תוכנית כיתה יוד – חמש יח״ל

סדר ושעות הלימוד המוצעים:

כיתה י			
נושא I	שעות	נושא II	שעות
מבוא להנדסה אנליטית	10	מבוא לאנליזה	15
גאומטריה - מקומות גאומטריים והמשולש	10		
גאומטריה – המעגל	20	חשבון דיפרנציאלי: מושגי יסוד כולל קצב שינוי, גבולות, שימושים והיסטוריה, פונקציות פולינומיאליות, היכרות ראשונית עם פונקציות רציונליות ושורש	45
גאומטריה – דמיון	20	טריגונומטריה במישור כולל משוואות טריגונומטריות	15
מבוא לפונקציות טריגונומטריות	15		
	75		75

תוכן

מבוא

בכיתה יוד יילמדו שלושה נושאים עיקריים : אנליזה, גאומטריה של המישור, וטריגונומטריה.

להלן פירוט התכנים והדגשים בכל אחד מנושאים אלו, בנספח 1 מתוארים בקצרה היבטים מרכזיים הקשורים להוכחות ואופן ביטויים לאורך התכנית ובנספח 2 מופיעות מספר דוגמאות להמחשת סוג השאלות שאנו מציעים לכלול בכל פרק.

כאמור, ברוח התוכנית הכוללת, יש התייחסות ליישומים של המתמטיקה בכל תחומי הלימוד, כפי שהם באים לידי ביטוי במדעים השונים ובחיי יום-יום[1] תוך מטרה להדגיש את רלוונטיות היישומים של המתמטיקה הנלמדת לנושאים עכשוויים. השאלות היישומיות נכתבו בצורה אוריינית כך שגוף השאלות מסביר את רלוונטיות המתמטיקה הנלמדת מחד ומרחיב את ההשכלה הכללית של התלמידים בתחום היישומי מאידך. נושאים אלה מופיעים בעיקר בדוגמאות לשאלות בפרקים השונים, המוצגות בנספח. בנוסף, כהעשרה מתמטית, תרבותית ומדעית, כדאי להפנות את התלמידים לקריאה על דמויות מרכזיות בפיתוח המתמטיקה הנלמדת, על התחומים שפיתחו ועל חשיבותם.

התוכנית כוללת שימוש בטכנולוגיה לשם חקר והמחשת התכנים. השימוש בטכנולוגיה מאפשר ומזמין לדון בשאלות בהקשר רחב ובאופן איכותני ולכן מהווה דרך להדגים את הפוטנציאל לעושר מחשבתי בהקשר המתמטי.

נזכיר כי נושאים ודוגמאות המוגדרים כהעשרה (ומסומנים באפור) לא ייכללו כנושאי חובה בתוכנית (בשל קוצר זמן ו/או אופיים המתקדם או אופיים הטכני)[2], אך המורים אמורים להכירם, לאפשר לתלמידים להתבסס בעבודות ובבחינות על עקרונות ושיטות המופיעים בהם, ולהפנות את התלמידים המתעניינים בהם לקריאה נוספת בספרי הלימוד ובמרשתת (עם הרחבה אפשרית נוספת לתלמידים מצטיינים).

---

[1] מוצע כי הטמעת נושא היישומים תעשה בהדרגה, ותעודכן בספרי הלימוד ובמשרד החינוך לאורך השנים. יש לשים לב כי הייצוג ביחידות שונות (למשל יחידות אורך לעומת יחידות מהירות) בשאלות יישומיות ייעשה בצורה נכונה – בשאלות היישומיות הצירים בגרפים צריכים לכלול את היחידות של המשתנים/הפונקציות. בספרי הלימוד יש להוסיף דוגמאות מסוג זה עם פתרונות בהם היחידות כלולות ודוגמאות בהם שינוי היחידות במהלך/סוף התרגיל מניב תמיד אותה תוצאה. יש לשים לב שבשאלות היישומיות לא נכון להציג פונקציה ונגזרות שלה על אותו הגרף – שכן היחידות שלהן – שונות. אם דרושים שני הגרפים, אפשר ורצוי לשים את גרף הנגזרת ישר מתחת לגרף הפונקציה.

[2] התלמידים יהיו רשאים להסתמך על שלמדו במסגרת נושאי ההעשרה.

אנליזה

מבוא להנדסה אנליטית (10 שעות)

מטרות הפרק הן חזרה על נושא הפונקציה הלינארית והריבועית שנלמד בחט"ב והעמקה בו, הכרת כלים אנליטיים שישמשו בהמשך בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, חיזוק הטכניקה האלגברית, היכרות עם המעגל כהכנה להוראת טריגונומטריה, והכרת הקישוריות בין אלגברה, גאומטריה ופונקציות.

תכנים

1. מבוא היסטורי על מקורות ההנדסה האנליטית ויישומיה.
2. חזרה על נושא הישר והפרבולה והרחבתו תוך קישור למושג הפונקציה ויישומיה. אבחנה בין גרף של פונקציה לבין קבוצת נקודות שאינה מייצגת גרף של פונקציה (למשל, x=k).
3. מציאת משוואת ישר על פי שתי נקודות ועל פי שיפוע ונקודה, הקבלה, אמצע קטע, חיתוך וניצבות, מרחק בין שתי נקודות.
4. קישור למערכת משוואות לינאריות והצגתה הגרפית כולל שימוש פשוט בפרמטרים (הביטויים המכילים פרמטרים הם ליניאריים). אבחנה בין משוואה מפורשת של קו ישר לעומת משוואה כללית (יתרונות וחסרונות).
5. קישור למערכת של משוואה ריבועית ומשוואה לינארית.
6. משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים) כהכנה להוראת טריגונומטריה. זוהי דוגמה נוספת לעקום שאינו גרף של פונקציה.
7. הצגת מעגל באמצעות נוסחת המרחק בין נקודות, והקשר להזזה של מעגל קנוני. הזזת המעגל היא דוגמה נוספת לטרנספורמציות של תבניות בנוסף להזזות של פרבולה, שנלמדו בחט"ב. (התכנית לכיתה יוד אינה כוללת משוואה כללית של מעגל.)

מבוא לאנליזה של פונקציות (15 שעות)

בכיתה יוד יונח המסד לחשבון הדיפרנציאלי לצד היכרות עם המושגים באופן אינטואיטיבי ובניית ההגדרות וההוכחות באופן פורמלי (ראו נספח 1). כהמשך לתכנית הלימודים בחט"ב, התלמידים יכירו ויעמיקו את מושג הפונקציה ויפתחו את ה"חוש לפונקציות", כך שיוכלו לפעול בכל הנוגע לפונקציות באופן חופשי וישתמשו במושג הפונקציה בתחומי דעת שונים במתמטיקה ומחוצה לה. התלמידים יתוודעו לפונקציות הפולינומיאליות, ויכירו לראשונה את פונקציות השורש ואת הפונקציות הרציונליות. בכיתה י"א יעמיקו את החקירה של הפונקציות הרציונליות, פונקציות השורש והפונקציות הטריגונומטריות. עם כל היכרות עם פונקציה חדשה, יחקרו פעולות על פונקציות והשפעתן על הגרף ועל הביטוי הסימבולי (שיקוף לציר ה-x ולציר ה-y, סכום והפרש, מכפלה ומנה, הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$, פונקציה הפוכה, הרכבת פונקציות, הזזה ומתיחה). שימוש בפרמטרים יעשה לצורך חקירה איכותנית של משפחות של פונקציות וחקר בעיות יישומיות.

