ולכן ניתן לסמן: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
    - מאפייני כפל וקטור בסקלר (סגירות, כפל במספר 1, קיבוץ ושני חוקי פילוג)

- לכל וקטור u ולכל סקלר (מספר ממשי) a, $a\cdot\underline{u}$ הוא וקטור.

- לכל וקטור u מתקיים $1\cdot\underline{u}=\underline{u}$.

- לכל וקטור u ולכל שני סקלרים (מספרים ממשיים) s ו- t מתקיים: $s\cdot(t\cdot\underline{u})=(s\cdot t)\cdot\underline{u}$.

- לכל וקטור u ולכל שני סקלרים (מספרים ממשיים) s ו- t מתקיים: $(s+t)\cdot\underline{u}=s\cdot\underline{u}+t\cdot\underline{u}$.

- לכל סקלר t ולכל שני וקטורים u ו- v מתקיים: $t\cdot(\underline{u}+\underline{v})=t\cdot\underline{u}+t\cdot\underline{v}$.

תלות לינארית ויחידות ההצגה (10 שעות)

4. הגדרת צירוף לינארי של וקטורים ושימוש בצירופים לינאריים של וקטורים בפתרון בעיות גאומטריות ופיזיקליות.

5. וקטור ייקרא תלוי-לינארית בקבוצה של וקטורים אחרים אם ניתן להביעו כצירוף לינארי של הווקטורים בקבוצה זו. כמו כן, קבוצה של וקטורים תיקרא בלתי תלויה-לינארית , אם אף וקטור בה לא יכול להיות מובע כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים בה.

6. לכל שתי נקודות שונות A ו-B ולכל סקלר a (שאינו 0), וקטור הוא מהצורה $a\cdot\overrightarrow{AB}$ אם ורק אם הוא נמצא על הישר המוגדר על ידי הנקודות A ו- B או על ישרים מקבילים לו.

7. עבור כל שלוש נקודות A, B ו-C שאינן על ישר אחד, מתקיים שווקטור הוא צירוף לינארי של $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{AC}$ אם ורק אם הוא וקטור במישור שמוגדר על ידי הנקודות A, B ו-C או במישור מקביל לו.

8. שלושה וקטורים שאינם תלויים לינארית פורשים את המרחב התלת ממדי: כל וקטור במרחב התלת ממדי ניתן לרשום כצרוף לינארי של שלושת הווקטורים $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{AD}$ כאשר A, B, C ו- D הן ארבע נקודות שאינן על אותו מישור.

9. כל שלושה וקטורים במישור לא יכולים להוות קבוצה בלתי תלויה לינארית. כל ארבעה וקטורים במרחב, לא יכולים להוות קבוצה בלתי תלויה לינארית.

10. יחידות ההצגה של וקטור באמצעות קבוצת וקטורים בלתי תלויים לינארית, ושימוש ביחידות ההצגה למציאת יחסי קטעים ולהוכחת משפטים גאומטריים. (כל וקטור במישור ניתן להצגה יחידה על ידי שני וקטורים בלתי תלויים במישור זה, כל וקטור במרחב ניתן להצגה יחידה על ידי שלושה וקטורים בלתי תלויים במרחב).

מכפלה סקלארית בין וקטורים (8 שעות)

11. הגדרה של *מכפלה סקלארית* כפעולה בין שני וקטורים גיאומטריים שמניבה מספר (סקלאר) באופן הבא: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot cos\alpha$ כאשר α היא הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ והסימן $|\underline{u}|$ מייצג את אורכו של הווקטור $\underline{u}$. יש לשים לב שסימן הכפל באגף שמאל מייצג פעולה בין וקטורים ואילו סימן הכפל באגף ימין מייצג פעולה בין מספרים.

12. שימושים של מכפלה סקלארית בפתרון בעיות תוך חישוב זוויות ואורכים.

13. שימוש בווקטורים להוכחת המשפטים. לדוגמא:
- ישר ניצב למישור אם ורק אם הוא מאונך לשני ישרים לא מקבילים במישור.
- ישר במישור ניצב למשופע למישור אם ורק אם הוא מאונך להיטל המשופע על המישור.

וגם הוכחה באמצעות וקטורים של משפטים נוספים שכבר הוכחו בעבר.

ההצגה האלגברית של וקטורים במרחב ושימושיה (12 שעות)

14. מערכת צירים במרחב. הצגה אלגברית של וקטורים ופעולות אלגבריות בווקטורים - חיבור, חיסור, כפל בסקלר, חלוקת קטע ביחס נתון ומכפלה סקלרית. פירוש של וקטור שזנבו בראשית כנקודה במישור או במרחב.

15. הצגה פרמטרית של ישר במישור ובמרחב. מצב הדדי של ישרים. ייצוג של מישור במרחב על ידי הצגה פרמטרית ועל ידי משוואה. מיקום של מישורים וישרים במערכת צירים על פי משוואתם או הצגתם הפרמטרית (ניתן ורצוי להיעזר באמצעי המחשה טכנולוגיים או אחרים). מצב הדדי בין מישורים, ובין ישר ומישור.

16. חישובי מרחקים: בין שתי נקודות, בין נקודה לישר, בין נקודה למישור, בין ישרים מקבילים ובין ישרים מצטלבים, בין ישר למישור, ובין שני מישורים.
הגדרה, זיהוי וחישוב זוויות: בין שני ישרים, בין שני מישורים, ובין ישר למישור בכלים וקטוריים ובכלים טריגונומטריים.

יישומים בגאומטריית המרחב (12 שעות)

17. יישומים במרחב הדורשים שימוש במשפטים בגאומטריה ושימוש בטריגונומטריה בגופים: גליל ישר, חרוט ישר, כדור, מנסרה ישרה, פירמידה ישרה.

18. חישובים במרחב של: זוויות, אורכי קטעים, שטחים (כמו מעטפת או שטח פנים), ונפחים בכל הגופים, לאו דווקא גופים ישרים.

דגשים

1. התבוננות בווקטור המתמטי כאובייקט משמעותי גם בתחום דעת חוץ מתמטי, ראו דוגמאות 2-7.

2. הצגת וקטור כצירוף לינארי של וקטורים אחרים מלמד על תכונותיו של הווקטור (לדוגמא אם הוא צירוף לינארי של שני וקטורים בלתי תלויים לינארית, אזי הוא בהכרח משוכן במישור המוגדר על ידם או על מישור מקביל). ראה דוגמאות 12 ו-13.

3. עקרון יחידות ההצגה של וקטור באמצעות קבוצת וקטורים (שני וקטורים במישור ושלושה במרחב) נשען על היות הווקטורים בקבוצה בלתי תלויה לינארית.

4. הוראת עקרונות של הנדסת המרחב תוך כדי הוראת וקטורים.

- יש ללמוד לזהות זווית בין ישר ומישור וזוויות בין מישורים על פי הגדרתן לפני שלומדים לחשב אותן בכלים וקטוריים (או טריגונומטריים).

- המשפט שאומר כי ישר מאונך למישור אם ורק אם הוא מאונך לשני ישרים שונים שעוברים דרך עקבו, ניתן להצדקה פשוטה יחסית בתוך ההקשר של לימוד וקטורים.

5. בחינת פתרונות באמצעות כלים שונים (טריגונומטריים ווקטוריים) לבעיות מרחביות שונות. דיון ביתרונות והחסרונות של כל דרך.

6. פיתוח הראייה המרחבית אינו נושא פשוט, אך הוא בעל ערך מוסף ולכן הוא מופיע בהדרגה בכל שנות התוכנית ומגיע לשיא ביטויו בפרק זה. שילוב של צורות מרחביות פשוטות בתרגילים (גליל, כדור, חרוט) יסייע בפיתוח ראייה מרחבית זו.

הערשה

1. כל וקטור גאומטרי מייצג מחלקת שקילות. שני וקטורים יקראו "שווים", אם הם מייצגים של אותה מחלקת שקילות. כללי הגאומטריה הם שמראים שהפעולות על וקטורים לא תלויות במייצגים. נציין לפיכך כי השימוש שעושה הפיזיקה במתמטיקה של וקטורים הוא לרוב בעזרת וקטורים גאומטריים.

2. הייצוג האלגברי של וקטור כשלשה סדורה מאפשר הרחבה של האובייקטים שמקיימים תכונות של וקטורים להיות n-יה סדורה ובכך לפתוח פתח לדיון במרחבים וקטוריים n ממדיים.

גאומטריה אנליטית (40 שעות)

מבוא

פרק הגאומטריה האנליטית הוא חלק ממכלול נושאים העוסקים בעצמים גאומטריים, בנוסף לגאומטריה אוקלידית, טריגונומטריה ווקטורים.

פרק זה מפגיש את התלמידים עם שימוש בכלים אלגבריים לפתרון בעיות גאומטריות, באמצעות ייצוג של עצמים גאומטריים במערכת צירים. כמו כן הגאומטריה האנליטית מאפשרת להציג בעיות אלגבריות באופן גרפי, לתת באמצעותה פירוש לפתרון האלגברי, ולעתים אף לפתור בעיות אלגבריות באופן גרפי. התלמידים כבר נחשפו לצורת חשיבה זו במבוא לגאומטריה אנליטית בכיתה יוד (בו למדו על משוואת קו ישר, מרחק בין נקודות, אמצע קטע, תנאים לניצבות ומקבילות של ישרים וכן על מעגל שמרכזו בראשית הצירים) וכן בפרק הווקטורים, בהצגה האלגברית של וקטורים המאפשרת מעבר מגאומטריה לאלגברה. בפרק זה מוצגת האפשרות להשתמש בכלים אלגבריים להצגת צורות שאינן בהכרח קוויות או מעגל.

תחום הגאומטריה האנליטית עכשווי - בכלים גרפיים מודרניים נעשה שימוש בייצוג האלגברי של הצורות כדי לתאר את הצורות על המסך - ייצוג זה מאפשר אנימציה מהירה ויעילה.

תכנים

נקודות וישרים (7 שעות)

- חלוקה פנימית ביחס נתון של קטע
- הגדרת מרחק בין אובייקטים גאומטריים כמרחק המינימלי בין נקודות על האובייקטים
- מרחק בין נקודה לישר ומרחק בין ישרים
- מקומות גאומטריים – דיון במושג בהקשר של גאומטריה אנליטית ופתרון של בעיות למציאת מקומות גאומטריים כאשר המקום הגאומטרי הוא קו ישר
- מצבים הדדיים בין ישרים: ישרים נחתכים, ישרים מתלכדים, ישרים מקבילים

מעגל (7 שעות)

- הגדרת מעגל כמקום הגאומטרי של כל הנקודות במישור שמרחקיהן מנקודה נתונה הוא גודל קבוע
- מעגל שמרכזו בראשית נקרא מעגל קנוני. אפשר להסתכל על המעגל הכללי כעל הזזה של מעגל שמרכזו בראשית הצירים
- זיהוי על ידי השלמה לריבוע, לאלו ערכים של הפרמטרים התבנית $x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0$ מייצגת מעגל במישור
- מציאת משוואת משיק למעגל בנקודה על המעגל. (ניתן לעשות זאת תוך הסתמכות על תכונות של משיקים למעגל שנלמדו בגאומטריה אוקלידית או בכל דרך אחרת)
- מצבים הדדים בין מעגל וישר ובין שני מעגלים, בדרכים שונות
- פתרון של בעיות למציאת מקומות גאומטריים כאשר המקום הגאומטרי הוא מעגל

פרבולה (8 שעות)

- הגדרת הפרבולה כמקום הגאומטרי של כל הנקודות במישור שמרחקן מישר (המדריך) שווה למרחקן מנקודה (המוקד)
- בחירת מערכת צירים ומיקום במערכת של המדריך והמוקד כך שתתקבל משוואה של פרבולה עם משוואה קנונית
- הסקת תכונות הסימטריה של הפרבולה מתוך משוואתה הקנונית
- מציאת מצבים הדדיים של ישר ופרבולה ושל מעגל ופרבולה
- מציאת משוואת משיק לפרבולה כאשר נתונה נקודה על הפרבולה
- פתרון של בעיות למציאת מקומות גאומטריים כאשר המקום הגאומטרי הוא פרבולה
- העשרה: התכונה האופטית של פרבולה. הוכחה אנליטית של התכונה האופטית ושימושיה

אליפסה (8 שעות)

- הגדרת האליפסה כמקום גאומטרי של כל הנקודות במישור שסכום מרחקיהן משתי נקודות (המוקדים) הוא קבוע
- הגדרה נוספת של אליפסה ככיווץ/מתיחה של מעגל
- בחירת מערכת צירים ומיקום במערכת של המוקדים כנקודות על ציר ה-x, סימטריות ביחס לציר ה-y (או להיפך, המוקדים על ציר ה- y וסימטריים ביחס לציר x)
- הסקת המשוואה הקנונית של אליפסה
- הסקת תכונות הסימטריה של האליפסה מתוך משוואתה
- המצב ההדדי בין ישר לאליפסה ובין מעגל (שמרכזו על אחד הצירים) ואליפסה
- פתרון של בעיות למציאת מקומות גאומטריים כאשר המקום הגאומטרי הוא אליפסה

היפרבולה (8 שעות)

- הגדרת ההיפרבולה כמקום גאומטרי של כל הנקודות במישור שהפרש מרחקיהן משתי נקודות (המוקדים) הוא קבוע
- בחירת מערכת צירים ומיקום במערכת של המוקדים כנקודות על ציר ה-x, סימטריות ביחס לציר ה-y (או להיפך, המוקדים על ציר ה- y וסימטריים ביחס לציר x)
- הסקת המשוואה הקנונית של היפרבולה
- הסקת תכונות הסימטריה והאסימפטוטות של ההיפרבולה מתוך משוואתה
- המצב ההדדי בין ישר להיפרבולה ובין מעגל (שמרכזו על אחד הצירים) והיפרבולה
- פתרון של בעיות למציאת מקומות גאומטריים כאשר המקום הגאומטרי הוא היפרבולה
- העשרה: בחירת מוקדי ההיפרבולה על הישר y=x כאשר הם סימטריים ביחס לראשית והסקת משפחת הפונקציות $y=\frac{c}{x}$ כמייצגות היפרבולות

מבט מאחד על הצורות (2 שעות):

- מבט מאחד אלגברי באמצעות המשוואה הכללית: $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$
- העשרה: הצגת מבט מאחד, באמצעים ויזואליים, על כל חתכי החרוט

דגשים

1. זיהוי תכונות גאומטריות בהינתן תבנית אלגברית ולהיפך: להגיע לתבנית אלגברית בהינתן הגדרה של מקום גאומטרי
2. זיהוי עקומה בהינתן תבנית אלגברית של הזזות מקבילות לצירים וכיווץ ומתיחה של מעגל, פרבולה, אליפסה והיפרבולה
3. כשמוצאים מקום גאומטרי, חשוב להוסיף את המשמעות הגאומטרית. לדוגמה, כאשר נתונים שני קודקודים של משולש ונתון שטח המשולש, המקום הגאומטרי של הקודקוד השלישי הוא שני ישרים מקבילים לישר שעליו נמצאים הקודקודים הנתונים.
4. נשים לב למשמעות הגאומטרית של פתרון מערכות משוואות, לדוגמה, כאשר פותרים מערכת משוואות של שני מעגלים נחתכים ומחסרים את המשוואות, מתקבלת משוואה של קו ישר המייצג את המיתר המשותף לשני המעגלים.
5. הפעלת שיקולים איכותניים בפתרון משוואות (למשל, להבין שאין פתרון למערכת משוואות אם היא מייצגת מעגלים אשר המרחק בין מרכזיהם גדול מסכום הרדיוסים) (ראה בדוגמאות הרלוונטיות)
6. יתרון ההוכחה באמצעות גאומטריה אנליטית: כדי להוכיח שצורה מסוימת היא מקום גאומטרי, כלומר שהיא אוסף כל הנקודות במישור שמקיימות תנאי מסוים, עלינו להוכיח שני כיוונים. כיוון אחד מניח שנקודה נמצאת על הצורה ועלינו להוכיח שהיא מקיימת את התנאי. כיוון שני מניח שהנקודה מקיימת את התנאי ועלינו להראות שהיא נמצאת על הצורה. הגאומטריה האנליטית מאפשרת את הוכחת שני הכיוונים יחד באמצעות שרשרת שקילויות אלגבריות.
7. הצגת משפטים והוכחות בעזרת כלים אלגבריים, על ידי בחירה מושכלת של מערכת הצירים
8. הלמידה תכלול השערת השערות, הצגת דוגמה נגדית, ניסוח מדויק של משפט ומשפט הפוך.
9. יש לעודד הוכחות בדרכים שונות: הוכחות בדרכים גאומטריות והוכחות בשיטות אנליטיות.