צריך וניתן לטפח "חוש לפונקציות" אצל תלמידים, מה שיכול להביא לידי ביטוי מספר מיומנויות או כשרים (proficiencies).

הרחבת מאגר הפונקציות והפעולות שנעשות עליהן ירחיב את אפשרויות השיח המתמטי על מושג הפונקציה ויהווה תשתית להבניית מושגים באנליזה.

המבוא לאנליזה כולל העמקה במושג הפונקציה ושימושיה בתיאור תהליכים ומודלים ישומיים בהם הפונקציה מתארת השתנות הדדית של שני גדלים, כמו זיהוי קצב השינוי, הבחנה בין משתנים תלויים ובלתי-תלויים. בהינתן מודל המתאר השתנות (כגון בבעיות תנועה) על התלמיד לזהות את הגדלים המשתנים ולתאר את ההתאמה בין המשתנה התלוי והבלתי תלוי, להציג את הפונקציה בדרכים שונות כגון טבלת ערכים, התבנית האלגברית והגרף, להיות מסוגל לעבור מייצוג לייצוג, ולבחור את הייצוג המתאים לבעיה. יש לפתח את היכולת "לראות" ייצוג אחד כאשר עובדים עם אחר, ובפרט היכולת לדמיין את הגרף ולהפעיל עליו פעולות באופן ויזואלי. טרנספורמציות הן כלי מתמטי ליצירת משפחה של פונקציות. הן מעודדות להסתכל על הפונקציה כדוגמה או כפרט במשפחה, ומהוות כלי לנוע בין הפונקציות בתוך המשפחה. ה"חוש לפונקציות" כולל גם יכולת להסתכל על ביטוי אלגברי ב"מבט על" ולזהות בו מבנים.

תכנים

1. היכרות עם פונקציות פולינומיאליות תוך חזרה על הפונקציה הקווית והפונקציה הריבועית.

   מהלך הוראה ודוגמאות ניתן למצוא בספר "ללמוד וללמד אנליזה" בפרק [רגע לפני הנגזרת](#) .

   דוגמאות לפעילויות אינטראקטיביות ראו ב- : [שורשים פשוטים של פולינום](#) ,[ריבוי השורש של פולינום](#) .

   פעילויות ויישומונים עם מדריך למורה ראו באתר המרכז הארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי : [ארגז כלים – טרום אנליזה](#)

- היכרות עם פונקציות חזְקה $f(x) = x^n$ ותכונותיהן כהכללה של הפונקציה הלינארית y=x ושל הפונקציה הריבועית y=x^2. הזזות ומתיחות ככלי ליצירת משפחות של פונקציות חזְקה.

- אבחנה בין פונקציות חזָקה זוגיות ואי-זוגיות ותכונותיהן. ניתן להסיק כי לפונקציית פולינום ממעלה אי-זוגית יש לפחות שורש ממשי אחד, וכי לפולינום ממעלה זוגית אין בהכרח שורש ממשי.
- חקירה איכותנית של הפולינום כמכפלת גורמים לינאריים וריבועיים והבחנה בין שורש של פולינום מריבוי זוגי ומריבוי אי-זוגי והשפעתם על הגרף.
- יודגש כי ניתוח איכותני של תבנית הפולינום נותן סקיצה טובה למדי של חיוביות ושליליות הפונקציה, של ההתנהגות באינסוף, הניתוח מרמז על מספר נקודות הקיצון של הפונקציה אך לא אומר דבר על מיקומן. מכאן עולה הצורך בכלי נוסף שיסייע למצוא באופן מדויק את נקודות הקיצון בעזרת הנגזרת.
- יודגש שלא כל פולינום ניתן לפרק לגורמים לינאריים, ושלא תמיד ניתן בקלות למצוא את הפירוק, אם קיים. לכן עולה צורך בכלים אנליטיים נוספים. יש להימנע מפירוק לגורמים של פולינומים מסובכים מדי. דוגמאות לפירוקים אפשריים : x^2 .x4-1 ,x+
- יודגש כי ניתוח איכותני של תבנית הפולינום לפי שורשיו יהווה כלי שימושי לאורך הדרך, למשל קביעת תחומי עלייה וירידה על פי גרף הנגזרת, ובהמשך ניתוח איכותני של פונקציות רציונליות והאסימפטוטות שלהן (ראו התנהגות הפונקציה סביב נקודות אי-הגדרה.)
- דיון ראשוני במושג קצב שינוי (לדוגמא : עבור מספרים גדולים, פונקציות חזָקה ממעלות גבוהות גדלות מהר יותר מאשר פונקציות ממעלות נמוכות יותר) .

2. היכרות עם תבניות של פונקציות שאינן פולינומיאליות ובחינת תכונותיהן שנגזרות מהתבנית

- זיהוי התנהגות הפונקציה במונחים של קצב שינוי (לדוגמא קצב השינוי של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ שלילי בכל תחום הגדרתה)
- זוגיות ואי-זוגיות של פונקציות
- הצגת פונקציות וחקירה ראשונית של תכונותיהן : פונקציית הערך המוחלט, פונקציית השורש הריבועי, הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ ו- $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

3. פעולות על פונקציות והשפעתן על הגרף והביטוי הסימבולי :

- פעולות שיקוף לציר x ($g(x)=-f(x)$) ושיקוף לציר y של גרף הפונקציה ($g(x)=f(-x)$).
- הרחבה של הזזות הפרבולה בייצוג הקודקודי להזזות ומתיחות של פונקציות אחרות :

$$f(x)=a(x-p)^n+k .f(x)=\frac{a}{x-p}+k ,\ f(x)=a\sqrt{x-p}+k ,$$

- משמעות הפעולות על פונקציות : סכום והפרש פונקציות, מכפלה ומנה.
- הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$: הקשר בין הגרפים של g ו-f, תחומי ההגדרה, האפסים והאסימפטוטות.