חשבון דיפרנציאלי- פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות (40 שעות)

מבוא

הפרק מפגיש את התלמידים עם שתי משפחות חדשות של פונקציות: פונקציות מעריכיות ופונקציות לוגריתמיות. פונקציות אלה מתאימות לתיאור תופעות רבות בטבע ובכלכלה, כך שניתן להצמיח את הנושא מתוך סיטואציות מוכרות, ולשלב בעיות יישומיות לאורך כל הוראת הנושא.

ההזדמנות להציג את שתי הפונקציות האלה, המעריכית והלוגריתמית, זו לצד זו מאפשרת להעמיק את ההיכרות עם הקשר בין תכונות של פונקציה לתכונות הפונקציה ההפוכה לה.

הוראת הפרק[3] מבוססת על יסודות שהונחו לאורך כל שנות הלימודים באלגברה ובאנליזה, ולכן היא מאפשרת לחזור אל מושגים קודמים ולהתעמק בהם.

תכנים

תכני רקע

במהלך ההיכרות עם כל הפונקציות המעריכיות והלוגריתמיות ישולבו, ובמידת הצורך יחוזקו, כל התכנים והכלים הרלוונטים שנלמדו בשנים קודמות כמו פעולות על פונקציות, קצב השינוי, שיפוע של גרף בנקודה, משיק בנקודה, השתנות קצב השינוי ומושגים כמו קעירות ונגזרת שנייה, הקשר בין פונקציה מורכבת לפונקציות המרכיבות אותה, זוגיות ואי-זוגיות של פונקציות, חקירת משפחות פרמטריות של פונקציה, בעיות ערך קיצון, הצטברות ואינטגרציה.

אלגברה הקשורה לחזקות ולוגריתמים (8 שעות)

- חוקי החזקות והשורשים. חזקה עם מעריך רציונאלי[4].
- לוגריתם, לוגריתם של מכפלה, מנה, חזקה ושורש. מעבר לוגריתם מבסיס לבסיס.
- משוואות ואי שוויונות מעריכיים ולוגריתמיים, רק על פי הנדרש בחקירת פונקציות ובבעיות יישומיות.

[3] בכדי להתאים את הנושאים לזמן שעומד לרשות המורים ללמדם, הוחלט לא לכלול בתכנית מספר נושאים שקשורים לפונקציה המעריכית ונלמדו במסלול 5 יח"ל בעבר: (1) פונקציות חזקה עם מעריך רציונאלי; (2) נפח גוף סיבוב של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות.

[4] חזקה עם מעריך רציונאלי תוגדר: $x^{p/q} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$, כאשר $\frac{p}{q}$ שבר מצומצם עם מכנה חיובי.
לפי הגדרה זו פונקציית חזקה עם מעריך רציונלי זהה לפונקציית השורש המתאימה, ויש להן אותו תחום הגדרה.

לדוגמה, על פי הגדרה זו פונקצית החזקה $x^{1/3}$ זהה לפונקציה $\sqrt[3]{x}$, והיא מוגדרת לכל x.

חקירת פונקציות החזקה עם מעריך שבור הוצאה מתוכנית הלימוד, כך שהדיון בו ייערך במסגרת הקישוריות בין הנושאים שנלמדו בכיתות קודמות בנושא חזקות לפונקציות המעריכיות. בפרט, בניגוד לעבר, אין צורך להעמיק בנושא תחומי ההגדרה. הגדרה זו שונה מההגדרה שהייתה נהוגה בתוכנית הקודמת, על פיה פונקציית חזקה עם מעריך רציונלי שאינו שלם מוגדרת רק עבור מספרים אי שליליים.

חשבון דיפרנציאלי של פונקציות מעריכיות ופונקציות לוגריתמיות (27 שעות)

- גדילה מעריכית ודעיכה מעריכית, זמן מחצית חיים ויישומים נוספים.
- תכונותיהן ותיאורן הגרפי של פונקציות מעריכיות המוצגות כ- $y = a^x$.
- הקשר בין פונקציה מעריכית לסדרה הנדסית בדומה לקשר בין פונקציה לינארית לסדרה חשבונית.
- הערשה: הגדרת פעולת חזקה עם מעריך אי רציונלי תוך הנחת הרציפות של הפונקציה המעריכית.
- הפונקציות הלוגריתמיות כפונקציות הפוכות לפונקציות מעריכיות, תכונותיהן ותיאורן הגרפי.
- המספר e, והצגת פונקציות מעריכיות כ- $y = e^{kx}$. הצגת הפונקציה הלוגריתמית בבסיס הטבעי.
- נגזרות של פונקציות מעריכיות.
- נגזרות של פונקציות לוגריתמיות.
- חקירה של פונקציות מעריכיות, ופונקציות לוגריתמיות, כולל שילוב שלהן עם כל הפונקציות שנלמדו עד כה.
- הערשה: חקירת פונקציות חזקה עם מעריך רציונלי ושילובן עם פונקציות נוספות[5].
- לאורך כל הפרק ישולבו דוגמאות יישומיות כגון התפרקות תרופות, התפרקות רדיואקטיבית ושימוש בפחמן 14 להערכת גי ל ממצאים ארכיאולוגיים, סולם ריכטר וכו (ראה למשל דוגמאות 1, 2, 5, 7, 13 - 17 בנספח 2).

חשבון אינטגרלי של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות (10 שעות)

- חשבון אינטגרלי של פונקציות מעריכיות ושל פונקציות אשר הקדומה שלהן היא לוגריתמית: האינטגרל של e^x, a^x, $\frac{1}{x}$ וכן $e^{f(x)}$, $a^{f(x)}$, $\frac{1}{f(x)}$ כאשר $f(x)$ לינארית, ו- $\frac{f'(x)}{f(x)}$ ושילובן בפונקציות רציונאליות וטריגונומטריות.
- הערשה: חשבון אינטגרלי של פונקציות חזקה עם מעריך רציונאלי כגון x^r , $f(x)^r$.
- אינטגרלים מידיים, אינטגרל של סכום פונקציות ושל כפל פונקציה בקבוע. אינטגרל של פונקציה מורכבת כאשר הפונקציה הפנימית היא לינארית. אינטגרל של מכפלת פונקציה בנגזרתה (הפונקציה הקדומה היא פונקציה מורכבת), כאשר ניתנת לתלמיד הנחיה לזיהוי הנגזרת הפנימית.
- פונקציה קדומה: מציאת פונקציה על פי הנגזרת ונקודה על גרף הפונקציה.
- בעיות הצטברות יישומיות (ראה דוגמה 18 בנספח 2).
- חישוב שטח בין גרף הפונקציה לציר x (הפונקציה יכולה להיות חיובית, שלילית או לשנות סימן), חישוב שטח בין גרפים של שתי פונקציות, חישוב שטחים מורכבים.

דגשים (ראו דוגמאות בנספח 2)

1. כמו בכל הפרק של החשבון הדיפרנציאלי, הרעיון הוא לא להכביד בטכניקה אלגברית.

---

[5] נושא חקירת פונקציית חזקה הוצא מתוכנית הלימוד – רצוי, כהעשרה, לקשר נושא זה, שהוזכר בכיתות י וי״א בצורה איכותנית, לפונקציות המעריכיות והלוגריתמיות. לכן נושא זה מוזכר במקומות המתאימים, אולם נדגיש כי אין צורך לתרגל נושא זה.

2. לאורך כל הפרק ישולבו בעיות יישומיות (ראה למשל דוגמאות 1, 2, 5, 7, 13 - 18 בנספח 2).
3. כמו בכל הפרק של החשבון הדיפרנציאלי יש להדגיש שיקולים איכותניים, בחקירת פונקציות, גם ללא שימוש בנגזרת ראה למשל דוגמאות 8 ו- 10 בנספח 2.
4. יושם דגש על הפונקציות המעריכיות והלוגריתמיות כפונקציות הפוכות זו לזו, כולל שימוש גרפי בתכונה זו, וכולל הקשר בין הנגזרות הנובע מהיותן פונקציות הפוכות זו לזו.
5. יושם דגש על הקשר בין פונקציות מעריכיות מהצורה $y = a^x$ לנגזרות שלהן (ראה דוגמה 9 בנספח 2).
6. יושם דגש על הקשר בין התיאור הגרפי של פונקציות מהמשפחה $y = e^{f(x)}$ לתיאור הגרפי של הפונקציות הפנימיות, ובין הפונקציות מהמשפחה $y = \ln(f(x))$ לפונקציות הפנימיות שלהן ראה למשל דוגמה 6 בנספח 2.
7. הבעיות היישומיות יכללו דוגמאות שבהן נעשה שימוש בסקלה לוגריתמית במטרה לזהות את הפרמטרים של פונקציה מעריכית (ראה למשל דוגמה 11 בנספח 2).
8. הבעיות היישומיות יכללו דוגמאות של מציאת פונקציה לפי נגזרת ונקודה על גרף הפונקציה.

מספרים מרוכבים (20 שעות)

מבוא

במהלך לימודי המתמטיקה החל מגיל הגן ועד השלמת הלימודים במערכת החינוך הממלכתית, מושג המספר לובש צורה ופושט צורה וחוזר חלילה. תחילה, המספר משמש למניה, לאחר מכן, הוא מייצג כמות וכולל חלקים של השלם ולבסוף המספר הממשי מיוצג על ידי נקודה על ציר המספרים. ההיכרות עם אובייקט מתמטי חדש שגם הוא נכלל בקבוצת האובייקטים שנקראים "מספרים" מהווה הזדמנות לדיון ראשוני בשאלה: אילו תכונות צריך לקיים אובייקט מתמטי כדי שיוכל להיקרא מספר?". בפרק זה יכירו התלמידים את המספרים המרוכבים ויתברר שקיומו של יחס סדר לא נמנה עם התכונות הללו.
לידתם של המספרים המרוכבים לא היתה קלה והיתה כרוכה בהתנגדות. כאשר הופיעו לראשונה במאה ה-16, המתמטיקאים שהגו את הרעיון של שימוש בשורשים של מספרים שליליים לצורך פתרון משוואות, לא התייחסו אליהם כאל מספרים. חלפו כ-300 שנה, עד אשר במאה ה-19 זכו המספרים המרוכבים, שנקראו אז מדומים, למעמד של מספרים בעיני הקהילה המתמטית. את הקושי הכרוך בהוספת שורשים של מספרים שליליים למערכת המספרים חווים גם התלמידים.

בפרק זה נעסוק בהרחבת עולם המספרים מקבוצת המספרים הממשיים לקבוצת המספרים המרוכבים, ובישומיהם של המספרים המרוכבים בתחומים שונים כגון הנדסה אנליטית, וקטורים, גאומטריה, גרפיקה ממוחשבת ועוד.

תכנים

1. סקירה היסטורית של התפתחות קבוצות המספרים הטבעיים, השלמים, הרציונאליים והממשיים והרחבתם למספרים המרוכבים.

2. הגדרת המספר המרוכב: המספר i מקיים $i^2= -1$. מספר שצורתו a+ib כאשר a ו-b ממשיים נקרא מספר מרוכב.

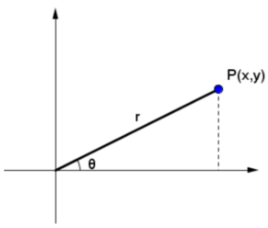
3. שוויון בין מספרים מרוכבים וארבע פעולות החשבון וקיום חוקי החילוף והקיבוץ של החיבור והכפל וחוק הפילוג במספרים המרוכבים. נדגיש כי במספרים המרוכבים אין יחס סדר.

4. הצגה גרפית של מספרים מרוכבים במישור גאוס. הפירוש הגאומטרי של חיבור וחיסור מספרים מרוכבים והקשר לחיבור וחיסור וקטורים גאומטריים.

5. הערך המוחלט $|z|$ והמספר הצמוד $\bar{z}$.
$|z_1 - z_2|$ המרחק בין הנקודות z_1 ו- z_2.

6. שורש של מספר מרוכב ופתרון משוואה ריבועית.

7. הצגה קוטבית של מספר מרוכב $z = r(cos\theta + isin\theta)$ והמעבר בין הייצוג האלגברי לייצוג הקוטבי ולהפך. מכפלת שני מספרים מרוכבים בהצגה הקוטבית והמשמעות הגאומטרית כסיבוב ומתיחה או כווץ.



8. משפט דה-מואבר – העלאה בחזקה של מספר מרוכב והוכחת

המשפט באינדוקציה.

9. שורשי היחידה מסדר n וייצוגם הגרפי כקודקודי מצולע משוכלל בעל n צלעות.

10. פתרון המשוואה $z^n = w$ וייצוגה הגרפי.

11. פתרון בעיות גאומטריות בעזרת מספרים מרוכבים בשילוב עם גאומטריה אנליטית ווקטורים.

12. זיהוי מקומות גאומטריים מוכרים המיוצגים באמצעות מספרים מרוכבים:

קישור לגאומטריה אנליטית ווקטורים:

$|z-a| = R$ מעגל שמרכזו a (מרוכב) ורדיוסו R (ממשי). (אוסף הנקודות במישור גאוס שמרחקן מהנקודה a שווה ל-R הוא מעגל.

$|z-a| = |z-b|$ אנך אמצעי בין הנקודות a ו-b.

$|z-a| = m|z-b|$ מעגל אפולוניוס.

13. הערה: הצגת המספר המרוכב בצורה $z = re^{i\theta}$

14. יישומים של המספרים המרוכבים כגון גרפיקה ממוחשבת: המספרים המרוכבים משמשים לייצוג של נקודות במישור ופעולות החיבור והכפל במספרים המרוכבים מאפשרות לבצע טרנספורמציות גאומטריות על עצמים במישור כגון הזזה, מתיחה וכווץ, שיקוף, סיבוב ועוד (ראה דוגמאות).

דגשים

1. למספרים המרוכבים עם ארבע פעולות החשבון יש מבנה הדומה למספרים הממשיים, מבנה הנקרא שדה. נדגיש כי במספרים המרוכבים אין יחס סדר.

2. לכל משוואה ריבועית עם מקדמים ממשיים יש שני פתרונות ממשיים או שני פתרונות מרוכבים הצמודים זה לזה.

3. הערה: המשפט היסודי של האלגברה - לכל משוואה ממעלה n יש בדיוק n פתרונות מרוכבים.

4. קישוריות של המספרים המרוכבים במישור גאוס לגאומטריה אנליטית, וקטורים במישור.

5. במספרים מרוכבים לא מגדירים יחס סדר בין המספרים. קיים יחס סדר בין הערכים המוחלטים של המספרים המרוכבים, כי אלו מספרים ממשיים.

6. פתרונות המשוואה $x^n = a$ נקראים השורשים של המספר המרוכב a .

7. נשלב בתוך התרגול שאלות אורייניות המדגישות יישום של המספרים כגון גרפיקה ממוחשבת.

נספח 1: מקומן של ההוכחות בתוכנית הלימודים

הוכחות הן מרכזיות בתכנית הלימודים ברמת 5 יחידות לימוד והן משולבות בכל נושאי הלימוד שלה. יש ביטוי לכך גם ברציונל של התכנית בתחילת מסמך זה. בנספח הנוכחי נעמוד על היבטים מרכזיים הקשורים להוכחות אשר מתבטאים לאורך התכנית בכלל, ובפרקים כגון הוכחה באינדוקציה מתמטית בפרט.

קיימות הפניות מהנספח אל מקומות רלוונטיים בתכנית וקיימות הפניות מתוך התכנית אל סעיפי הנספח.

דגשים קשורים להוכחות שרצוי להדגיש בספרי הלימוד ובהוראה

1. במתמטיקה, טענה מתקבלת כנכונה רק אם יש לה הוכחה.
2. מטרה מרכזית של הוכחות בתוכנית הלימודים ברמת 5 יח״ל היא להסביר מדוע הטענה נכונה. לעיתים קרובות הבנת הסיבות מדוע הטענה נכונה מבססות קשרים בין האובייקטים המתמטיים המעורבים בה. מסיבה זו יש להעדיף תמיד הוכחות מסבירות על פני הוכחות שרק מאשרות שהטענה נכונה. באותה רוח נציין שיש לשים דגש על בניית שרשרת היסקית נכונה תוך שילוב של כל הנימוקים הדרושים, ולא בהכרח על הכתיבה הפורמלית.
3. חשוב לפתח אצל התלמידים מיומנויות שונות הקשורות בהוכחה:
   - להתנסות בפירוש הוכחות המוצגות ע״י אחרים (המורה בכיתה, ספר לימוד, חברים במהלך דיון).
   - להתנסות בבנייה של הוכחות, הן בתרגילים שבהם ההוכחה היא לב התרגיל, והן בהצדקה של שיקולים שהתלמיד מעלה במהלך דיון. לשם כך חשוב שמשימות רבות המוצגות לתלמידים ידרשו הוכחה או הצדקה.
   - להבחין בין שיקולים נכונים ושגויים במהלך ההוכחה, ובפרט:
     - לזהות הנחות בלתי-מוצדקות,
     - לזהות שיקולים מעגליים,
     - לזהות מצבים בהם לא מתקיימים התנאים של משפט בו משתמשים.
4. כדי שתלמידים יוכלו לעקב אחרי הוכחה הם חייבים לפרש את הטענה. ניתן להשיג זאת על ידי הצגת הטענה באמצעות דוגמאות (גם דוגמאות שהתלמידים יוצרים בעצמם) וגם על ידי ניסוחה במילים של התלמיד.
5. חשוב שהתלמידים יפנימו את הרעיון שהוכחה תקפה לגבי כל המקרים בהם מתקיימים תנאי הטענה. במילים אחרות: לטענה שהוכחה אין יוצאים מן הכלל ולא יכולה להיות דוגמה נגדית.
6. תכנית הלימודים מעודדת חקר והכללות, המבוססות על חקירת מקרים פרטיים אך בינתיים לא הוכחו אלא נוסחו כהשערות. על כן חשוב במיוחד לעורר ולחזק את המודעות למעמד של השערות: טענה היא בגדר השערה כל עוד לא הוכחה.
7. יש להסביר איך נושא ההוכחה מתקשר ללוגיקה: אין צורך להציג את הלוגיקה האבסטרקטית ואף לא את הטרמינולוגיה הקשורה בה, אך יש להציג את כללי הבסיס שמושג ההוכחה נגזר מהם, למשל
   א. אם ״א״ גורר ״ב״ ו-״ב״ גורר ״ג״ אז ״א״ גורר ״ג״,
   ב. אם ״א״ אז ״ב״ שקול ל: אם ״לא ב״ אז ״לא א״,
   ג. יתכנו מקרים בהן ״א״ גורר ״ב״ אך ״ב״ אינו גורר ״א״ (כלומר, משפט לא גורר את המשפט ההפוך לו).

   כללי הלוגיקה האלה יוצגו במסגרת ההקשר שהצורך בהם עולה בו ולא כיחידה נפרדת.
8. באופן דומה יש להציג את תפקידן של ואת חשיבותן של דוגמאות נגדיות ובהקשר זה לבנות את הבסיס להוכחה על דרך השלילה. כדאי להדגיש שהרעיון של הוכחה בדרך השלילה הוא להראות שאם הטענה לא נכונה מתקבל אבסורד – אם הטענה איננה נכונה ניתן להוכיח טענה אחרת שידועה כשגויה.

9. הנושא אינדוקציה מתמטית נפתח ביחידת מבוא המציגה את רעיון ההוכחה תוך כדי הדגמה והתנסות. חשוב להציג את הנושא באמצעות דוגמאות פשוטות כדי להפנות את הקשב של התלמיד לרעיון ההוכחה, ללא הפרעה של חישובים אלגבריים מורכבים. יש לדאוג שצורת הוכחה זו תופיע בהמשך בתחומים רבים ככל שניתן.
10. הוכחות בדרך של אינדוקציה מתמטית ובדרך השלילה נחשבות ככלים מתמטיים חשובים אך לא אינטואיטיביים. הטמעת כלים אלה בהלך החשיבה של התלמידים דורשת זמן ומאמץ.
11. דיון בתפקידן של דוגמאות:

- דוגמה תומכת (מקיימת את תנאי הטענה וגם את התוצאה שלה): דוגמאות תומכות חשובות בשיח המתמטי. הן מחזקות השערות ומעודדות להמשיך לחקור ולחפש הוכחה. יחד עם זאת חשוב לחזור ולחזק את המודעות שעם כל חשיבותן של הדוגמאות התומכות הן אינן מוכיחות טענות כלליות. הדיון בסוגיה זו חשוב כיוון שבשיקולים יומיומיים ואף במדעי הטבע, ממצאים אמפיריים כן משמשים כראיות.
- ניתוח של הסיבות שבגללן דוגמה תומכת מקיימת את הטענה לעיתים מאירה את הרעיון של ההוכחה הכללית.
- דוגמה נגדית (מקיימת את תנאי הטענה אך לא את התוצאה שלה) סותרת את הטענה ולכן מפריכה טענה.
- דוגמה שאינה מקיימת את התנאים של טענה איננה רלוונטית, וחשוב שתלמידים ידעו להבחין בינה לבין דוגמאות תומכות ודוגמאות נגדיות. ניתן להשיג זאת באמצעות שיפוט של דוגמאות, הן כאלו שתלמידים יוצרים במהלך דיון והן דוגמאות מוכנות.

12. לצד הדיון בטענות כלליות (טענות "לכל") יש לדון גם בטענות קיום שכדי להוכיח אותן מספיקה דוגמה אחת וכן בטענות המתייחסות למספר סופי של מקרים אותן ניתן להוכיח באמצעות בדיקת כל המקרים האפשריים.
13. רצוי להוכיח טענות שונות בדרכים שונות במקרים שניתן ולהדגים בכך שאפשר ללמוד על מגוון שיקולים וקשרים מהוכחות שונות. יש לעודד תלמידים לחפש הוכחות אחרות, למשל הוכחות שנעשה בהן שימוש בסימטריה – שיקוף ו/או סיבוב.
14. אמנם לכל הטענות שבתכנית הלימודים יש הוכחות. יחד עם זאת לא ניתן להוכיח הכל במסגרת מספר השעות שעומדות לרשות לימודי המתמטיקה ובמסגרת המושגים המוכרים לתלמידים (למשל, התלמידים לא מכירים את ההגדרה הפורמלית של מושג הגבול). ההחלטה אם להוכיח טענה מסויימת או לא עשוייה להיות מבוססת על חשיבות הטענה (למשל המשפט היסודי של האנליזה) וכן על היותה מסבירה או לא (ראו סעיף 2).
במקרים בהם לא מוכיחים טענה חשוב:

- לציין את העובדה שההוכחה קיימת
- להסביר מדוע לא הוכחנו (למשל: כאשר הכלים להוכחה אינם בהישג ידם של התלמידים או בגלל דמיון להוכחות שכבר הוצגו)
- חשוב גם לציין מקרים בהם הנימוק המצופה מתלמידים אינו מהווה הוכחה (למשל במקרה שמזהים אסימפטוטות בדרכים אמפיריות).
- להפנות תלמידים מתעניינים למקורות בהם מופיעה ההוכחה.

הערה: רצוי להפנות תלמידים מתעניינים לספרות בנושא מקומה של ההוכחה מתמטיקה מודרנית (בתחילת המאה ה-20 הילברט (Hilbert) סבר שניתן להוכיח או להפריך כל טענה וטענה במתמטיקה, אולם גדל (Gödel) הראה שאין זה כך), ולספרות המדגישה את העובדה

שהמתמטיקה היא תחום הממשיך להתפתח כל העת, וטענות שהיו בגדר השערה משנות את מעמדן והופכות למשפטים מוכחים או לטענות שהופרכו.

נספח 2 : דוגמאות לשאלות על פי נושאי הלימוד

הדוגמאות מסמנות יעדים ומדגימות פעילויות שתואמות את הדגשים בתוכנית החדשה ואת הערך המוסף שלה. יש לכלול בספרי הלימוד תרגילים נוספים ברוח זו, תרגילים שיתרמו להבנה ולשליטה בחומר ויפתחו את היכולות הטכניות של התלמידים בהדרגה. עם זאת, נדגיש כי לא רצוי לכלול תרגילים טכניים ברמת מורכבות גבוהה באופן משמעותי מהדוגמאות המובאות.

הדוגמאות בתחילת כל פרק מדגימות שאלות הבנה פשוטות המסייעות להטמעת החומר והבנה איכותנית שלו, כולל חלקים מהפן היישומי של התחום. מומלץ יהיה לשלב שאלות מסוג זה כ"שאלות קטנות" בבחינות הבגרויות. בנוסף, בכל פרק מובאות מספר שאלות מבחינות הבגרות בשנים האחרונות המשקפות את רמת המורכבות הנדרשת מבוגרי התוכנית.

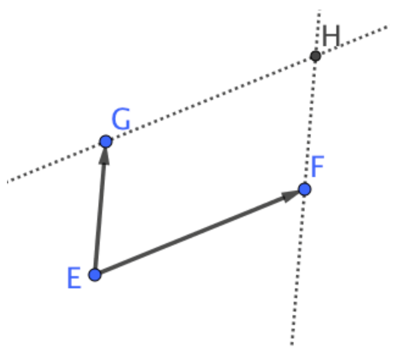
שוב נדגיש כי דוגמאות ו/או נושאים המצוינים **כהעשרה** לא ייכללו כנושאי חובה בתוכנית, אך מצופה מהמורים להכירם ולהפנות את התלמידים המתעניינים לקריאה עליהם בספרי הלימוד ובחומרי ההעשרה נוספים.

דוגמאות לשאלות בנושא וקטורים

1. הדגמה ויזואלית לחוק החילוף בחיבור וקטורי

נתבונן בווקטורים $\overrightarrow{EF}$ ו- $\overrightarrow{EG}$ ונראה כי סכומם הוא אלכסון של מקבילית שקודקודיה EGHF (כאשר הנקודה H היא מפגש הישר המקביל ל EF העובר דרך G עם הישר שמקביל ל EG ועובר דרך F.

הסיקו מבנייה זו את חוק החילוף בחיבור וקטורי.



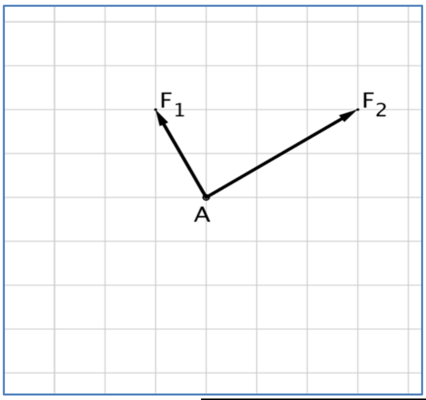
דוגמאות לחיבור וקטורים בהקשר

2. מטיילת יוצאת מהמחנה למסלול הליכה בג'ונגל. ביום הראשון היא הולכת מרחק של 7 קילומטרים בכיוון צפון מזרח (45° צפונה מהמזרח). ביום השני היא הולכת 6 קילומטרים בכיוון 300° (שישים מעלות דרומה מהמזרח) וביום השלישי היא הולכת מרחק של 8 קילומטרים בכיוון 150° (שלושים מעלות צפונה מהמערב) . ביום הרביעי היא החליטה לנוח. חבר יוצא מהמחנה ומבקש להצטרף אל המטיילת.

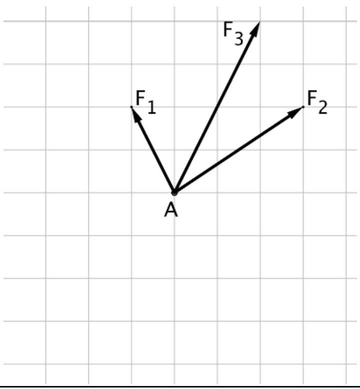
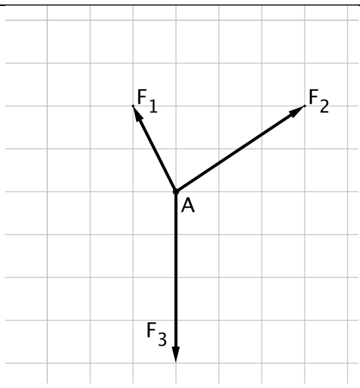
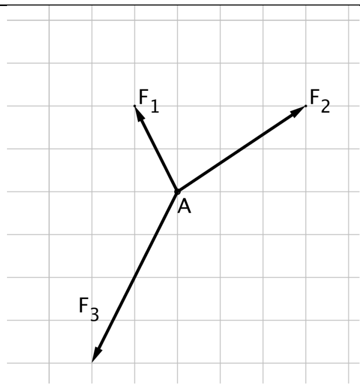
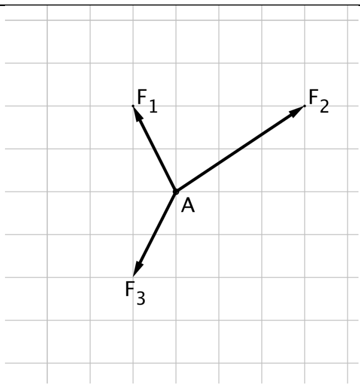
א. הנחי את החבר, באיזה כוון ולאורך כמה קילומטרים עליו ללכת כדי לפגשה? (3.89 קילומטרים בכיוון 74.78°)

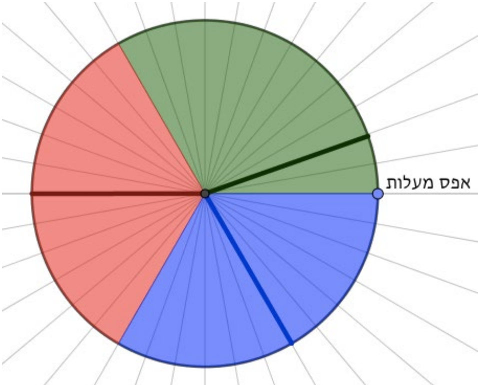
ב. החבר טעה בחישובים והלך מרחק של 3.89 קילומטרים בזווית של 74°. מה יהיה מרחקו מהמטיילת כשיסיים ללכת? (כחמישה מטרים)

3. שני אנשים מושכים חבלים שקשורים ליתד. משיכת החבל מפעילה על היתד, שמצוינת על ידי הנקודה A, כוחות בגדלים וכיוונים לפי הציור הנתון: מהו כיוונו וגודלו של הכוח שצריך להפעיל על הנקודה A אדם המושך בחבל שלישי, כדי שהמערכת תהיה בשווי משקל וסכום כל הכוחות יהיה אפס?



בחר את האפשרות המתאימה:

אפשרות ראשונה	אפשרות שניה
	
אפשרות שלישית	**אפשרות רביעית**
	



4. שלושה חבלים קשורים בקצותיהם. שלוש קבוצות משחקות "משיכת-חבל" במגרש משחקים עגול כך שכל קבוצה מושכת את אחד הקצוות. לכל קבוצה יש שטח של גזרה בת $120°$. לקבוצה הירוקה שטח ירוק, לקבוצה האדומה שטח אדום ולקבוצה הכחולה שטח כחול. קבוצה מנצחת אם היא מצליחה למשוך את נקודת הקשירה לשטחה. הקבוצה הירוקה מושכת בזווית $20°$ בכוח שגודלו 500 ניוטון, הקבוצה האדומה מושכת בכיוון $180°$ בכוח שגודלו 400 ניוטון והקבוצה הכחולה מושכת בכיוון $300°$ בכוח שגודלו 300 ניוטון. כיווני המשיכה מצוינים על ידי קווים בולטים בציור.
   א. איזו קבוצה תנצח בתחרות?
   ב. מהו השינוי המינימלי בכיוון שצריכה לעשות כל קבוצה שלא נצחה (בנפרד) כדי לנצח בתחרות?

5. המהירות כווקטור - בניית וקטור מהירות כסכום של מהירויות

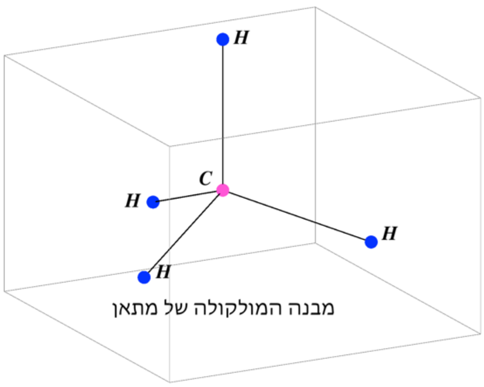
מטוס טס במהירות 400 קמ"ש לכיוון מזרח. המטוס נכנס לאזור בו נושבת רוח לכיוון צפון-מערב במהירות 50 קמ"ש. מצאו את כיוונו וגודלו של וקטור המהירות של המטוס ביחס לקרקע באזור זה.

6. דוגמה נוספת:
   כדור פורח

7. יישומונים לחיבור וקטורים בתוך הקשר
   [חיבור וקטורים בתוך הקשר]
   [עוד חיבור וקטורים]

8. דוגמא לשימוש בווקטורים בתחום הכימיה

קוטביות של מולקולה מייצגת את הכיוון של השדה החשמלי במולקולה ופרופורציונית לגודלו. הקוטביות של המולקולה נקבעת כסכום וקטורֵי הקוטביות של כל אחד מהקשרים הכימיים שמרכיבים אותה. למשל במולקולה של מתאן (CH_4), שגרעיני המימן נמצאים בקודקודי טטראדר משוכלל וגרעין הפחמן נמצא במרכז הכדור שחוסם אותו, יש ארבעה קשרים של פחמן עם מימן. כיוון וקטור הקוטביות של כל קשר הוא ככיוון הישר שמחבר את גרעיני האטומים הקשורים.