4. הרכבת פונקציות ופונקציה הפוכה

- הגדרה של הרכבת פונקציות- למשל ערך מוחלט של פונקציה, ריבוע של פונקציה, שורש של פונקציה.
- דיון באיזה תנאים קיימת פונקציה הפוכה ובאיזה מקרים לא. הגדרת פונקציית השורש הריבועי כפונקציה ההפוכה לפונקציה הריבועית, אותה ניתן גם לסמן $\sqrt{x}=x^{1/2}$ ובדומה, פונקציית השורש השלישי היא הפונקציה ההפוכה לפונקציה x^3 וניתן לסמנה כ $x^{1/3}$.
- נדגיש כי : $\sqrt{x^2}=|x|$
- חומרי לימוד על [פונקציית ערך מוחלט](#)
- גרפים של פונקציות וגרפים של הפונקציות ההפוכות להן סימטריים ביחס לישר y=x.
ניתן למצוא חומרי הוראה בחוברת לכיתה המדעית [הרחבת עולם הפונקציות - הזזות ומתיחות, עמ' 19-24.](#)

הערות

1. בפרק אנליזה נזדקק ל"הגדרה אינטואיטיבית" של רציפות שנסמכת בעיקר על חזות גרפית של פונקציות רציפות. על ידי מתן דוגמאות ואי-דוגמאות (דוגמאות גרפים של פונקציות שאינן רציפות) אנחנו יכולים לחדד את האפיונים החזותיים של תכונת הרציפות ואת קשרה לנושא הגבול. כמו כן יש לעמוד על כך שהגדרת הפונקציה אינה גוררת רציפות.
2. שימוש בטכנולוגיה מאפשר הצגה גרפית של פונקציות וחקירת תכונותיהן כבדיקה וסיוע לחקירה האנליטית. הטכנולוגיה מאפשרת לחקור באופן דינאמי השפעה של פרמטרים על משפחות של פונקציות ולהמחיש פעולות על פונקציות ולהגיע להכללות. חשוב להדגיש את היתרון בהצגת הפתרון הגרפי כדרך נוספת לבדיקת הפאזל שנקרא חקירת פונקציה. יש להשתמש בכלים הגרפיים לשאילת שאלות איכותניות.
3. לפי עקרון הספירליות הצגת הפונקציות והפעולות עליהן תיעשה ברמה בסיסית בלבד ובאופן איכותני. מטרתה להרחיב את הידע, להציג את המושגים באופן אינטואיטיבי, ולהטרים מושגים שילמדו הלאה. בהמשך יש לשלב נושאים אלו (ברמת קושי העולה בהדרגה) בכל מהלך הלימוד של אנליזה. ניתן לדחות להמשך חלק מההיכרות עם הפונקציות ו/או חלק מהפעולות שהוזכרו.
4. הניתוח האיכותני של פונקציות פולינום ופונקציות מהצורה $\frac{1}{f(x)}$ כאשר $f(x)$ היא פונקצית פולינום מהווה הזדמנות לשימוש אינטואיטיבי בשפה באופן שמערב את מושג הגבול בהקשר של התנהגות אסימפטוטית, כך שלא יווצרו אינטואיציות שגויות. יש לדבר על התנהגות אסימפטוטית באופן שידגיש את הממד התהליכי שבמציאתה. (בשלב זה, ניתן דוגמאות של התנהגות מונוטונית בגבולות השונים) למשל:

   - ערכי הפונקציה x^2 הולכים וגדלים ככל ש x גדל וחיובי. כאשר $x \to \infty$, נוכל לקבל ערך y גדול ככל שנרצה, אם רק נגדיל את x במידה הדרושה.
   - נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x-1}$. כאשר $x \to 1$ מימין, נוכל לקבל ערך y גדול ככל שנרצה, אם רק נתקרב ל- 1 (מימין) במידה הדרושה. אם נתקרב ל- 1 משמאל נקבל ערכים שליליים, אך עדין נוכל לקבל ערכים גדולים בערכם המוחלט ככל שנרצה.
   - ניתן להסיק באופן אינטואיטיבי התנהגות אסימפטוטית של פונקציות מהצורה $\frac{1}{f(x)}$ כאשר $f(x)$ היא פונקצית פולינום עבור $x \to \infty$ וגם $x \to -\infty$.

     ניתן לדבר על ההתנהגות האסימפטוטית באופן שמדגיש את הממד התהליכי. למשל, כשעוסקים בפונקציה $y = \frac{1}{x+1}$ ניתן לומר: מישהו יכול להציע לי x כך שמימין לו כל ערכי y יהיו קטנים מ- $\frac{1}{10}$? האם תוכלו למצוא ערך של x כך שלכל x גדול ממנו ערכי הפונקציה יהיו עוד יותר קרובים לאפס?
   - יש להימנע מהתייחסות אל הסימן ∞ כאל מספר. למשל לא לבצע פעולות חשבון עם הסימן ∞.
5. במהלך הפרק ניתן לחזור על אלגברה של חטיבת הביניים מפרספקטיבה של פונקציות. למשל:

   - פתרון משוואות ואי-שוויון באופן גרפי ואלגברי (מהיבט הפונקציות).
   - פתרון משוואה ואי-שוויון דו-ריבועי.
   - פתרון אי-שוויון של פולינומים לפי פירוק לגורמים וסרטוט סקיצה לגרף ("שיטת הקטעים/התחומים").
   - פתרון אי-שוויון רציונלי ללא פרמטרים – אי-שוויון שניתן להגיע ממנו לאי-שוויון מהצורה $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ כאשר $f(x)$ או $g(x)$ הם הפולינומים ממעלה שנייה לכל היותר או פולינומים שפירוקם לגורמים נתון.

חשבון דיפרנציאלי (45 שעות)

לאחר היכרות איכותנית עם פונקציות הגענו להכרה כי יש תכונות שלא נוכל להכיר ללא כלי חקר חדשים. זה המקום בו מוצגת הנגזרת כביטוי לקצב השינוי של הפונקציה שבאמצעותו אפשר להכיר את מירב תכונותיה.

פיתוח מושג הנגזרת

נתבונן בדוגמאות של פונקציות בעלות קצב שינוי אחיד או משתנה. נציג מדרגות ככלי לתאור קצב השינוי, ולכן ככלי לניתוח גרף הפונקציה, גרף השתנות הפונקציה ולבסוף הגדרת הנגזרת בנקודה. כל המהלך יעשה תוך הצגת ההקשר השימושי פיזיקלי והפירוש הגרפי של הנגזרת. לאורך כל הדרך יעשה שימוש בתוכנה דינאמית להדגמה וחקירה של תהליכי השינוי.

הגדרת הנגזרת כקצב השתנות

1. הפרק ייפתח בהצגת בעיות שימושיות הקשורות לקצב שינוי אחיד או משתנה תוך קישור לנלמד בחט"ב (למשל, קצב אחיד וקצב משתנה) ודגש על מקומו הטבעי של מושג זה בחיי היום-יום על ההצגה הגרפית של ערכים המשתנים בזמן , במקום וכדומה. ל דיון אינטואיטיבי על קצב שינוי של פונקציה לא קווית דרך שימושים.

להלן דוגמאות אפשריות ליישומים שימושיים לחקירת קצב שינוי של פונקציה : צריכת דלק במשך נסיעה מסוימת, מהירות במשך נסיעה או ריצה, השתנות הטמפרטורה במשך תקופה מסויימת, כמות תרופה ליחידת משקל בגוף בין שתי נטילות, מדד היוקר, צמיחה כלכלית, קצב בניית דירות חדשות, השתנות תל"ג לנפש.