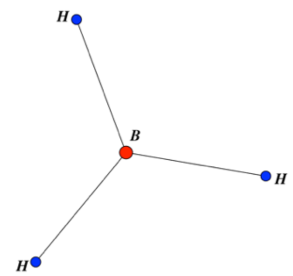
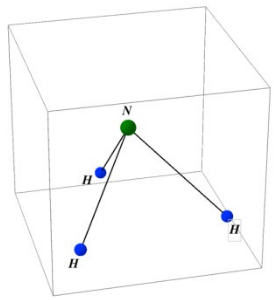


מבנה המולקולה של מתאן

נתבונן במבנה של שתי מולקולות:

מבנה המולקולה BH_3 הוא משולשי (ארבעת האטומים נמצאים במישור אחד) כך שגרעיני אטומי המימן (H) נמצאים בקירוב בקודקודי משולש שווה צלעות וגרעין הבור (Boron) (B) נמצא בקירוב במרכז המעגל החוסם אותו.

מבנה המולקולה NH_3 הוא פירמידה משולשת שכל מקצועותיה משולשים שווי צלעות, כך שכל אחד מהגרעינים במולקולה נמצא בקודקוד של הפירמידה.

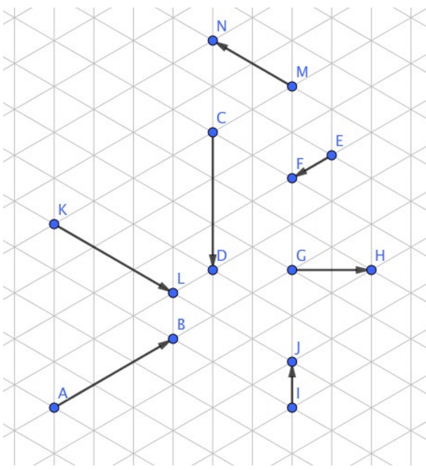
מבנה המולקולה BH_3	**מבנה המולקולה NH_3**
	

בהנחה שהקוטביות בכל אחד מהקשרים הכימיים של המולקולות המדוברות אינה אפס, הסיקו אם הקוטביות של כל המולקולה שווה או שונה מאפס.

9. [עוד על קוטביות של מולקולות]

דוגמאות לתרגילים המדגימים תכונות וקטוריות

10. תלות לינארית



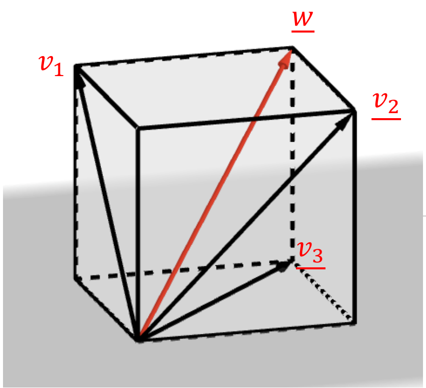
א. מתוך הווקטורים שבסרטוט (התלת ממדי) בחרו חמישה זוגות של וקטורים בלתי תלויים לינארית.

ב. האם הווקטורים $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{CD}$ ו- $\overrightarrow{KL}$ הם בלתי תלויים לינארית? הוכיחו את טענתכם.

ג. האם קיימים שלושה וקטורים בסרטוט שמהווים קבוצת וקטורים בלתי תלויה לינארית? אם כן, ציינו קבוצה כזו. (אתגר: כמה קבוצות שכאלה ניתן להרכיב?)

ד. האם הווקטור $\overrightarrow{AB}$ תלוי לינארית בווקטורים $\overrightarrow{IJ}$ ו-$\overrightarrow{KL}$? אם כן, מצאו את הסקלרים המתאימים, אם לא, הסבירו.

11. תלות לינארית: נתונה קובייה. נסמן את וקטורי אלכסוני הפאות הצדדיות שמוצאם מקודקוד אחד ב- $\underline{v_1}$, $\underline{v_2}$ ו- $\underline{v_3}$ (ראו ציור).



א. האם הווקטור $\underline{v_3}$ תלוי לינארית בווקטורים $\underline{v_2}$, $\underline{v_1}$? אם כן, מצאו את הקבועים α ו- β
כך ש- $\underline{v_3} = \alpha \cdot \underline{v_1} + \beta \cdot \underline{v_2}$.

ב. נסמן ב- $\underline{w}$ את האלכסון הראשי של הקובייה שמוצאו באותו קודקוד. האם הווקטור $\underline{w}$ תלוי לינארית בווקטורים $\underline{v_1}$, $\underline{v_2}$, $\underline{v_3}$? אם כן, מצאו את הקבועים α , β ו- γ
כך ש- $\underline{w} = \alpha \cdot \underline{v_1} + \beta \cdot \underline{v_2} + \gamma \cdot \underline{v_3}$.

12. יחידות ההצגה

נתונים הווקטורים: $\underline{a} = (1,2,3)$, $\underline{b} = (4,5,6)$ ו- $\underline{c} = (2,1,0)$

א. הבע את הווקטור $\underline{x} = (1,1,1)$ כצירוף לינארי של הווקטורים $\underline{a}$, $\underline{b}$ ו- $\underline{c}$.

ב. האם יש צירוף לינארי נוסף בו ניתן להביע את הוקטור $\underline{x}$?

(תשובה: למשל $\underline{x} = \frac{1}{3}\underline{b} - \frac{1}{3}\underline{a}$ או $\underline{x} = \frac{1}{3}\underline{c} + \frac{1}{3}\underline{a}$)

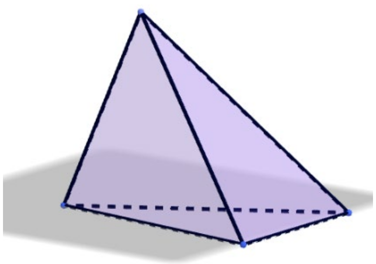
ג. האם תשובתך לסעיף הקודם נמצאת בסתירה לעקרון יחידות ההצגה?

13. יחידות ההצגה (מתוך רימון ועמיצור עמוד 118 תרגיל 42)

הוכיחו כי בטטראדר שלושת הישרים המחברים את אמצעיהם של מקצועות נגדיים (מקצועות שאין להם נקודה משותפת) נפגשים בנקודה אחת. הוכיחו כי נקודה זו היא מרכז הכובד של הטטראדר.

14. תכונות של גופים במרחב

מתוך "וקטורים" 4-5 יחידות לימוד (תוכנית מאוחדת) מאת אורי רימון ושמשון עמיצור עמוד 11



בטטראדר ABCD כלשהו,

מסמנים $\underline{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \underline{b} = \overrightarrow{BC}, \quad \underline{c} = \overrightarrow{AD}$.

א. סמן את שאר מקצועות הטטראדר בעזרת $\underline{a}$, $\underline{b}$ ו- $\underline{c}$.

ב. הוכח כי $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ והצג את הווקטור הזה בעזרת $\underline{a}$, $\underline{b}$ ו- $\underline{c}$.

ג. האם המסקנה נכונה גם כאשר הנקודות ABCD נמצאות באותו מישור?

15. הוכחת תכונות של צורות מישוריות

מתוך "וקטורים" 4-5 יחידות לימוד (תוכנית מאוחדת) מאת אורי רימון ושמשון עמיצור עמוד 15

במרובע ABCD, E אמצע AD ו- F אמצע BC. כמו כן נתון כי $\underline{u} = \overrightarrow{AB}, \quad \underline{v} = \overrightarrow{DC}$.

הוכיחו כי $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v})$.

איזו מסקנה תוכלו להסיק אם נתון כי המרובע הוא טרפז כך ש- AB∥DC ?

שימוש בוקטורים בבעיות גאומטריות במישור ובמרחב

16. הוכחת משפטים בכלים וקטוריים

הוכח את המשפטים הבאים :

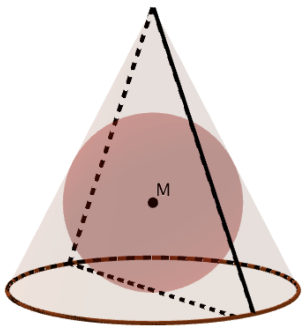
א. במשולש ישר זווית אורך התיכון ליתר שווה למחצית אורך היתר.

ב. מרובע הוא מקבילית אם ורק אם אלכסוניו חוצים זה את זה. (להוכחת הטענה שבמקבילית האלכסונים חוצים זה את זה נדרשת יחידות ההצגה)

ג. קטע האמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.

ד. נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס 2:1. (למשל על ידי שימוש ביחידות ההצגה)

ה. כל הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

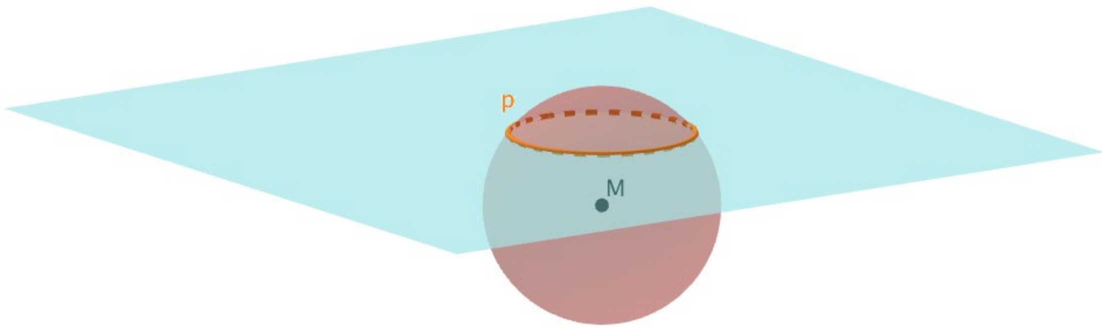


17. בעיה עם חרוט וכדור

בחרוט ישר חסום כדור בעל רדיוס R. ממרכז הכדור, M, רואים את הקו היוצר את החרוט בזווית α. הביעו את נפח החרוט באמצעות R ו- α.

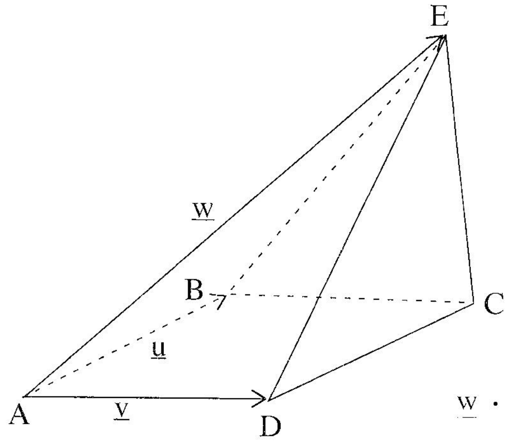
18. בעיה עם כדור

המעגל p הוא החיתוך בין קליפת כדור שמרכזו M ורדיוסו R ובין מישור שמרחקו מ-M הוא d. הבע באמצעות הפרמטרים R ו- d את היקף המעגל p.



דוגמאות ברמה הנדרשת לשאלות המורכבות בבגרויות

19. שאלה ממבחן בגרות קיץ תשע"ו 5 יח"ל



בפירמידה ABCDE שבסיסה ריבוע

נתון: $\vec{AD} \perp \vec{DE}$,

הווקטור $\vec{AE}$ יוצר זוויות שוות

עם הווקטורים $\vec{AD}$ ו־ $\vec{AB}$,

אורך צלע הבסיס הוא 5 .

נסמן: $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$,

$\vec{AE} = \underline{w}$

(ראה ציור).

א. מצא את הערך של המכפלה הסקלרית $\underline{w} \cdot \underline{v}$

ושל המכפלה הסקלרית $\underline{w} \cdot \underline{u}$.

הנקודה H נמצאת על המקצוע EC כך ש־ $\vec{EH} = \frac{2}{5}\vec{EC}$.

נתון: $|\vec{AH}| = 2\sqrt{17}$

ב. מצא את אורך המקצוע AE .

ג. (1) הראה כי המשולש EDC הוא ישר־זווית, ומצא את שטחו.

(2) מצא את נפח הפירמידה המשולשת AEDC .

20. שאלה ממבחן בגרות קיץ תשע"ד מועד ב 5 יח"ל

במשולש ABC , גובה המשולש לצלע AB הוא CD .

נסמן: $\vec{CA} = \underline{u}$, $\vec{CB} = \underline{v}$, $\vec{AD} = t\vec{AB}$.

נתון: $\cos \sphericalangle ACB = \frac{3}{4}$, $|\vec{CA}| = 1$, $|\vec{CB}| = 2$.

א. חשב את הערך של t בעזרת חשבון וקטורים.

ב. סרטט את המשולש ABC ואת הגובה CD כך שהסרטוט יתאים לערך של t

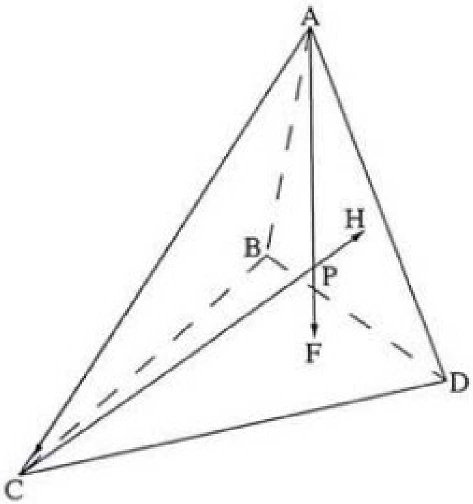
שחישבת בסעיף א.

ג. נקודה E נמצאת על הצלע BC (בין B ל־ C).

נתון גם: $\frac{CE}{BE} = \frac{3}{5}$. נסמן: $\vec{CD} = \underline{h}$.

הבע את $\vec{AE}$ באמצעות $\underline{u}$ ו־ $\underline{h}$ בלבד.

21. שאלה ממבחן בגרות קיץ תשע"ד מועד ג 5 יח"ל



בפירמידה משולשת ABCD

AF הוא גובה הפירמידה לפאה BDC ,

ו־ CH הוא גובה הפירמידה לפאה ABD .

הישרים AF ו־ CH נפגשים בנקודה P

(ראה ציור).

א. (1) הסבר מדוע $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

(2) הוכח כי $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

ב. הוכח כי $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BD}$.

ג. סמן: $\overrightarrow{BD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{BA} = \underline{w}$

הוכח כי אם $AB = BC$ אז $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ABD$.

22. שאלה ממבחן בגרות קיץ תשע"ו מועד ב 5 יח"ל

נתון מעגל הנמצא במישור π , ומרכזו בראשית הצירים $O\ (0\ ,0\ ,0)$.

הישר $\ell_1 : \underline{x} = (2\ ,2\ ,0) + t(1\ ,2\ ,1)$ נמצא במישור π , ומשיק למעגל זה בנקודה B .

א. מצא את השיעורים של הנקודה B .

ב. הישר $\ell_2 : \underline{x} = (0\ ,1\ ,1) + s(2\ ,-1\ ,1)$ חותך את המישור π בנקודה A .

(1) הראה כי הנקודה A נמצאת על המעגל הנתון.

(2) מצא את שטח המשולש AOB .

23. שאלה ממבחן בגרות קיץ תשע"ה 5 יח"ל

נתון ישר ℓ שמשוואתו $\underline{x} = (1\ ,2\ ,-4) + t(1\ ,-2\ ,2)$.

מישור π מאונך לישר ℓ , וחותך את ציר ה־ x בנקודה A .

נקודה A נמצאת על הקרן החיובית של ציר ה־ x במרחק 8 מראשית הצירים O .

נקודות B ו־ C הן נקודות החיתוך של המישור π עם ציר ה־ y ועם ציר ה־ z בהתאמה.

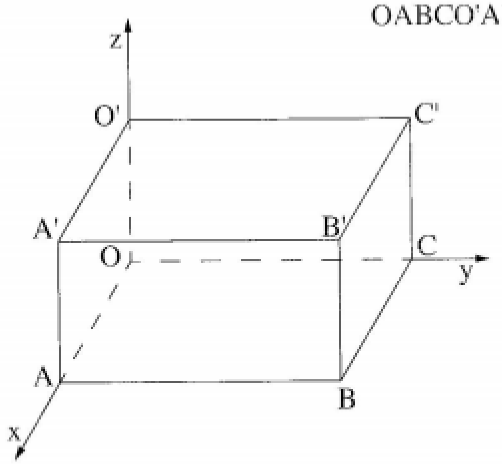
א. (1) מצא את האורך של כל אחד מששת המקצועות של הפירמידה OABC .

(2) האם הפירמידה OABC היא ישרה? נמק.

ב. נקודה D נמצאת על הקטע AC כך ש־ OD חוצה־זווית AOC .

מהו המצב ההדדי בין הישר OD לישר BC ? נמק.

24. שאלה ממבחן בגרות קיץ תשע"ה מועד ב 5 יח"ל



המקצועות OA, OC ו־ OO' של התיבה $OABCO'A'B'C'$

מונחים על הצירים, כמתואר בציור.

נתון כי המישור $2x+y+2z-2m=0$

עובר דרך הקדקודים A, C ו־ O'.

m הוא פרמטר גדול מ־ 0.

א. האם הישר BC' מקביל למישור הנתון או חותך אותו? נמק.

ב. הישר $O'M$ נמצא במישור הנתון, ואינו מתלכד עם הישר $O'A$.

(1) האם הישרים BC' ו־ $O'M$ מקבילים? נמק.

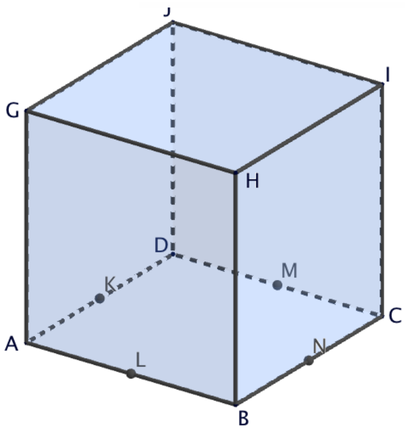
(2) הבע באמצעות m את המרחק בין הישרים BC' ו־ $O'M$.

ג. דרך הקדקודים C' ו־ B העבירו אנכים למישור ACO'.

האנכים חותכים את המישור בנקודות E ו־ F.

אורך הקטע EF הוא $2\sqrt{2}$.

מצא את הערך של m.



25. שאלת הכנה לשאלה מבגרות קיץ תשס"ט מועד ב'

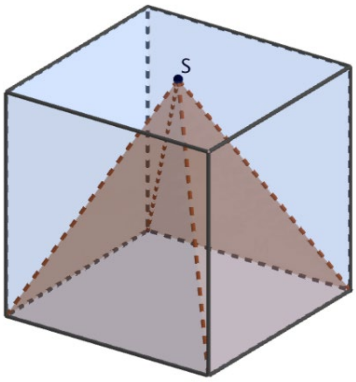
נתונה הקובייה ABCDGHIJ . K, L, M ו-N הם אמצעי המקצועות AD, AB, CD ו- BC בהתאמה.

א. הסבירו מדוע הנקודות K, L ו- H מגדירות מישור?

ב. הסבר מדוע הנקודה J נמצאת על מישור שעובר דרך K, L ו-H ?

ג. האם הנקודות N, M, H ו- J נמצאות על אותו מישור?

ד. מצאו את ישר החיתוך של המישורים KLH ו- MNJ.

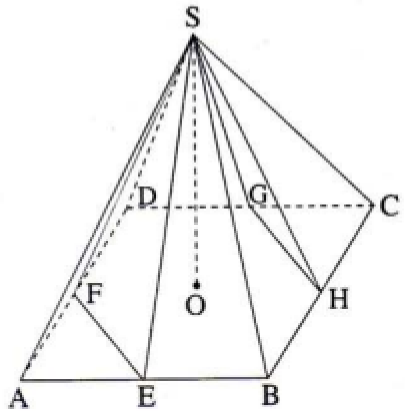


26. הסבירו מדוע הפירמידה הנתונה בבעיה הבאה ניתנת לשיכון בקובייה לפי הסרטוט הבא :

כאשר S היא מפגש אלכסוני הבסיס העליון של הקובייה.

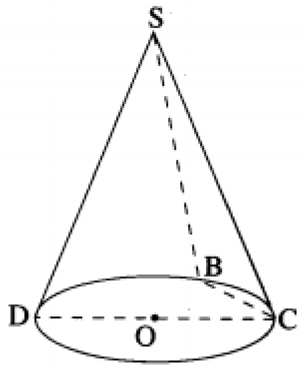
27. שאלה ממבחן בגרות קיץ תשס"ט מועד ב 5 יח"ל

נתונה פירמידה ישרה SABCD
שבסיסה ABCD הוא ריבוע.
E , F , G , H הן נקודות האמצע
של צלעות הבסיס (ראה ציור).
נתון כי גובה הפירמידה שווה לצלע הבסיס.
חשב את גודל הזווית שבין המישור SHG
למישור SFE .



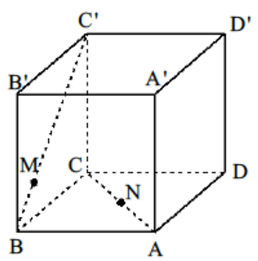
28. שאלה ממבחן בגרות חורף תש״ע 5 יח״ל

נתון חרוט ישר שקדקודו S , ומרכז הבסיס שלו הוא O .
B , D ו- C הן נקודות על ההיקף של בסיס החרוט.
DC הוא קוטר.
נתון: $\sphericalangle BOC = 40^\circ$,
הזווית בין המישור SBC למישור של
בסיס החרוט היא 55° .
חשב את גודל הזווית DSC .



29. שאלה ממבחן בגרות קיץ תשע״ז מועד ב׳ 5 יח״ל

נתונה קובייה ABCDA'B'C'D' .
נסמן: $\overrightarrow{CB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{CC'} = \underline{w}$.
נתון: $\overrightarrow{AN} = s\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BC'}$.
א. מצא את היחס $\frac{s}{t}$ שעבורו MN
מקביל למישור AA'B'B $(t \neq 0)$.



נתון: $s = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{4}$.
ב. חשב את הזווית שבין MN ובין המישור ABCD .
ג. מהו המצב ההדדי של הישרים AB ו- MN ? נמק.

דוגמאות לשאלות בגאומטריה אנליטית

דוגמאות לשאלות "קטנות"

1. קבע אם המשוואות הבאות מייצגות: קו ישר, מעגל, אליפסה, היפרבולה או פרבולה.

$$y^2-1=\frac{(x-2)^2}{9}$$

$$y^2+1=\frac{(x-2)^2}{9}$$

$$y^2=\frac{(x-2)^2}{9}$$

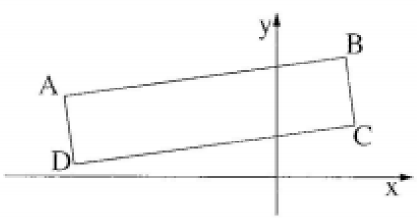
$$-y^2+1=\frac{(x-2)^2}{9}$$

$$y-1=\frac{(x-2)^2}{9}$$

נקודות קטעים וישרים

2. הצג את האנך אמצעי כמקום גאומטרי והוכח שהאנך האמצעי הוא המקום הגאומטרי של כל הנקודות במישור שמרחקיהן מקצות קטע שווים. מומלץ לבחור מערכת צירים מתאימה לצורך ההוכחה.
3. הצג את חוצה הזווית כמקום גאומטרי תוך הסתמכות על המשפט שהוכח בכיתה יוד בכלים של גאומטריה אוקלידית
4. הוכח את המשפט על זווית היקפית שנשענת על קוטר
5. הוכח את המשפט על קטע האמצעים במשולש וקטע האמצעים בטרפז

6. שאלה ממבחן בגרות חורף תשע"ו 5 יח"ל



מעגל שמרכזו על ציר ה־ x
עובר דרך הנקודות $(1\,,4)$ ו־ $(-6\,,3)$
(שאינן קדקודי המלבן שבציור).
הצלע AB של המלבן ABCD מונחת על ישר
העובר דרך הנקודות האלה.
קדקודי המלבן ABCD נמצאים ברביע הראשון וברביע השני, כמתואר בציור.

א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה־ x.

ב. המשכי הצלעות BC ו־ AD עוברים דרך נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה־ x.
נתון כי המרחק של הצלע DC מראשית הצירים הוא $\sqrt{2}$.
מצא את שטח המלבן ABCD.

7. מצא כמה פתרונות יש למערכת המשוואות: $\begin{cases}(x+2)^2+(y-3)^2=16\\(x-2)^2+(y+2)^2=4\end{cases}$

8. מצא עבור אילו ערכים של m יהיו למערכת המשוואות: $\begin{cases}(x+2)^2+(y-1)^2=16\\(x-2)^2+(y+2)^2=m^2\end{cases}$

א. פתרון יחיד ב. שני פתרונות ג. אף פתרון

הערה: המטרה היא לפתח שיקולים איכותניים, כך שהתלמידים יוכלו לפתור את מערכת המשוואות תוך התייחסות למצב ההדדי של המעגלים.

נחסר את שתי המשוואות ונקבל משוואה קווית המקשרת בין x ל- y. הסבר מהי המשמעות הגאומטרית של המשוואה הקווית כאשר למערכת המשוואות יש: א. פתרון יחיד ב. שני פתרונות ג. אף פתרון

9. המשיק למעגל $(x+a)^2+(y-4)^2=25$ בנקודה $(1,8)$ הוא $4x+3y=35$.

רשום את משוואת המשיק למעגל $(x+a)^2+(y-6)^2=25$ בנקודה $(1, 10)$.

הערה: המטרה היא להשתמש ברעיון של הזזה. אין צורך למצוא תחילה את a ולחשב את משוואת המשיק. המטרה לפתח את ההבנה שהמעגל ונקודת ההשקה זזו 2 יחידות כלפי מעלה, ומכאן שגם המשיק זז 2 יחידות כלפי מעלה.

10. שאלה ממבחן בגרות קיץ תשע״ו 5 יח״ל

נתון טרפז ABCD $(AB||DC)$.

המשכי השוקיים BC ו־ AD נפגשים בראשית הצירים.

השוק BC מונחת על החלק החיובי של ציר ה־ x.

הקדקודים A ו־ D נמצאים ברביע השלישי.

הבסיס AB מונח על הישר $3x-4y-15=0$.

גובה הטרפז הוא 6.

היעזר בסרטוט סקיצה של הטרפז במערכת צירים, וענה על סעיפים א ו־ ב.

א. מצא את משוואת הבסיס DC.

נתון כי הקדקודים A ו־ C נמצאים על מעגל שמרכזו בקדקוד B.

ב. (1) מצא את רדיוס המעגל.

(2) מצא את השיעורים של הקדקוד D.

פרבולה

11. [לקפל פרבולה] – תופעה מסקרנת שפתרונה מבוסס על הגדרת הפרבולה כמקום גאומטרי (אתר מרכז המורים)

12. שאלה ממבחו בגרות קיצ תשע"ו מועד ב 5 יח"ל

נתונה פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$.

שני ישרים המשיקים לפרבולה בנקודות K ו־ L נפגשים בנקודה A ,

שהיא נקודת החיתוך של מדריך הפרבולה עם ציר ה־ x .

א. (1) הראה כי שיעור ה־ x של K שווה לשיעור ה־ x של L .

(2) הראה כי המשיקים מאונכים זה לזה.

נתון מעגל, שמרכזו M נמצא על ציר ה־ x .

המשיקים לפרבולה הנתונה בנקודות K ו־ L משיקים גם למעגל זה בנקודות אלה.

הצב $p = 2$, וענה על הסעיפים ב, ג.

ב. מצא את משוואת המעגל שמרכזו M .

ג. מצא את משוואת המעגל החסום במרובע AKML .

13. **[דוגמאות נוספות בנושא הפרבולה]**

14. שאלה ממבחן בגרות קיץ תשע"ז מועד ב 5 יח"ל

נתונה הנקודה $A(20, 0)$.

B היא נקודה שנמצאת על ציר ה־ y ואינה ראשית הצירים.

דרך הנקודה B מעבירים ישר, ℓ_1 , המקביל לציר ה־ x .

דרך ראשית הצירים, O , מעבירים ישר, ℓ_2 , שמאונך לישר AB .

הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 נחתכים בנקודה C .

א. הוכח שהמקום הגאומטרי של הנקודות C הנבנות כמתואר נמצא על פרבולה, ומצא את משוואתה.

ב. D היא נקודה כלשהי הנמצאת על הפרבולה שאת משוואתה מצאת בסעיף א.

הנקודה F היא מוקד הפרבולה.

נתון הישר $x = k$. $k < 0$ הוא פרמטר.

דרך הנקודה D העבירו ישר המקביל לציר ה־ x וחותך את הישר $x = k$ בנקודה N .

קיים ערך של k שעבורו כל משולש NDF שנבנה כמתואר הוא שווה שוקיים.

(1) מצא את הערך של k . נמק.

(2) נתון: הנקודה D נמצאת ברביע הראשון.

מצא את שיעורי הנקודה D שעבורה המשולש NDF הוא שווה צלעות.

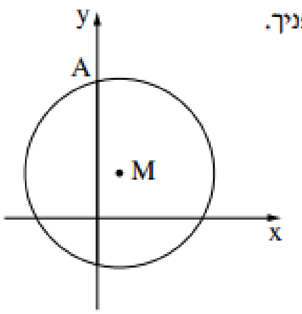
15. הערשה: לעקומים שהם חתכי חרוט יש תכונות אופטיות שעושים בהם שימוש בבניית מכשירים שונים. נדגים: אם אור פוגע במראה פרבולית במקביל לציר הסימטריה האור יוחזר דרך מוקד המראה הפרבולית ולהפך, אם מקור נקודתי יוצב במוקד של מראה פרבולית, האור יתפזר במקביל לציר הסימטריה. תכונה זו משמשת בבניית פנסים.

אליפסה

16. סרטטו את העקומים המיוצגים על ידי כל אחת מהמשוואות עבור ערכי m שונים,

ומצאו, בהתאמה, כמה פתרונות יש למערכת המשוואות:
$$\begin{cases} 2x^2+4y^2=16 \\ (x-2)^2+y^2=m^2 \end{cases}$$

17. שאלה ממבחן בגרות חורף תשע"ט 5 יח"ל



מעגל שמרכזו M חותך את החלק החיובי של ציר ה־ y בנקודה A, כמתואר בציור שלפניך.

ממרכז המעגל העבירו אנך לציר ה־ y, החותך את הציר בנקודה E.

נתון כי $AE=6$.

נתון גם כי מרחק הנקודה M מראשית הצירים הוא מחצית מן האורך של רדיוס המעגל.

א. הוכח כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות M המקיימות את נתוני השאלה נמצא על אליפסה, ומצא את משוואתה.

נסמן ב־ F_1 וב־ F_2 את מוקדי האליפסה שאת משוואתה מצאת בסעיף א.

הנקודות D_1 ו־ D_2 הן נקודות על האליפסה.

שיעור ה־ y של D_1 חיובי ושיעור ה־ y של D_2 שלילי.

ב. (1) מצא את השטח הגדול ביותר האפשרי עבור המרובע $F_1D_1F_2D_2$. נמק.

(2) האם קיים מרובע $F_1D_1F_2D_2$ בעל היקף גדול ביותר? נמק.

18. [אליפסה ככיווץ / מתיחה של מעגל](אתר מרכז המורים) (אתר מרכז המורים)

19. דוגמה מהחיים: כדור הארץ מקיף את השמש במסלול אליפטי, כשהשמש באחד המוקדים. המרחק הקטן ביותר של כדור הארץ מהשמש הוא 147.1 מיליון ק"מ. המרחק הגדול ביותר של כדור הארץ מהשמש הוא 152.1 מיליון ק"מ.

א. מצאו את הגודל הקבוע (סכום המרחקים משני המוקדים)

ב. מצאו את אורכו של חצי הציר הארוך.

ג. מצאו את אורכו של חצי הציר הקצר.

20. הערשה: הוכחת דנדלין לכך **שהחיתוך של חרוט עם מישור (בזווית מתאימה) הוא אליפסה**

היפרבולה

21. **מראות אקוסטיות** - דוגמה ליישום

22. **אליפסה מעגל או היפרבולה** – עיבוד של שאלה מבחינת בגרות. (אתר מרכז המורים)

23. הערשה: **מסלולים של כוכבי לכת**/ חוקי קפלר

24. הערשה: **מקום גאומטרי בהקשר לחוקי קפלר**

25. הערשה: להראות שגרף הפונקציה $y=\frac{1}{x}$ הוא היפרבולה באמצעות התרגיל:

מצאו את המקום הגאומטרי של הנקודות שהפרש מרחקיהן מהנקודות $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ ו- $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ הוא $2\sqrt{2}$.

המקום הגאומטרי שמתקבל הוא הפרבולה שמשוואתה: $y=\frac{1}{x}$

מקומות גאומטריים

26. **המקום הגאומטרי בעזרת הגאומטריה** – פעילות המבוססת על שאלה מבחינת הבגרות, ובה ממחישים את הפתרון באמצעות יישומון, ופותרים את השאלה בכלים של גאומטריה **אוקלידית.** (אתר מרכז המורים)

27. **מקומות גאומטריים – משיק לפרבולה** (אתר מרכז המורים)

28. **מקומות גאומטריים – על תיכון באליפסה** (אתר מרכז המורים)

29. **מקומות גאומטריים עם חוצה הזווית במשולש.** שאלה שמובילה למעגל אפולוניוס. (אתר מרכז המורים)

30. **מתיחת מיתר של מעגל** (אתר מרכז המורים)

31. מהו המקום הגאומטרי של כל הנקודות היוצרות יחד עם הנקודות (2,0) ו- (1,3) משולש ששטחו 4?