דוגמאות עם שימוש בטכנולוגיה

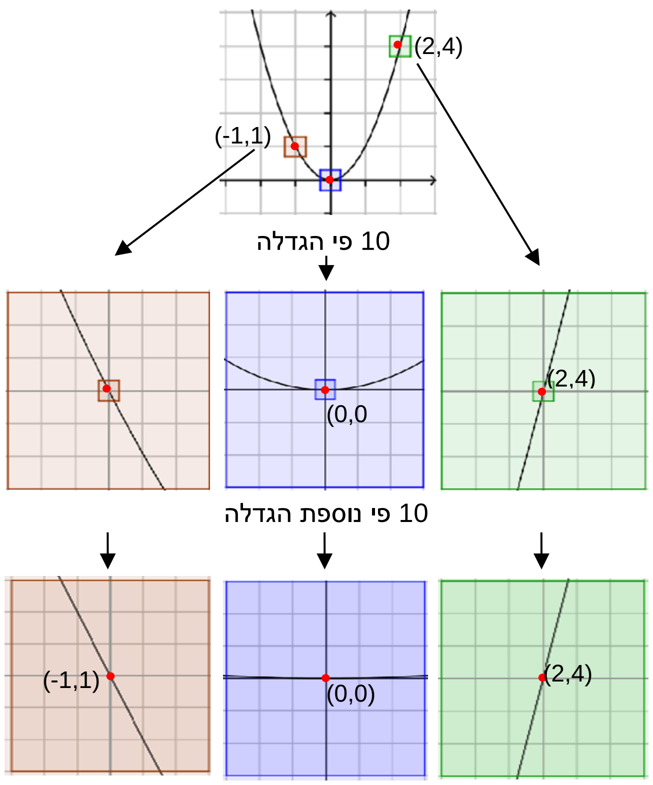
ריצת 200 מטר – קצב שינוי הדרך לפי הזמן, מקור : מט"ח, לראות מתמטיקה, יישומון בגאוגברה.

צביעת צורות – קצב שינוי גובה צורות ביחס לזמן, על פי משימת אוריינות של מילוי כלים.

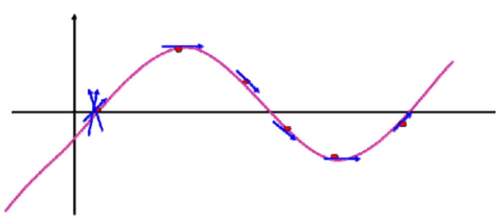
קו המים– סימולציה למילוי כדים. קצב שינוי גובה קו המים בכד ביחס לזמן.

2. מדרגות ככלי לתאור קצב השינוי ולכן ככלי לניתוח גרף הפונקציה. מהלך ההוראה יכלול : ניתוח השתנות ערכי הפונקציה באמצעות מדרגה עם רוחב קבוע (כפי שנלמד בחט"ב), ניתוח השתנות ערכי הפונקציה באמצעות היחס של גובה המדרגה לרוחבה ($\frac{Dy}{Dx}$), הבחנה בין פונקציות עם שינוי בקצב אחיד או בקצב משתנה. יש להדגיש כי ככל שרוחב המדרגה קטן יותר כך ההערכה של קצב השינוי טובה יותר. תיאור השתנות הפונקציה על ידי תיאור השתנות המדרגות : המדרגות עולות – הפונקציה עולה ; המדרגות עולות אך גובהי המדרגות קטנים – הפונקציה עולה וקעורה כלפי מעלה, המדרגות יורדות ואחר כך עולות – לפונקציה יש נקודת מינימום. קצב שינוי חיובי וקצב שינוי שלילי כמתארים פונקציה עולה ויורדת בהתאמה. שימוש במדרגות לניתוח איכותני של תופעות מתחומים שונים שרלוונטי לנתח בהם קצב השתנות (ראו רשימת דוגמאות לעיל). ניתוח השתנות הפונקציה המוצגת על ידי טבלת ערכים וגרף.

3. הצגת מושג המשיק לפונקציה בנקודה באופן אינטואיטיבי תוך התבוננות בגרף. כשמגדילים (zoom in) גרף של פונקציה בסביבת נקודה (שבה הפונקציה גזירה), גרף הפונקציה "נראה כמו" קו ישר עד כדי כך שלא ניתן להבחין בעין בינו לקו ישר. לכן נוכל לתאר באופן אינטואיטיבי את המשיק כישר "הכי קרוב" לעקום הפונקציה בסביבת נקודה (קירוב לינארי). המשיק מתאר את מגמת הפונקציה בסביבת הנקודה. אם שיפוע המשיק חיובי/ שלילי הפונקציה עולה/ יורדת באותה נקודה. את תהליך ההתקרבות יש להדגים בעזרת כלים טכנולוגיים.



מעלות הוצאת ,אנליזה ול

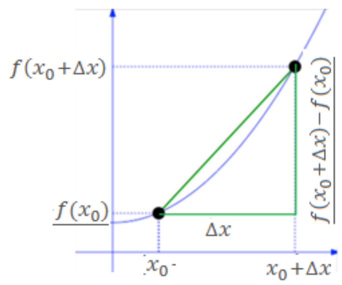


4. הקדמה להתייחסות את הנגזרת כפונקציה (לא רק כתכונה נקודתית) - בניית סקיצה לגרף השתנות הפונקציה על בסיס ניתוח המדרגות, קצב השינוי של גרף הפונקציה (הוא גרף הנגזרת). התאמה בין גרפים לגרף ההשתנות באופן איכותני (השתנות פונקציה ריבועית היא פונקציה לינארית וכו').

דוגמאות עם שימוש בטכנולוגיה

- יישומון פונקציית הנגזרת כהשתנות של המשיקים (בארט גולש על הגל..)
- בנייה אינטראקטיבית של גרף הנגזרת באופן איכותני (יישומון תרגול של קאהן)

5. הצגת המשיק באופן אינטואיטיבי מעלה את הצורך להגדירו באופן מדויק ולמצוא כלים אנליטיים לזיהויו ודיון על הקשר בין ההסתכלות על המשיק כקרוב לינארי לבין ההסתכלות על המשיק כגבול החותכים



נשים לב כי ככל שנקטין את רוחב המדרגה, החותך בין שתי נקודות קרובות על הפונקציה, יתקרב להיות המשיק לפונקציה בנקודה והמדרגה תתאר את קצב השינוי של הפונקציה בנקודה.

נגדיר קצב השינוי בנקודה כגבול של קצב שינוי ממוצע: $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\, x \to 0 \to\ f'(x_0)$.