32. לקישור בין חקירת פונקציות עם שורשים לבין גאומטריה אנליטית:

חקרו את הפונקציה: $y=\sqrt{4-x^2}$. הסבירו מדוע הגרף שהתקבל הוא חצי מעגל.

האם הגרף של כל פונקציה שהביטוי האלגברי שלהן $y=\sqrt{f(x)}$ ($f(x)$ פונקציה ממעלה שנייה) הוא חצי מעגל?

הביאו דוגמאות לפונקציות שהביטוי האלגברי שלהן הוא $y=\sqrt{f(x)}$ ($f(x)$ פונקציה ממעלה שנייה), ואשר הגרף שלהן הוא: א. חצי אליפסה ב. חצי היפרבולה.

דוגמאות לשאלות בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

1. הצגת הפונקציה המעריכית, והדגשת קצב השינוי המהיר שלה

זהירות, אינפלציה!

בתקופות של עליית מחירים גבוהה, גם הריביות בבנקים גבוהות.

נחשוב על תקופה שבה בנק גובה ריבית של 6% לחודש. נתעלם מעמלות ותשלומים אחרים שהבנק גובה.

לאדם יש חוב של שקל אחד. ללא חישוב, העריכו:

א. מה יהיה גודל החוב אם האדם יתעלם ממנו ולא יפעל בחשבונו במשך שנה אחת?

ב. מה יהיה גודל החוב אם האדם יתעלם ממנו ולא יפעל בחשבונו במשך 10 שנים?

ג. מהי הפונקציה המתאימה למספר החודשים שיחלפו את גודל החוב?
מקור: ללמוד וללמד אנליזה.

2. הצגת הפונקציה המעריכית וזריעת זרעים לקראת הגדרת הפונקציה המעריכית באופן שמתאים לתיאור תהליכי גידול (מעריכי)

נחשוב על אוכלוסייה של חיידקים במעבדה. חיידקים מתרבים באופן שכל חיידק מתחלק לשניים וכל חלק הופך לחיידק בפני עצמו. תהליך זה נקרא הכפלה והוא חוזר על עצמו, בקירוב, בפרקי זמן קבועים.

נניח שברגע מסוים יש במעבדה חיידק אחד ואוכלוסיית החיידקים מכפילה את עצמה בכל שעה. נעקוב אחרי אוכלוסיית החיידקים אחרי x שעות:

השלימו את הטבלה:

בסוף שעה x	0	1	2	3	4	5	6	7	...	24	x
מספר חיידקים	1	2							...	16,777,216	
ביטוי מתמטי	2^0	2^1								2^{24}	2^x

הערה: הניסוי המתואר כאן הוא מודל מתמטי, בו החיידקים נמצאים בתנאים אידיאליים מבחינת המזון, המקום, הטמפרטורה ועוד, כך שההתרבות תלויה רק בזמן. במציאות אוכלוסיית החיידקים לא יכולה להתרבות עד אינסוף, אלא עד גמר המשאבים של מזון ומקום.

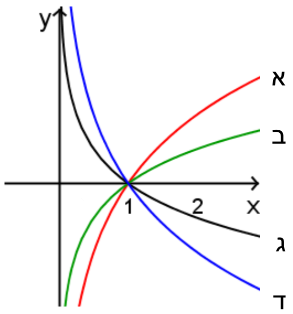
$f(x)=2^x$ היא פונקציה המתארת את מספר החיידקים בחלוף x שעות, תחת ההנחה שיש הרבה חיידקים כך שבכל רגע חלק מהחיידקים מתחלק. אם מספר החיידקים ההתחלתי הוא מספר קבוע כלשהו: $f(0)=k$, אז הפונקציה תהיה: $f(x)=k\cdot 2^x$ או $f(x)=f(0)\cdot 2^x$. מספר מציאותי עבור k הוא, למשל, 100,000 חיידקים במיליליטר.

נניח כי k=100,000. ענו על השאלות הבאות

א. מה הייתה כמות החיידקים במעבדה שעה, שעתיים, או x שעות, לפני תחילת הניסוי?

(רמז: שעה אחת לפני תחילת הניסוי הייתה במעבדה מחצית מכמות החיידקים ההתחלתית.)

ב. פי כמה גדלה אוכלוסיית החיידקים במהלך חצי שעה? במשך רבע שעה?
(רמז: זכרו כי **בכל** שעה גודל האוכלוסייה יהיה כפול מהגודל ההתחלתי)

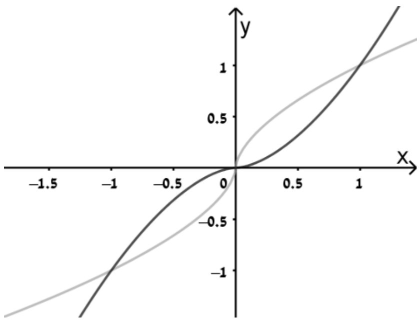


3. באיור משמאל מופיעים הגרפים של 4 פונקציות לוגריתמיות :

(1) $y=\log_2 x$ (2) $y=\log_4 x$ (3). $y=\log_{0.5} x$ (4) $y=\log_{0.25} x$.

א. זהו את הגרף המתאים לכל פונקציה.

ב. זהו זוגות של גרפים סימטריים ביחס לציר ה- x , והסבירו את הסימטריה על-פי חוקי הלוגריתמים.



4. באיור משמאל מופיעים הגרפים של הפונקציות הבאות :

(1) $y = x^{\frac{3}{5}}$ (2) $y = x^{\frac{5}{3}}$

זהו איזה גרף מתאים לכל פונקציה. נמקו כיצד קבעתם.

5. הצעה נדיבה לחיסכון (היכרות עם המספר e)

תורמת נדיבה החליטה להשקיע בחינוך לחיסכון של צעירי ישראל, והבטיחה תמיכה נדיבה לבנקים שישתפו אתה פעולה. היא החליטה להעניק לכל בוגר/ת בית ספר תיכון מענק של 1000 ₪, ולעודד אותו/ה לחסוך את הכסף במשך שנה אחת, באחד מן הבנקים המשתתפים במבצע. כל בנק ניסה למשוך אליו כמה שיותר תלמידים, בתקווה שימשיכו להשקיע את כספם באותו הבנק גם בחייהם הבוגרים.

לפניכם הצעות משלושה בנקים.

בנק השפע	**בנק הצמיחה**	**בנק ההצלחה**
הפקידו אצלנו 1000 שקלים למשך שנה, ותקבלו בסוף השנה 2000 שקלים.	אצלנו תוכלו להפקיד את הכסף לתקופות של חצי שנה. לאחר חצי שנה תקבלו את הסכום שהפקדתם בתוספת ריבית של 50% . אם תרצו תוכלו להפקיד את הכסף לחצי שנה נוספת באותם התנאים.	אצלנו אפשר להפקיד את הכסף לתקופות של 3 חודשים בריבית של 25% ל- 3 חודשים. ניתן להפקיד את הכסף לתקופות נוספות של 3 חודשים במשך כל שנת המבצע.

א. ענו מבלי לחשֵב : בהצעה של איזה משלושת הבנקים הייתם בוחרים, לו רציתם להשאיר את הכסף בבנק למשך כל שנת המבצע?

ב. חשבו כמה כסף יהיה בידי תלמיד שיפקיד את המענק למשך שנה שלמה, בכל אחד מן הבנקים.

ג. נסו להעריך, מבלי לחשֵב : אם בנק יחליט על ריבית של $\frac{1}{365}$ מהסכום עבור כל יום – כמה יצטרך לשלם בסוף השנה?

ד. ואם הבנק יחליט לחשב באופן דומה את הריבית כל שעה? כל דקה?

מקור : ללמוד וללמד אנליזה

6. (מדגימה יצירת דוגמאות. על הסעיפים א – ז אפשר לענות ללא שימוש בנגזרת) :

מצאו, אם אפשר, פונקציות מהמשפחה $y=e^{ax^2+bx+c}$ על-פי התכונות המבוקשות בכל סעיף. אם לא

קיימת פונקציה כזו - הסבירו מדוע. בדקו את תשובותיכם באמצעות תוכנה לסרטוט גרפים.
הערה: לפעמים נוח להיעזר בייצוגים אחרים של פונקציה ריבועית, כגון: $y = e^{a(x-p)^2+k}$.

א. פונקציה זוגית בעלת נקודת מינימום

ב. פונקציה אי-זוגית

ג. פונקציה סימטרית ביחס לישר $x=1$ שיש לה נקודת מקסימום.

ד. פונקציה שנקודת המינימום שלה $(0,1)$

ה. פונקציה שנקודת המינימום שלה היא (0,-1)

ו. פונקציה שנקודת המקסימום שלה $(0,1)$

ז. פונקציה בעלת נקודת מינימום ושתי נקודות פיתול

ח. פונקציה בעלת נקודת מקסימום ושתי נקודות פיתול

מקור: ללמוד וללמד אנליזה

7. בשני כלים שונים יש תרביות חיידקים המתרבות באופן מעריכי. בכלי א מספר החיידקים בכל רגע גדול פי a ממספרם שעה שלמה קודם לכן.

בכלי ב מתרבים החיידקים לפי הקשר הבא: $g(x) = g(0) \cdot b^x$, x מייצג את הזמן בשעות שלמות.

במדידה ראשונה ביום מסוים העריכו את מספר החיידקים בתרבית בכלי א כ- K ואת מספר החיידקים בכלי ב כ- $5K$.

במדידה שנייה באותו היום, שנערכה לאחר 3 שעות, היו בכלי א L חיידקים ובתרבית בכלי ב $\frac{5}{8}L$ חיידקים.

א. מצאו קשר בין a ל- b.
ב. חשבו כמה שעות מאז המדידה הראשונה היה מספר זהה של חיידקים בשתי התרביות.
ג. בטאו באמצעות K ו- b את:
(1) הפונקציה f(x) המתארת את מספר החיידקים בכלי א, ו-
(2) את הפונקציה g(x) המתארת את מספר החיידקים בכלי ב, לפי הזמן x שנמדד מרגע המדידה הראשונה.
ד. סרטטו בעזרת מחשב את גרף הפונקציות f(x),g(x) ואת גרף הפונקציות ln(f(x)), ln(g(x)). הסבירו את הקשר בין הייצוג הגרפי לתוצאות שקיבלתם.

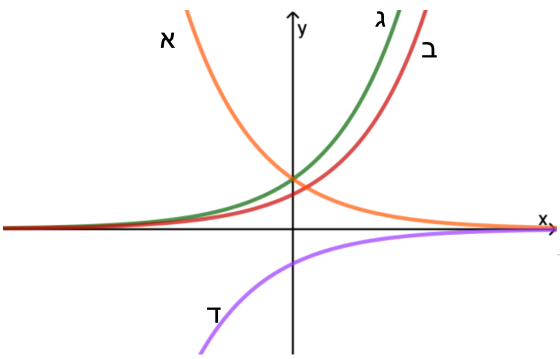
8. דוגמה לשילוב עם פונקציה טריגונומטרית באמצעות שאלה קצרה

א. הביאו דוגמא לפונקציה מהצורה $y = e^{f(x)}$ שיש לה אינסוף נקודות קיצון.

ב. הביאו דוגמה לפונקציה מהצורה: $y = f(e^x)$ שיש לה אינסוף נקודות קיצון.

9. בגרף משמאל מסורטטים הגרפים של שתי פונקציות מהמשפחה $y = a^x$, ושתי הנגזרות של הפונקציות האלה.

זהו את שתי הפונקציות מהמשפחה $y = a^x$, וקבעו איזה גרף נגזרת מתאים לכל אחת מן הפונקציות.



10. השאלה מדגימה אפשרות להסקת מסקנות על תכונות הפונקציה ללא שימוש בנגזרת.

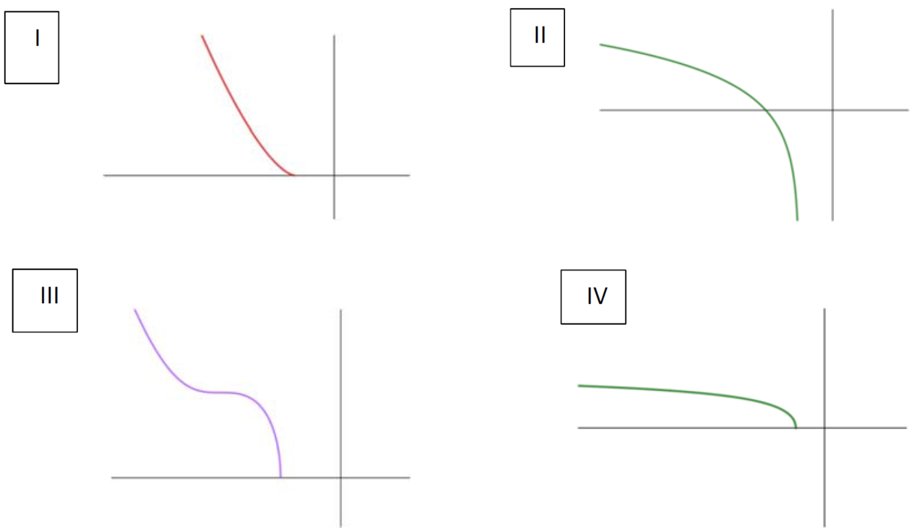
נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{ln(-x)}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

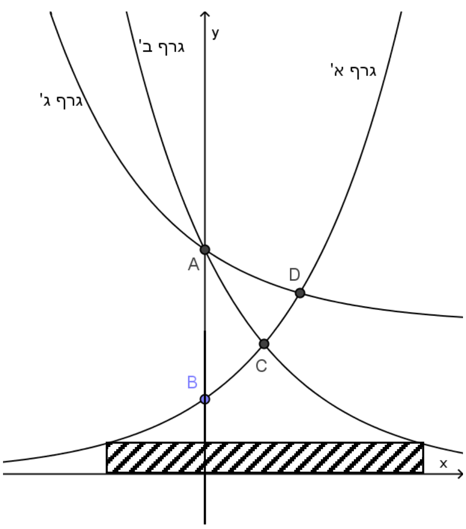
ב. האם לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית? אם כן, מצאו את משוואתה. אם לא, נמקו.

ג. מצאו את האסימפטוטות של גרף הנגזרת $f'(x)$, אם ישנן כאלה.

ד. מבין ארבעת הסרטוטים הבאים, בחרו את הסרטוט המתאים ביותר לתיאור גרף הפונקציה הנתונה $f(x)$. נמקו את הבחירה.



11. בסרטוט משמאל מתוארים שלושה גרפים.



להלן גם רשימה של שלוש פונקציות:

$$(1)\quad y = 3\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^x \;;\quad (2)\quad y = a^x \;;\quad (3)\quad y = a^{-x} + 2$$

א. התאימו בין הגרפים לבין הפונקציות וקבעו על-פי הנתונים האם a גדול מ- 1 או קטן מ- 1. נמקו את קביעתכם.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.

ג. בין ציר x לבין הגרפים א ו- ב חסום מלבן כמתואר בציור. אחד מקודקודיו נמצא בנקודה: $\left(2,\frac{1}{3}\right)$. מצא את הערך של a ואת שטח המלבן.

ד. איך ייראו הגרפים אם נחליף את ציר ה- y ב- ln(y) ? או, עבור (3) ב- ln(y-2) ?

12. אחד הדגשים שהשאלה הבאה מדגימה הוא היעילות של חקירת פונקציות פשוטות יותר, מוזזות, והסקת תכונות הפונקציות המקוריות בעזרתן.

נתונה משפחת הפונקציות: $f(x)=\frac{(\ln(x-1))^n}{x-1}$,

n מספר טבעי גדול מ-1.

א. רשמו את תחום ההגדרה של הפונקציות במשפחה, את נקודת החיתוך שלהן עם ציר ה-x ואת האסימפטוטות האנכית שלהן.

ב. עבור אילו ערכים של n יש לפונקציות במשפחה שתי נקודות קיצון ועבור אילו ערכים יש נקודת קיצון אחת בלבד? נמקו.

ג. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות:

$$g(x)=\frac{(\ln(x-1))^2}{(x-1)} \quad \text{ו-} \quad h(x)=\frac{(\ln(x-1))^3}{(x-1)}$$

13. ילד הגיע למרפאה עם כאב גרון ונלקח ממנו משטח גרון (דגימת נוזל עם חיידקים), כדי לבדוק אם יש לו דלקת המצריכה טיפול. נסמן ב- t את הזמן בדקות שחלף מרגע לקיחת הדגימה וב- $x(t)$ את כמות החיידקים לאחר t דקות. החיידקים מתרבים בזמן והפונקצייה המתארת את התרבותם היא $x(t)=Ae^{ct}$

א. הראו כי הפרמטר A מייצג את כמות החיידקים ההתחלתית, בזמן שלקחו את הדגימה.

ב. הראו כי ככל שהפרמטר c גדול יותר כך קצב הגידול של החיידקים בדקה גדול יותר.

ג. ידוע כי כמות החידקים מכפילה את עצמה במשך T דקות (נקרא ל- T "זמן ההכפלה". בטאו את הפרמטר c באמצעות T.

ד. סרטטו את $x(t)=Ae^{ct}$ כפונקציה של t עבור c=1 ועבור c=2. הציעו שיטה למצוא את הערך של c מתוך הגרף.

ה. נגדיר $y(t)=\ln(x(t))$. סרטטו את $y(t)$ כפונקציה של t עבור c=1 ועבור c=2. מהו הגרף שקיבלתם? הציעו שיטה למצוא את הערך של c מתוך הגרף , ואת הערך של A מתוך הגרף

ו. הדגימו, בשני הגרפים ששרטטתם: " אם קצב הגידול, c , כפול, הרי שקצב השינוי יהיה כפול וזמן ההכפלה יקטן בחצי".

ז. לקחו משטח גרון משני ילדים, וגילו שלאחד מהם יש כמות חיידקים כפולה משל השני אחרי 6 שעות בדיקה, אולם לאחר 6 שעות נוספות המצב התהפך. הסיקו מה ניתן לומר על הפרמטרים A

ו c עבור כל אחד מהילדים. הדגימו זאת בגרפים ששרטטתם. מה יהיה היחס בין כמויות החיידקים לאחר 6 שעות נוספות?

14. חיפוש בינארי

השאלה מדגימה יישום של פונקציה לוגריתמית

כמה צעדים דרושים כדי לחפש ולמצוא במילון את המילה "חיפוש?"

במדעי המחשב מוכרת שיטת החצייה לחיפוש פריט מתוך רשימה מסודרת (כמו חיפוש מילה במילון של פעם – רשימת כל המילים בעברית, מסודרות על פי סדר האלף-בית):

בצעד הראשון נפתח את המילון באמצעו[6], נשווה את המילה האמצעית למילה שלנו ונבדוק אם המילה שלנו שייכת למחצית הראשונה או השנייה של המילון, כך בצעד אחד[7] פסלנו חצי מהמילים במילון.

בצעד הבא נמשיך את החיפוש בחצי המילון המתאים: נחצה את מחצית המילון ושוב נשווה את המילה האמצעית עם המילה שלנו. כך נמשיך עד שנגיע לשלב שבו נותרה מילה אחת.

מכאן שאם יש n מילים במילון, מספר הצעדים בשיטת החצייה, שווה למספר הפעמים שניתן לחצות את n.

כמה צעדים יתווספו לחיפוש אם נכפיל את גודל המילון? (צעד אחד)

בכמה צעדים ניתן לחפש מילה במילון בן 2 מילים? 8 מילים? 64 מילים?

בכמה צעדים ניתן לחפש מילה במילון בן 1000 מילים? 10,000 מילים? 100,000 מילים?

מה גודל מילון בו נידרש חיפוש של 20 צעדים? האם התשובה יחידה?

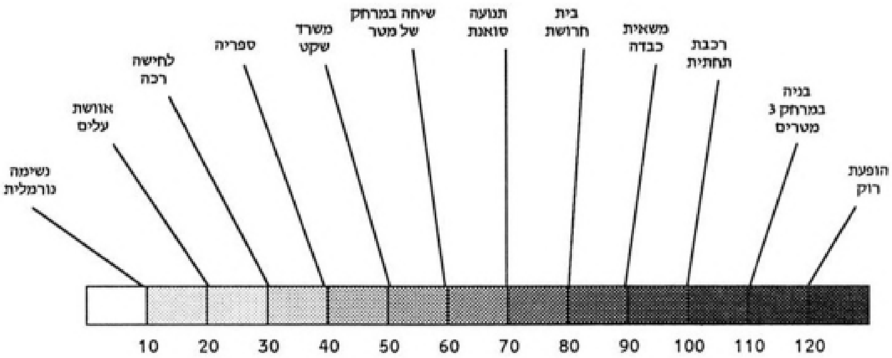
סרטטו גרף לפונקציה המתארת את מספר צעדי החיפוש לפי מספר המילים במילון.

הסבירו מדוע במדעי המחשב אומרים כי הסיבוכיות (זמן הריצה) של שיטת החצייה היא לוגריתמית בבסיס 2?

[6] הזוגיות של n לא באמת משנה: אם הרשימה באורך זוגי, כלומר $n=2m$, נבדוק את המילה ה m, כך שהרשימה החדשה היא באורך $n/2$. אם הרשימה באורך אי זוגי, כלומר $n=2m+1$ נבדוק את המילה האמצעית, ה$m+1$, והרשימה החדשה תהיה באורך $n/2>m$.

[7] "צעד" מוגדר כפעולת ההשוואה של המילה שלנו עם מילה מהמילון.

15. עצמה של רעשים



לפניכם סולם המתאר את עצמת הרעשים השונים (ליחידת שטח) המגיעים לאזננו. יחידות המידה של הרעשים נקראות דציבלים. עליה של 10 דציבל מסמלת הכפלת עצמת הרעש פי עשרה. סף הרעש מסומן ב - 0 דציבלים. רעשים נמדדים גם כהספק ליחידת שטח (או אנרגיה ליחידת זמן ליחידת שטח).

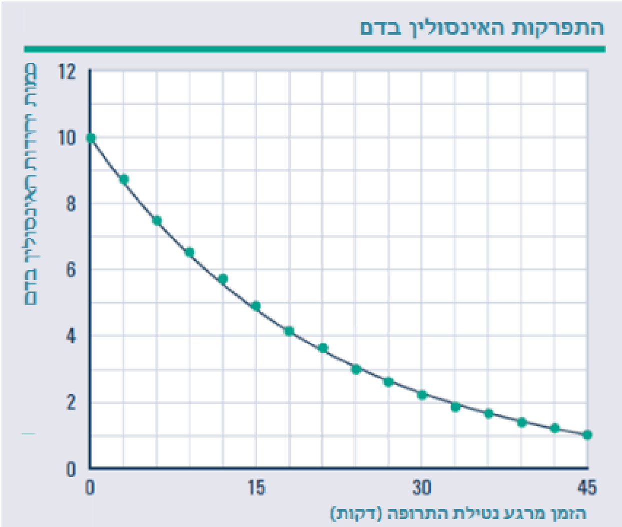
עצמה של 10^{-12} וואט למ״ר מסומנת כ - 0 דציבלים.

1. תארו את עוצמת הרעשים בעזרת גרף המתאים לכל רעש בסקלה הנתונה את עוצמתו ביחידות של וואט למ״ר.סמנו נקודות על הגרף שמתאימות לאוושת העלים, לחישה רכה וקונצרט רוק.
2. רשמו ביטוי אלגברי לעצמת הרעש ביחידות של וואט למ״ר כפונקציה של עצמת הרעש בדציבלים.
3. רשמו ביטוי אלגברי לעצמת הרעש בדציבלים כפונקציה של עצמת הרעש ביחידות של וואט למ״ר.

מקור : חוברת של מיכל ירושלמי

16. התפרקות אינסולין (הורמון המווסת את כמות הסוכר בדם)

לפניכם גרף המתאר התפרקות אופיינית של האינסולין בדם מהרגע שנלקחה התרופה.



1. השלימו את הטבלה:

זמן (דקות)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
כמות האינסולין (יחידות)									

2. תארו במילים את התפרקות האינסולין בדם כתלות בזמן. תארו את קצב השינוי.

3. בהתבסס על הגרף והטבלה איזו פונקציה מתארת התפרקות האינסולין בדם כתלות בזמן?

א. $f(t) = 10 \cdot 0.95^x$

ב. $f(t) = 10 \cdot 1.05^x$

ג. $f(t) = 0.95^x$

4. חשבו על פי הפונקציה ובדקו בגרף.

א. כמה אינסולין נותר בדם לאחר שעה?

ב. כמה יחידות אינסולין בדם לאחר שעה וחצי?

ג. לאחר כמה זמן נותר בדם חצי מהכמות ההתחלתית של האינסולין?

ד. לאחר כמה זמן נותר בדם חצי יחידה של אינסולין?

5. ציירו את הגרף של $\ln(f(t))$ והעריכו ממנו מהי הפונקציה $f(t)$

מקור: http://newhighmath.haifa.ac.il/index.php/2015-05-11-06-53-50/2485-2017-01-09-13-15-25

17. – סמי שינה

כאשר חולה נוטל תרופה, התרופה נכנסת לזרימת הדם בגוף. התרופה עוברת בכבד ובכליות, ובחילוף חומרים היא מתפוגגת בקצב התלוי בתרופה עצמה. קיימים סוגים שונים של סמי שינה. דרישה חשובה אחת שהשפעת הסם תפוג עם שחר, אחרת ימצא עצמו המטופל מנומנם במשך כל היום...

רופאים משתמשים בטבלה הבאה המפרטת נוסחאות מקורבות לכמות הסם בדם החולה לאורך זמן t הנמדד בשעות, עבור מספר סמי שינה. כמות זו תלויה כמובן בכמות הסם A שכבר מצויה בדם עם תחילת הטיפול.

גלולת שינה	נוסחה מקורבת
Sleepy	$f(t) = A \cdot 0.84^t$
Lishon	$f(t) = A \cdot 0.97^t$
Tnuma	$f(t) = A \cdot 1.15^t$
Numon	$f(t) = A \cdot 0.5^t$

יש לציין כי הכמות ההתחלתית, A, תלוייה במינון, במשקל הגוף וכדומה, וכן קצב הדעיכה שהרופאים מניחים הוא הקצב הממוצע, בעוד שבמציאות הקצב שונה מאדם לאדם.
בפתרון השאלות הבאות תוכלו להיעזר ביישומון:
1. ד"ר פאר רשם לחולה מסויים כדורי Sleepy. לאחר שהחולה נטל מספר גלולות, היתה בדם של החולה כמות התחלתית של 4 מיליגרם.
א. מה תהיה כמות הסם בדם לאחר שעה? לאחר 6 שעות? לאחר יממה?
ב. לאחר כמה שעות תיעלם השפעת הסם?
ג. בדיקת דם מסוגלת לאבחן נוכחות של התרופה אם תימצא בדם כמות של לפחות 0.1 מיליגרם מהתרופה. לאחר כמה זמן תתקבל תוצאה שלילית?
2. א. שרטטו גרף לכל תרופה.
ב. השוו את ההשפעה של ארבעת הסמים וסכמו את מסקנותיכם בכל ייצוג שתבחרו. מה ניתן לומר על קצב ההתפוגגות של כל תרופה?
ג. רק שלש מן השורות בטבלה מתארות תרופה שיכולה להיות קיימת במציאות. הצביעו על השורה בטבלה המתארת תרופה שלא יכולה להיות קיימת במציאות. נמקו תשובתכם.
3. רופאים מתעניינים בזמן שלוקח לתרופה בדם להגיע לחצי מהכמות ההתחלתית שניטלה. זמן זה נקרא זמן מחצית החיים. חשבו מהו זמן מחצית החיים של כל תרופה.

הדוגמא מעובדת מתוך: http://newhighmath.haifa.ac.il/index.php/2015-05-11-06-53-50/2485-2017-01-09-13-15-25

18. השאלה מדגימה שימוש באינטגרל לחישוב כמות מצטברת.

קצב ההפקה השנתי של זהב בעולם גדל באופן מעריכי.

אם מתייחסים לסוף שנת 2000 כאל $t=0$, אז הפונקציה $p(t) = 2500e^{0.006t}$ היא מודל מקורב לקצב ההפקה של זהב בעולם בטונות לשנה.

א. מהו בקירוב **קצב התפוקה השנתי** של זהב בעולם ביום האחרון של שנת 2000? הצבת $t=0$ ב- P

ב. מה הייתה בקירוב תפוקת הזהב בעולם בשנת 2001? בשנת 2002? אינטגרל לפי התקופה

ג. מה תהיה בקירוב תפוקת הזהב בעולם במשך 20 שנה החל מסוף שנת 2000 ועד סוף שנת 2020? כנ"ל

דוגמאות ברמה הנדרשת לשאלות המורכבות בבגרויות

19. שאלה ממבחן בגרות קיץ תשע״ז מועד ב 5 יח״ל

4. נתונה הפונקציה $g(x)=2x^2+c$. c הוא פרמטר.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת כך: $f(x)=e^{g(x)}$.

הגרפים של פונקציות הנגזרת, $f'(x)$ ו־ $g'(x)$, נחתכים בנקודה ששיעור ה־x שלה הוא 2 .

א. מצא את c .

ב. (1) הוכח ש־ $f'(x)$ היא פונקציה אי־זוגית.

(2) מצא את שיעורי כל הנקודות שבהן הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו־ $g'(x)$ חותכים זה את זה.

(3) עבור אילו ערכי x $f'(x)>g'(x)$?

(4) סרטט סקיצה של הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו־$g'(x)$ באותה מערכת צירים.

ג. נתון: $M(2,8)$, $N(-2,-8)$.

MN הוא אלכסון של מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים.

הראה שגרף הפונקציה $f'(x)$ מחלק את המלבן לשני חלקים שווים בשטחם.

20. שאלה ממבחן בגרות חורף תשע״ז 5 יח״ל

4. נתונה הפונקציה $f(x)=e^{ax^2+bx+2}$. a ו־ b הם פרמטרים.

נתון כי הפונקציה זוגית.

א. מצא את b .

לפונקציה יש בדיוק שתי נקודות פיתול.

ב. הוכח כי $a<0$.

הפונקציה הנתונה קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ וקעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחומים $x>\frac{1}{2}$ ו־ $x<-\frac{1}{2}$.

ג. מצא את a .

ד. (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$.

ו. נתונה הפונקציה $h(x)=f'(x)\cdot f''(x)$. מהו התחום שבו הפונקציה $h(x)$ חיובית?

21. שאלה ממבחן בגרות קיץ תשע"ז מועד ב 5 יח"ל

נתונה הפונקציה $f(x) = x + m \cdot \ell n\left(\frac{1}{x}\right)$. m הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון.

ב. (1) מצא את תחום הערכים של m .

(2) הבע את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ באמצעות m , וקבע את סוגה.

ג. הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ושיעוריה אינם תלויים ב־ m .

(1) מצא את שיעורי הנקודה P .

(2) מצא את הערך של m שעבורו הנקודה P היא נקודת מינימום של הפונקציה $f(x)$.

הצב את m שמצאת בתת־סעיף ג(2) וענה על הסעיפים ד-ה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. מצא את הערך של m עבורו גרף הפונקציה משיק לציר ה- x.

ו. עבור אלו ערכי m נקודת הקיצון של הפונקציה (1) נמצאת מעל ציר ה- x. (2) משיקה לציר ה- x. (3) נמצאת מתחת לציר ה- x. לכל אפשרות כזו בחרו ערך אחד של m כדוגמה, וסרטטו את הגרפים במערכת צירים אחת.

22. שאלה ממבחן בגרות קיץ תשע"ו מועד ב 5 יח"ל

4. נתונה הפונקציה $f(x) = 9^x - 2 \cdot 3^x - 3$ המוגדרת לכל x .

א. (1) מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(2) מצא את האסימפטוטה האופקית לגרף הפונקציה.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

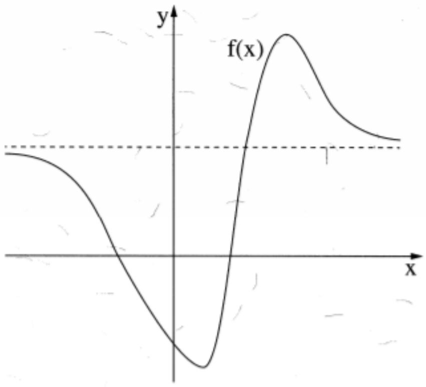
ב. מצא את השטח מימין לציר ה־ y , המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי ציר ה־ y ועל ידי האסימפטוטה האופקית. תוכל להשאיר ℓn בתשובתך.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + 4$.

השטח שמצאת בסעיף ב שווה לשטח מימין לציר ה־ y , המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה־ y ועל ידי הישר $y = k$.

מהו הערך של k ? נמק.

23. שאלה ממבחן בגרות קיץ תשע״ו מועד ב 5 יח״ל



5. בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון כי הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$

מוגדרות לכל x.

לגרף הפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה

אופקית אחת שמשוואתה $y = 1.5e$

כמתואר בציור.

נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הן:

$A(4, 3e)$, $B(1, -1.5e)$.

הנקודות $C(-2, 0)$, $D(2, 0)$, $E(5, 2e)$,

נמצאות על גרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום $x < -2$ ובתחום $2 < x < 5$,

וקעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום $x > 5$ ובתחום $-2 < x < 2$

א. מצא את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, וקבע את סוגן. נמק.

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = \ln[f(x)]$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של $g(x)$ המאונכות לציר ה־ x .

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אופקית אחת שמשוואתה $y = \ln(1.5e)$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

24. שאלה ממבחן בגרות חורף תשע"ז 5 יח"ל

5. נתונות שתי פונקציות:

$g(x) = \ell n(2 - e^x)$, $f(x) = \ell n(ae^x - be^{2x})$. a ו־ b הם פרמטרים.