כאשר ניתן לצייר בנקודה כלשהי משיק לגרף (שאינו מאונך לציר ה- x), שיפוע המשיק לגרף בנקודה זו הוא ערך

הנגזרת בנקודה x_0. במקרה זה המשיק מהווה גבול של החותכים בתהליך התקרבות לנקודה

- רצוי להדגים את תהליך ההתקרבות של החותכים למשיק בעזרת טכנולוגיה. לדוגמה ביישום: הגדרת הנגזרת כגבול שיפוע החותכים
- חישובי הגבולות יעשו באופן אינטואיטיבי הן בעזרת חישובים נומריים, בעזרת אריתמטיקה פשוטה של גבולות והמחשות ויזואליות (בעזרת טכנולוגיה). לדוגמאות לשימוש בשפה, ראו סעיף ד' בהערות לפרק המבוא לעיל.
- סימון הגבול ייעשה על ידי חיצים ואין חובה להשתמש בסימון limes.
- התפיסה הגאומטרית של הנגזרת כשיפוע משיק מוגבלת למקרים שבהם הפונקציה גזירה ברציפות. יש לדון בהמשך בנקודות על פונקציות בהן הנגזרת אינה מוגדרת אך המשיק קיים (לדוגמה הפונקציה $\sqrt[3]{x}$ בנקודה x=0).
- מומלץ לשלב את ההיסטוריה של התפתחות מושג הנגזרת על פי ניוטון ולייבניץ בהתפתחות המתמטיקה. ניוטון ולייבניץ חשבו למשל על תיאור מיקום גופים כפונקציה של הזמן. למשל, בהינתן y=f(t)) המתאר את גובהו של גוף מסוים בזמן t. המהירות הרגעית היא אידיאליזציה מתמטית של מהירויות ממוצעת על קטעי זמן קצרים (וקצרים יותר), לכן הנגזרת בנקודה t מתארת את מהירותו האנכית הרגעית של הגוף בזמן זה, (ונגזרת המהירות מתארת את התאוצה האנכית ברגע זה.)
- חשוב להציג ולפתח דיון על יישומים של הפונקציה הנגזרת הן בעולם המדע והן בתחומי דעת שאינם מתמטיים באופיים. למשל הגדרת מושג המהירות הרגעית כגבול של מהירויות ממוצעות ולכן הגדרתה כנגזרת של פונקציה ההעתק. בתכנית תוצגנה דוגמאות פשוטות של מידול במכניקה, והתלמידים יצטרכו לפתור בעיות דומות. (ראו דוגמאות בנספח 2)

שימושים ראשונים בפונקציה הנגזרת

1. הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת ולהיפך אל הפונקציה הקדומה באופן איכותני, תוך הגבלת הדיון לפונקציות "חלקות" (גזירות ברציפות). דוגמאות עם שימוש בטכנולוגיה:
   - הקשרים בין פונקציה ונגזרותיה – תרגול אינטראקטיבי, האתגר 5.
   - הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

2. כללי גזירה של כפל פונקציה בקבוע, סכום והפרש פונקציות, מכפלת פונקציות, פונקציה מורכבת – הוכחתם על פי הגדרת הנגזרת והסבר איכותני בגרף ובדוגמאות שימושיות. יש להדגיש כי ברוח התכנית יש לכלול הוכחות לנוסחאות אלו (כולל ניסוח מדויק של הנתונים וההיסקים הלוגיים, ראו נספח 1), ולהדגיש כי אלו הוכחות מתמטיות המאפשרות לנו קיצור דרך גדול ביישומים (במקום לחשב את הנגזרת לכל דוגמה ודוגמה נשתמש בחוקים אלה). כמו כן יש לקשר בין הנוסחאות, ולהראות שהן עקביות זו לזו.
   לדוגמה: השפעת כפל בקבוע g(x)=af(x) על גרף הפונקציה היא מתיחה/כיווץ אנכית: מתיחה/כיווץ פי a של ציר ה-y והגדלה/ הקטנת השיפועים בהתאם, ולכן g'(x)=af'(x).

בדומה, ניתן להשפיע על הנגזרת בעזרת מתיחה/כיווץ אופקית (כלומר של ציר ה-x) : אם g(x)= f(ax) שוב נקבל ש- g'(x)=af'(ax) אבל כאן אנו מותחים/מכווצים את ציר ה-x בלי להשפיע על ערכי הפונקציה.

3. הנגזרת כמייצגת קצב שינוי שמהווה כלי לניתוח גרף הפונקציה. החקירה של משפחת הפונקציות הפולינומיאליות תשמש להדגמה ופיתוח של מושגי חקירת פונקציות.
החקירה כוללת :
   - תחום ההגדרה של הפונקציה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, זוגיות ואי זוגיות הפונקציה, שרטוט סקיצה לגרף הפונקציה
   - חקירת הפונקציה בתחום סגור
   - מציאת משוואת משיק בנקודה שעל הגרף
   - פתרון בעיות יישומיות של ערך קיצון
   - פעולות על פונקציות
   - חקירה איכותנית של פתרון משוואות ואי-שוויונות

4. פונקציה קדומה לפונקציות פולינומיאליות. מציאת הפונקציה הקדומה כאשר ידועה פונקצית הנגזרת, ללא שימוש בסימון האינטגרל. (בפעולת האנטי נגזרת אנו שואלים בהינתן פונקצית נגזרת , איזו פונקציה גזרנו? האם היא יחידה?)

הרחבה לפונקציות רציונליות ושורשים כולל הרכבה של פונקציות

1. הוכחת הנגזרת של הפונקציה $\frac{1}{x}$ וחקירת פונקציות רציונליות מהצורה $\frac{1}{f(x)}$ כפונקציה מורכבת הן בכלים אנליטיים והן באופן איכותני. חקירת התנהגות הפונקציה בסביבת נקודות אי הגדרה ובאינסוף, מציאת אסימפטוטות על ידי חישוב אינטואיטיבי של גבול. דיון איכותני על השפעת ההזזות והמתיחות.
דוגמאות לחקירה איכותנית בעזרת טכנולוגיה :
[פונקציה הופכית לישר]
[פונקציה הופכית לפונקציה ריבועית]
[התנהגות סביב נקודות אי הגדרה]
2. דיון בתכונות של פונקציות רציונליות כלליות יותר בכדי להדגים את אפשרות קיומם של מגוון אסימפטוטות ונקודות אי-הגדרה שונות (עם זאת, נקפיד על סיבוכיות אלגברית נמוכה כפי שמפורט למטה) התנהגות פונקציה רציונלית בסביבת נקודת אי הגדרה : אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x ונקודת אי-רציפות סליקה.

- התנהגות פונקציה רציונלית כאשר ערכי המשתנה הבלתי תלוי שואפים לאינסוף ולמינוס אינסוף. אסימפטוטות אופקיות לעומת שאיפה של ערכי הפונקציה לאינסוף.
- נגזרת של פונקציית מנה.
- חקירת תכונות של פונקציה רציונלית וסרטוט הגרף שלה. (ראו פרוט בסעיף ג' בתת-פרק שימושים ראשונים בפונקציה הנגזרת). בחקירת פונקציות ראציונליות נדרש פתרון משוואות אי-רציונליות פשוטות. יש להדגיש את הצורך בבדיקת הערכים שמתקבלים בתהליך האלגברי של הפתרון על ידי הצבה במשוואה המקורית (ראו http://highmath.haifa.ac.il/data/alle39-10.pdf

דגשים בנושא פונקציות רציונליות

- בפונקציות הרציונליות נחקור את התנהגות הפונקציה סביב נקודות אי ההגדרה. נכיר מצב של אי הגדרה בו לפונקציה יש נקודה סליקה, כך שנוצר חור בגרף הפונקציה, בנוסף למצב של אי הגדרה בו גרף הפונקציה מתקרב לאסימפטוטה אנכית.