נתון: $a > 0$, $b > 0$.

א. ידוע שלשתי הפונקציות יש אותו תחום הגדרה. הוכח: $a = 2b$.

ב. ידוע שלשתי הפונקציות יש נקודה משותפת אחת בלבד. נקודה זו היא נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה $f(x)$. חשב את a , את b ואת שיעורי נקודת הקיצון של $f(x)$.

ג. הוכח כי $g(x)$ יורדת וקעורה כלפי מטה $\cap$ בכל תחום הגדרתה.

ד. הוכח שההפרש בין הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ הוא פונקציה קווית.

ה. (1) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ (אם יש כאלה).

(2) סרטט על מערכת צירים אחת סקיצה של הגרפים של שתי הפונקציות. בסרטוט הדגש את גרף הפונקציה $f(x)$.

דוגמאות לשאלות בנושא מספרים מרוכבים

1. קבעו אמת או שקר. הסבירו בדרכים שונות :

א. אם z_1 ו-z_2 הם מספרים מרוכבים אז $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

ב. סכום של מספר מרוכב והמספר הצמוד לו הוא תמיד ממשי.

ג. ערכו המוחלט של מספר מרוכב שווה לערכו המוחלט של המספר הצמוד לו.

ד. אם z הוא מספר מרוכב אז $\bar{\bar{z}} = -z$.

ה. לכל משוואה ריבועית שמקדמיה ממשיים יש שני פתרונות הצמודים זה לזה.

ו. קיימות משוואות ריבועיות שמקדמיהן מרוכבים ופתרונותיהן ממשיים.

ז. הערך המוחלט של סכום $|z_1 + z_2|$ שווה לסכום הערכים המוחלטים $|z_1| + |z_2|$.

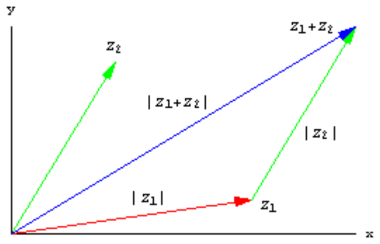
מתוך – מספרים מרוכבים, חנה פרל, מל"מ , עמ 39, עמ 52

2. א. בנו משוואה ריבועית מהצורה $x^2 + bx + c = 0$, b ו-c ממשיים.
אם ידוע שאחד מפתרונותיה הוא 1+i. מהו הפתרון השני?

ב. בנו משוואה ממעלה שלישית שמקדמיה ממשיים,
אם ידוע ששניים מפתרונותיה הם 1+i ו- 1. מהו הפתרון הנוסף?

3. קישור לווקטורים ולגאומטריה – אי שוויון המשולש

הראו באופן אלגברי ובאופן גאומטרי כי לכל z_1 , z_2 מתקיים :



א. $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$

ב. $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$

ג. מי גדול יותר $|z_1 - z_2|$ או $|z_1| + |z_2|$?

4. הוכיחו בדרכים שונות כי במקבילית סכום ריבועי האלכסונים שווה לסכום ריבועי הצלעות.

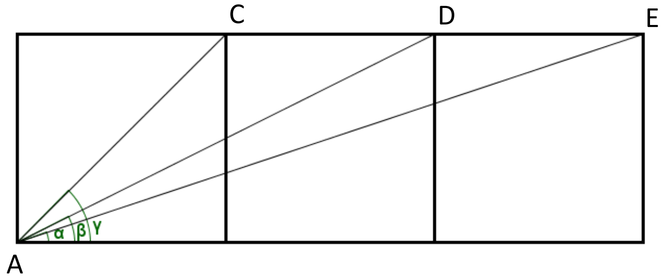
5. פתרון בעיה גאומטרית במישור גאוס :

המספר $4-3i$ מתאר קדקוד זווית חדה של משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים. המשולש חסום במעגל שמרכזו בראשית הצירים.
מצא את שני הקדקודים האחרים של המשולש.
רשום את שתי האפשרויות.

מתוך יואל גבע 807 – כרך ב- עמ 744

6. נתונים שלושה ריבועים חופפים בעלי צלע באורך יחידה.
מנקודה A מעבירים שלושה קטעים AC , AD, AE .
נסמן : $\measuredangle CAB = \gamma$, $\measuredangle DAB = \beta$, $\measuredangle EAB = \alpha$

הראו בדרכים שונות כי : $\alpha + \beta + \gamma = 90°$



הנחיה –
נמקם את האיור כך שהנקודה A תהיה בראשית , ואורך צלע כל ריבוע 1 יחידה.
אלו מספרים מרוכבים מייצגות הנקודות C, D, E ?
מה ניתן לומר על הכפל של שלושת המספרים?

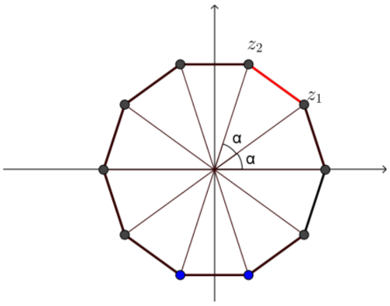
7. הוכחת התכונות של שורשי היחידה :
- מכפלת שורשי היחידה
- סכום שורשי היחידה
- סכום הריבועים של שורשי היחידה
- שורשי היחידה מהווים סדרה הנדסית

8. סדרת המספרים המרוכבים מקיימת לכל n טבעי: $z_n = (cos\alpha + isin\alpha)^n$

א. הביעו באמצעות α את $|z_2 - z_1|$

ב. הראו כי הביטוי $|z_{n+1} - z_n|$ אינו תלוי ב-n.

התרגיל מדגים שימוש במשפט דה- מואבר להעלאה בחזקה של מספר מרוכב בייצוג הקוטבי ואת הפירוש הגאומטרי לפעולות החשבון עם המספרים המרוכבים.



סדרת המספרים המרוכבים מיוצגת במישור גאוס על ידי קודקודי מצולע משוכלל בעל n צלעות באורך יחידה.
הפירוש הגאומטרי של הערך המוחלט של הפרש בין שני מספרים עוקבים בסדרה הוא אורך צלע המצולע ולכן הוא קבוע. אפשר לחשבו בעזרת טריגונומטריה פשוטה.

9. קישור לגאומטריה אנליטית:

א. הראו כי אוסף הנקודות במישור גאוס המקיימות $|z-1| + |z+1| = 4$ מייצגות אליפסה. הסבירו. מהם מוקדי האליפסה?

אליפסה זו היא המקום הגאומטרי של כל הנקודות שסכום מרחקיהן משתי נקודות (1,0) ו-(-1,0) קבוע ושווה ל-4.

ב. רשמו את משוואת המקום הגאומטרי בעזרת מספרים מרוכבים של כל הנקודות שהפרש מרחקיהם מ- (0,0) ו- (3,4) שווה 1. מהו המקום הגאומטרי הזה?

10. העשרה: נוסחת אוילר

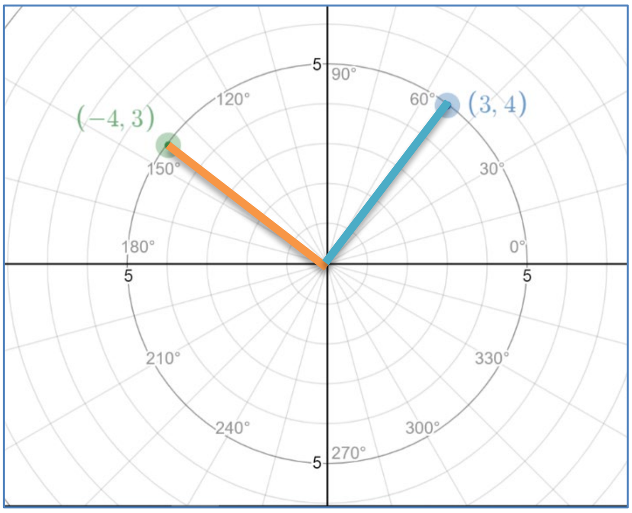
א. מהי ההצגה האלגברית של המספר המרוכב:

1. $e^{\frac{i\pi}{2}}$
2. $e^{-i\pi}$

ב. הוכיחו בעזרת נוסחת אוילר את הנוסחאות הבאות:

1. $sinx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
2. $cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

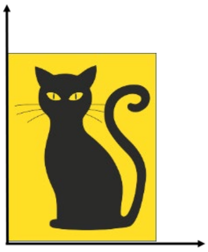
11. הצגה פולרית של מספרים מרוכבים: בתמונת המכ"ם של מטוס נראו שני מטוסים. הבקר נמצא בראשית הצירים. חשבו מה הזווית בין המטוסים.



12. הוכיחו באינדוקציה את משפט דה-מואבר.

13. יישומים – גרפיקה ממוחשבת

כאשר אנו מזיזים, מותחים או מסובבים תמונה ממוחשבת אנו פועלים על הקודקדים שלה. במישור ניתן לעשות זאת בעזרת וקטורים או מספרים מרוכבים.



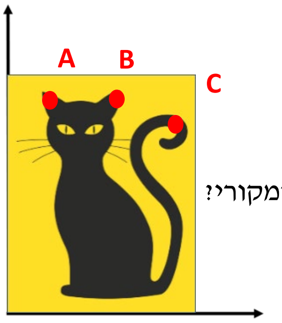
לפניכם תמונה של חתול במסגרת מלבנית. מקמו את התמונה במערכת צירים, כך שהפינה השמאלית התחתונה של התמונה בראשית הצירים.

נסמן שלש נקודות בתמונה:

אוזן שמאלית $A=1+6i$

אוזן ימנית $B=2+6i$

זנב $C=5+5i$

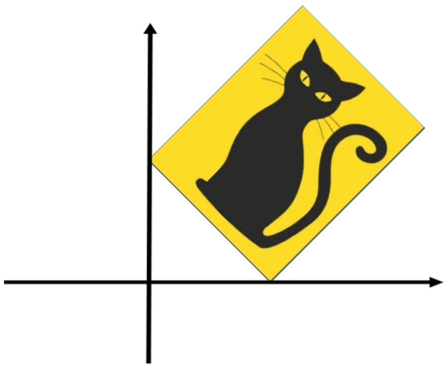


הכפילו כל נקודה ב-i.

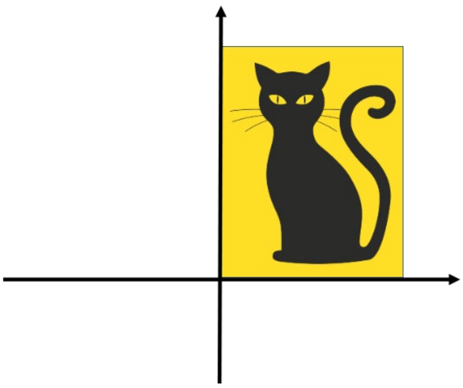
מה מיקומן החדש של הנקודות?

מה ניתן לומר על מקומן ביחס למקומן המקורי?

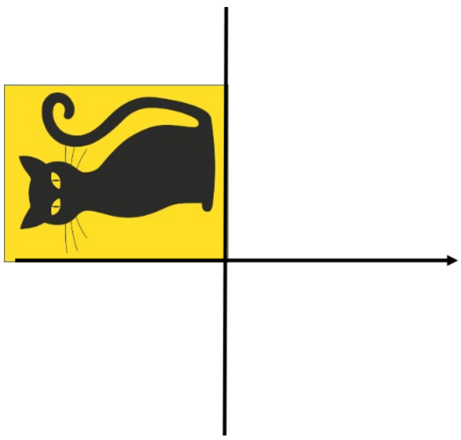
א. כיצד ניתן לבצע את הטרנספורמציות הבאות בעזרת פעולות של המספרים המרוכבים?



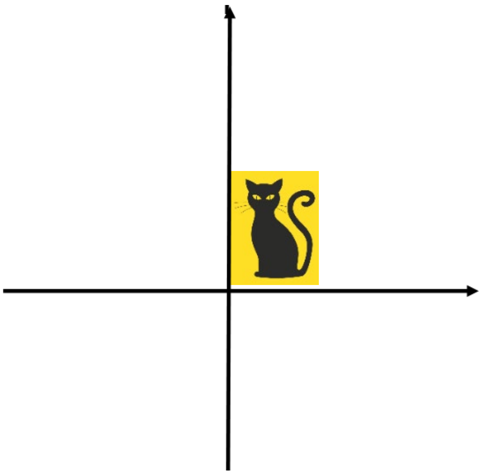
סיבוב °45 עם כיוון השעון



מתיחה פי 2



השלימו....

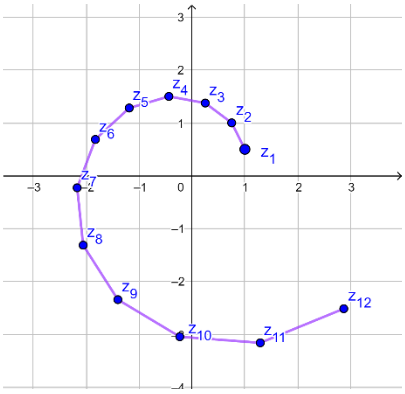


כיווץ פי 2

המלצה – צפייה בתחילת הסרטון של מימדים מס 6 , בתרגום ועריכה של מכון דוידסון.

העשרה - Math goes to the movies - plus

14. ספירלות – סדרה הנדסית



נתון המספר המרוכב z=1+0.5i. ונתונה הסדרה: $z_n = z^n$
רשמו 10 איברים ראשונים בסדרת החזקה, מקמו אותם במישור גאוס וחברו בינהם בקטעים.
מה ניתן לומר על העקום המתקבל? כיצד לדעתכם יראה העקום אם תוסיפו 50 איברים ראשונים?

א. כיצד ישתנה העקום אם z=0.5+0.5i ?

העקום המתקבל נקרא ספירלה גאומטרית או ספירלה אקספוננציאלית/ לוגריתמית.

יישומון להמחשה

דוגמאות ברמה הנדרשת לשאלות המורכבות בבגרויות

15. שאלה ממבחן בגרות קיץ תשע"ד מועד ג 5 יח"ל

נתון המספר המרוכב $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$,

ונתון מספר מרוכב w שהערך המוחלט שלו הוא r $(r > 0)$.

z ו־ w נמצאים ברביע הראשון.

המספר z מקיים: $z = \frac{w}{\bar{w}}$.

א. הבע באמצעות α ו־ r את המספר w , את הצמוד שלו $\bar{w}$, ואת ההפכי שלו $\frac{1}{w}$.

ב. סרטט במערכת צירים את מעגל היחידה, והוסף לסרטוט דוגמה של מספר w ושל ההפכי שלו $\frac{1}{w}$ עבור $r > 1$.

ג. נתונה סדרה הנדסית a_n שבה $a_1 = \frac{1}{w}$, $a_2 = z$.
הבע באמצעות α ו־ r את a_5 .

16. שאלה ממבחן בגרות קיץ תשע"ז 5 יח"ל

א. מצא את המספרים המרוכבים z המקיימים $z^3=-1$.

נסמן את פתרונות המשוואה מסעיף א ב־ z_1 , z_2 ו־ z_3 .

נתון כי z_2 הוא ממשי.

ב. (1) הראה ש־ z_1 , z_2 ו־ z_3 הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית.

(2) z_1 , z_2 ו־ z_3 הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית z_n .

מצא את z_5 , האיבר החמישי בסדרה.

ג. (1) z_{13} , z_{14} ו־ z_{15} (האיברים ה־ 13 , ה־ 14 וה־ 15 בסדרה z_n שמצאת בסעיף ב)

מיוצגים על ידי הנקודות A , B ו־ C במישור גאוס, בהתאמה.

חשב את שטח המשולש ABC .

(2) K , L ו־ M הן שלוש נקודות במישור גאוס המייצגות שלושה איברים עוקבים

בסדרה z_n .

הסבר מדוע המשולש KLM חופף למשולש שאת שטחו מצאת בתת־סעיף ג(1).

17. שאלה ממבחן בגרות חורף תשע״א 5 יח״ל

z_1 , z_2 ו־ z_3 הם שלושה מספרים מרוכבים שונים הנמצאים על ישר אחד שעובר

דרך ראשית הצירים. z_1 ו־ z_2 נמצאים ברביע הראשון, ו־ z_3 נמצא ברביע השלישי.

נסמן $z_1=r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$.

א. האם המנה $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ היא מספר ממשי, מספר מדומה טהור או מספר שהוא לא ממשי ולא מדומה טהור? נמק.

נתון גם כי z_1 ו־ z_3 נמצאים על מעגל היחידה, ו־ $\left|\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right|=\frac{1}{2}$.

ב. חשב את הערך המוחלט של z_2 .

ג. z_4 הוא הצמוד של z_1 .

הבע באמצעות α את שטח המשולש הנוצר על ידי הנקודות z_1 , z_3 , z_4 .