- יושם דגש על שקילות הפונקציה הרציונלית המצומצמת, בצירוף התנאי של אי ההגדרה בנקודה הסליקה, לפונקציה הרציונלית שאינה מצומצמת, כל זאת כדי להבהיר את המושג של אי הרציפות בנקודה וכדי להקל על ההתבוננות בביטוי ולהקל על פעולות כמו גזירה.
- מומלץ לחקור איכותנית את התנהגות גרף הפונקציה
  - עבור ערכי x ששואפים לפלוס או מינוס אינסוף. בפרט, מציאת האסימפטוטות האופקיות תיעשה על ידי חישוב אינטואיטיבי של הגבול, תוך שימוש בתכונות מוכרות של פונקציות פולינומיאליות, למשל, כי עבור ערכים מספיק גדולים של x הערך של x^2 זניח לעומת הערך של x^3.
  - יש להימנע משימוש בטכניקות "אלגבריות" למיניהן למציאת התנהגות אסימפטוטית.
  - יושם דגש על שרטוט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה תוך הסתמכות על תחום ההגדרה של הפונקציה, אסימפטוטות מקבילות לצירים, זוגיות ואי זוגיות, נקודות חיתוך עם הצירים, וחיוביות ושליליות של המונה והמכנה כל זאת לפני השימוש בנגזרות של הפונקציה.

3. פונקציית השורש הריבועי ונגזרתה, ניתוחה, הצגתה כפונקציה הפוכה לפונקציה ריבועית תוך כדי כך הדגמת הקשר הגרפי בין הצגת הפרבולה ושורש בעזרת שיקוף ביחס לישר y=x והקשר בין הנגזרות של פונקציות הפוכות ושימוש בשיקוף להוכחת הקשר בין הנגזרות .
4. פונקציית שורש מורכבת. רמת המורכבות של פונקציות שמתחת לסימן השורש תוגבל בשלב זה לפונקציות לינאריות, להזזות ולמתיחות שלהן (ותורחב לפונקציות ריבועיות במידה ונותר זמן לכך). בכיתה י"א, לאחר חקירת פונקציות רציונליות, נחזור באופן ספירלי לחקירת פונקציות מורכבות יותר בהן השורש מעורב. (שימוש בכלל המכפלה של נגזרות לחקירת פונקציות כגון: $f(x) = x\sqrt{x-5}$.)
   - חקירת תכונות של פונקציית שורש מורכבת באופן איכותני ובאמצעות הנגזרת
   - מציאת שיפוע משיק ומציאת משוואת משיק לגרף בנקודה שעל גרף הפונקציה.

5. בעיות קיצון שימושיות בתחום פתוח ובתחום סגור במגוון תחומים במתמטיקה (כגון גאומטריית המישור והמרחב, גאומטריה אנליטית, אנליזה, טריגונומטריה, וכדומה) ובהקשרים שונים (כגון פיסיקה, כלכלה). יש להדגיש את הבנת משמעות ערך הקיצון מעבר לתוצאה האנליטית. הצגת פתרון בעיות קיצון גם ללא נגזרת. יש תועלת רבה בחקירה ובהמחשה של בעיות קיצון בייצוגים שונים בעזרת יישומים דינאמיים.

דוגמאות לחקירה איכותנית בעזרת טכנולוגיה:

התיבה הפתוחה

קידום הוראת המתמטיקה בשילוב כלים טכנולוגיים, באמצעות המודל של Lesson Study , עלי"ה 43.

גאומטריה אוקלידית (50 שעות)

מבוא

לימוד הגאומטריה מאפשר לחדד מספר נושאים דידקטיים שהוזכרו בין המטרות הכלליות של התכנית ושיש להדגיש במהלך לימוד הפרקים השונים בגאומטריה (ראו גם דיון מפורט בנושא ההוכחות בנספח 1).

- הכרת מערכת היסקית ולימוד מיומנויות היסק ובכלל זה:
  - הבנה שהוכחות בגאומטריה מתבססות רק על הגדרות, מושגי יסוד, אקסיומות ותוצאות שהוכחו בעבר.
  - הבנת התשתית הלוגית של המתמטיקה: כמתים כגון לכל וקיים, גרירה לוגית, תנאי מספיק, תנאי הכרחי ודוגמה נגדית.
  - הבחנה בין משפט למשפט הפוך.
  - חשיבה היסקית: יכולת להבין הוכחה נתונה ולהוכיח משפט באופן עצמאי.
  - כתיבה פורמלית: כל טענה מנומקת היטב.

- חינוך לספקנות ולחשיבה ביקורתית באמצעות הוכחה מחד ובדיקת היתכנות מאידך.
- העלאת שאלות החושפות תופעות מפתיעות ובעלות השלכות על תכונות כלליות של צורות גאומטריות. שאלות כאלה אף מסייעות לפיתוח יצירתיות במתמטיקה שכן הן מעודדות יצירת פתרונות שונים לאותה בעיה, העלאת השערות שונות וניסוח הוכחות שונות לאותה טענה.
- חשיפת תופעות שאינן מובנות מאליהן ולכן מחזקות את התובנה שיש צורך בהוכחה.
- הקדמת תכנון לביצוע, הן בתכנון בניות גאומטריות והן בתכנון הוכחות שיש להן שלבים אחדים: הכרת דרכים שונות, ישירות ועקיפות, להוכחה והפרכה, בחינה סכמטית של מספר דרכי ההוכחה ובחירה באלגנטית/ הקצרה שבהן.
- הבחנה בין שימוש בדוגמאות, אי-דוגמאות ודוגמאות נגדיות להוכחות כלליות.
- פיתוח קישוריות: בתוך הגאומטריה (למשל, על ידי הוכחות בדרכים שונות) ובין הגאומטריה לבין נושאים אחרים (למשל שימוש באלגברה בשרות הגאומטריה ולהיפך, עיסוק בממוצעים דרך נושאי לימוד שונים).
- היכרות בסיסית עם סביבות גאומטריות דינמיות המאפשרות חקר וגילוי קשרים גאומטריים. היכרות עם טכנולוגיות עזר לפתרון בעיות מתמטיות.
- פרק הגאומטריה משמש בסיס לנושאים נוספים בתכנית הלימודים: גאומטריה אנליטית, טריגונומטריה, גאומטריית המרחב, וקטורים ולנושאים שונים מחוץ למתמטיקה (למשל אופטיקה, אומנות, ארכיטקטורה).

דגשים בהקשר לנלמד בחט״ב

התכנית בגאומטריה נלמדת כהמשך לתכנית הגאומטריה בחטיבת הביניים שתכניה והדגשים שבה עברו שינוי. בתכנית חט״ב הוכנסו תכנים חדשים כמו הוכחות בדרך השלילה ובניות גאומטריות בסרגל ובמחוגה. לצד התכנים החדשים הושם דגש על כמתים כגון לכל וקיים, על הבחנה בין משפט למשפט הפוך, על דרכי הוכחה והפרכה. לעומת זאת, תכנים שהיה נהוג ללמד בחט״ב נדחו לחטיבה העליונה (מעגל ודמיון משולשים בגישה היסקית). לתשומת לב מיוחדת ראויה העובדה שהתלמידים עסקו בדמיון משולשים כבר בכיתה ח, כאשר הגישה ללימודי הגאומטריה עדיין לא הייתה היסקית. למעשה הם מסיקים דמיון בין משולשים על סמך שוויון בין זוויות מתאימות, למרות שלא הוכיחו אף משפט של דמיון משולשים.
בכתיבת התכנית הבאנו בחשבון את התכנים החדשים בתכנית הגאומטריה של חט״ב כנזכר לעיל, תכנים בגאומטריית המרחב ועוד. כדי לשמר תכנים אלה ישולבו בהוראה פעילויות העוסקות בבנייה, בכמתים ובגופים מרחביים (מדובר בפעילויות שאינן דורשות שימוש במשפטים של גאומטריית המרחב שיילמדו רק בכיתה י״ב). דוגמה לשאלות כאלה מופיעה בפרק דמיון משולשים.

תכנים

יילמדו שלושה נושאים עיקריים: מקומות גאומטריים ונקודות מיוחדות במשולש, המעגל ודמיון משולשים (ניתן גם להחליף את הסדר וללמד את פרק דמיון משולשים לפני פרק המעגל).

1. מקומות גאומטריים ונקודות מיוחדות במשולש: מעגל, אנך אמצעי, חוצה זווית ועוד.
2. משפט חפיפה רביעי.
3. המעגל: הגדרתו כמקום גאומטרי, קשתות זוויות ומיתרים במעגל, משפטים הדנים ביחסים ביניהם, משיק למעגל ומשפטים הנוגעים לו, בניות (מרכז מעגל נתון, משיק למעגל מנקודה על המעגל ומנקודה שאינה על המעגל).
4. פרופורציה ודמיון משולשים: משפט תאלס, המשפט ההפוך לו והמשפטים הנובעים מהם, משפטי הדמיון של משולשים, בניות הקשורות בדמיון משולשים (למשל, חלוקת קטע ביחס נתון).
5. משפט חוצה הזווית הפנימית במשולש.
6. דמיון משולשים במעגל.

בפרק הדוגמאות שבנספח 2 מוצגים ניתוח והרחבה של שאלות בחינת בגרות משנים קודמות בדגש על תכנים רצויים בשאלות אלה או בשינויים המוצעים; בשאלות משולבות דוגמאות של בעיות תלת-ממדיות שניתן לפתור בעזרת גאומטריית המישור.

בנספח 3 מוצגת רשימת המשפטים הנוכחית בגאומטריה מאתר המפמ״ר בציון המשפטים הנלמדים בחט״ב, משפטים הנלמדים בתכנית החדשה (בכיתה/כשיעורי בית) ומשפטים שהוצאו מן התכנית.

מקומות גאומטריים, נקודות מיוחדות במשולש ומשפט חפיפה רביעי (10 שעות)

1. מעגל הוא אוסף הנקודות שמרחקיהן מנקודה נתונה שווים לגודל נתון.
2. אנך אמצעי לקטע הוא אוסף הנקודות שמרחקיהן מקצות הקטע שווים זה לזה.
3. חוצה זווית הוא אוסף הנקודות שמרחקיהן משתי שוקי הזווית שווים זה לזה.
4. ישרים מקבילים כמקום גאומטרי.
5. שלושת האנכים האמצעיים במשולש נפגשים בנקודה אחת. נקודה זו היא מרכז המעגל החוסם את המשולש.
6. שלושת חוצי הזוויות במשולש נפגשים בנקודה אחת. נקודה זו היא מרכז המעגל החסום במשולש.
7. שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת. נקודה זו מחלקת כל תיכון לשני חלקים שהיחס ביניהם 2:1 כשהחלק הגדול ליד הקדקוד והוא ״מרכז הכובד״ של המשולש.
8. שלושת הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת.
9. לכל משולש אפשר לבנות מעגל שעובר דרך קדקודיו (מעגל חוסם).
10. בכל משולש אפשר לבנות מעגל שמשיק לצלעותיו (מעגל חסום).
11. תרגול מציאתו של מרכז מעגל חוסם ומרכז מעגל חסום באמצעות סרגל ומחוגה ו/או תוכנה דינמית.

הערות

1. בכל המקרים יודגש שלצורך הוכחה שקבוצת נקודות היא מקום גאומטרי, יש להוכיח את שני הכיוונים:
   - כל נקודה במקום הגאומטרי מקיימת את התכונה.
   - כל נקודה שמקיימת את התכונה שייכת למקום הגאומטרי.
2. מדובר בפרק ראשון בגאומטריה בכיתה י, ולכן יש להדגיש מיומנויות של כתיבת הוכחה.
3. יש לציין את ההבחנה בין משפט למשפט הפוך.

משפט חפיפה רביעי

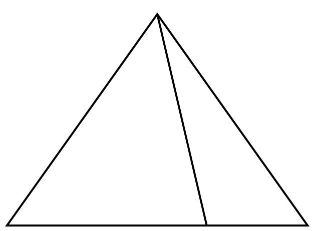
אם בשני משולשים שתי צלעות שוות בהתאמה, והזוויות מול הצלעות הגדולות מבין השתיים שוות – אזי המשולשים חופפים.

לעומת זאת, אם בשני משולשים שתי צלעות שוות בהתאמה, והזוויות מול הצלעות הקטנות מבין השתיים שוות – אזי לא ניתן להסיק שהמשולשים חופפים .

זו דוגמה יפה לצורך בדיוק במשפט ובהוכחה – האינטואיציה שפיתחנו ממשפטי החפיפה הקודמים אינה מספיקה כאן ועלולה להכשיל.

חשוב להכיר דוגמה פשוטה:

במשולש שווה שוקיים כל קטע מקדקוד הראש לנקודה פנימית בבסיס שאינה אמצע הבסיס, מחלקת את המשולש לשני משולשים חופפים השווים בשתי צלעות ובזווית שמול הצלע הקטנה ביניהן.



לא

אם בשני משולשים שתי צלעות שוות בהתאמה, והזוויות מול הצלעות הקטנות מבין השתיים שוות – קיימות שתי אפשרויות: או שהמשולשים חופפים או שהמשולשים אינם חופפים, והזוויות שמול הצלעות הגדולות מבין השתיים משלימות ל-180°.

הערה: משפט החפיפה הרביעי כלול בתוכנית הלימודים לחטיבת הביניים, אך הנושא לא טופל בהעמקה. בפרט חשוב לחזור אל משפט החפיפה הרביעי ואל המצב שבו לא מתקיימת חפיפה בעת למידת משפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים בכיתה י״א.

מיומנויות: לבנות משולש לפי שתי צלעות וזווית מול הצלע הגדולה ולפי שתי צלעות וזווית מול הצלע הקטנה.

המשפט ההפוך למשפט פיתגורס

משולש בו סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית הוא ישר זווית.

המעגל (20 שעות)

1. קשתות, זוויות ומיתרים במעגל

הגדרות

- מעגל: קבוצת כל הנקודות שמרחקן מנקודה מסוימת שווה לאורך מסוים קבוע, נקראת מעגל. הנקודה היא מרכז המעגל, והאורך הקבוע הוא אורך הרדיוס.
- רדיוס המעגל: קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה על המעגל.
- מיתר: קטע המחבר שתי נקודות על המעגל.
- קוטר המעגל: מיתר העובר דרך מרכז המעגל.
- קשת: חלק מהמעגל המוגבל על ידי שתי נקודות (שתי נקודות שעל מעגל מחלקות אותו לשתי קשתות).
- זווית מרכזית: זווית שקדקודה במרכז המעגל ושוקיה רדיוסים.
- זווית היקפית: זווית שקדקודה על היקף המעגל ושוקיה חותכים את המעגל.

משפטים

- במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו רק אם הקשתות הנשענות עליהן שוות.
- במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו רק אם המיתרים הנשענים עליהן שווים.
- האנך שיורד ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.
- ככל שמיתר במעגל גדול יותר, מרחקו מהמרכז קטן יותר.
- זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית המונחת על אותה קשת.

מסקנות

- לזוויות היקפיות שוות במעגל קשתות שוות ומיתרים שווים.
- לקשתות שוות מתאימות במעגל זוויות היקפיות שוות.
- זווית היקפית שנשענת על קוטר היא זווית ישרה.
- במרובע החסום במעגל סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא 180°.
- להסיק משפט הפוך: מרובע שסכום כל זוג זוויות נגדיות בו הוא 180°, ניתן לחסום במעגל.

2. משיק למעגל

הגדרה: משיק למעגל הוא ישר שיש לו נקודה משותפת אחת עם המעגל.

משפטים

- המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.
- ישר שמאונך לרדיוס בקצהו משיק למעגל.
- שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה, שווים זה לזה.

- מסקנה: במרובע שחוסם מעגל סכום כל שתי צלעות נגדיות שווה לסכום הצלעות הנגדיות האחרות.

- זווית הכלואה בין משיק ומיתר היוצאים מנקודה אחת שעל המעגל שווה לזווית ההיקפית הנשענת על הקשת הכלואה בין המשיק למיתר.

בניות

- למצוא מרכז של מעגל נתון.
- להעביר משיק למעגל מנקודה על המעגל.
- להעביר משיק למעגל מנקודה שאינה על המעגל.

הערות

- ניתן היה להגדיר את המשיק למעגל כישר שמאונך לרדיוס בקצהו, ולהוכיח שלמשיק יש רק נקודה משותפת אחת עם המעגל. זו הזדמנות לדון בהגדרות שקולות ובמבנה הלוגי של הגאומטריה.
- המשפטים על הניצבות של המשיק לרדיוס מזמנים שימוש בהוכחות בדרך השלילה. הוכחות אלו דורשות הסבר לוגי שאינו פשוט להטמעה והבנה, אך הן מהוות נדבך חשוב ביכולת ההוכחה בגאומטריה.

פרופורציה ודמיון משולשים (20 שעות)

משפטים

- משפט תאלס, המשפט ההפוך לו והמשפטים הנובעים משניהם.
- משפטי הדמיון של משולשים.
- היחס במשולשים דומים בין היקפים, תיכונים, חוצי זווית, גבהים ורדיוסי מעגלים חוסמים ומעגלים חסומים.
- היחס בין היקפים והיחס בין שטחים במצולעים דומים.
- משפט חוצה הזווית הפנימית במשולש.
- יש להכיר תכונות של קטעים פרופורציוניים, ולדעת לקבל יחסים חדשים מתוך יחסים נתונים. למשל, כשנתון היחס a/b= c/d לדעת להסיק בדרך אלגברית .a+b)/b = (c+d)/d)
- יש לזהות משולשים דומים ולזהות מהם החלקים הדומים, הוכחת הדמיון, מציאת יחס הדמיון, הסקת מסקנות חישוביות מתוך הדמיון.
- יש לפתח מיומנויות שימוש בדמיון משולשים בהוכחות.
- פרופורציות במשולש ישר זווית ובמעגלים יילמדו במסגרת התרגול.

בניות

- חלוקת קטע ל-n חלקים שווים.
- חלוקת קטע ביחס נתון.

דמיון משולשים במעגל

- יש לזהות משולשים דומים על סמך יחסים בין זוויות במעגל.
- ככלל, מסקנות מדמיון משולשים לא יילמדו כמשפטים שעליהם ניתן לבסס תרגילים אחרים, אלא ייחשפו במסגרת התרגול. משפטים שכדאי לחשוף במסגרת התרגול:
  - משפט על מיתרים נחתכים במעגל.
  - משפט על משיק וחותך שיוצאים מאותה נקודה.

- משפט על שני חותכים שיוצאים מאותה נקודה.

דגשים

- כאן נחזור ונדגיש שלמרות שהתלמידים מכירים את משפט הדמיון "זווית-זווית" יש להביא בחשבון שהמשפט לא נלמד בגישה היסקית, ולכן לא ניתן לבסס עליו הוכחות של משפטים. בפרט אין לבסס את ההוכחה של משפט תאלס על משפטי דמיון משולשים, כיוון שמשפט זה הוא הבסיס להוכחות של משפטי הדמיון.
- דמיון בין צורות הוא מושג שימושי, למשל בתכנון ובנייה של מודלים בתעשייה ובארכיטקטורה, בציור, בפיסול ועוד. יש לכלול דוגמאות שכאלה בתרגילים ובפרויקטים.

פונקציות טריגונומטריות ויישומיהן

סדר ההוראה של שני פרקי הטריגונומטריה (טריגונומטריה במישור ופונקציות טריגונומטריות) נתון לבחירת המורה

פונקציות טריגונומטריות (15 שעות)

מבוא

מטרת פרק זה היא להציג משפחה חדשה של פונקציות שלא מוגדרות על ידי מניפולציה אלגברית (לקחת מספר ממשי ולהפעיל עליו פעולות חשבון כלשהן) אלא על ידי מניפולציה גאומטרית. התכונה העיקרית של פונקציות חדשות אלה היא המחזוריות שלהן. מחזוריות היא תכונה הנצפית בתופעות טבע רבות. התיאור המתמטי של פונקציות מחזוריות מאפשר מידול תופעות אלו וכן הבנה טובה יותר שלהן ושל תכונותיהן והשלכותיהן.

בפרק המבוא נלמד תכונות בסיסיות של פונקציות אלה. במקביל נלמד על השימוש בפונקציות אלה בפרק הטריגונומטריה במישור (בידי המורה הבחירה כיצד להציג לראשונה את הפונקציות הטריגונומטריות - בתוכנית מוצגת האפשרות בה הצגת הפונקציות הינה בפרק המבוא). בפרקים הבאים (שיילמדו בכיתות י"א-י"ב) נלמד את התכונות הדיפרנציאליות והאינטגרליות שלהן. בנוסף נלמד נושאים רבים ושונים שמשתמשים בהם בפונקציות טריגונומטריות (למשל בגאומטריית המישור והמרחב ובמספרים מורכבים).

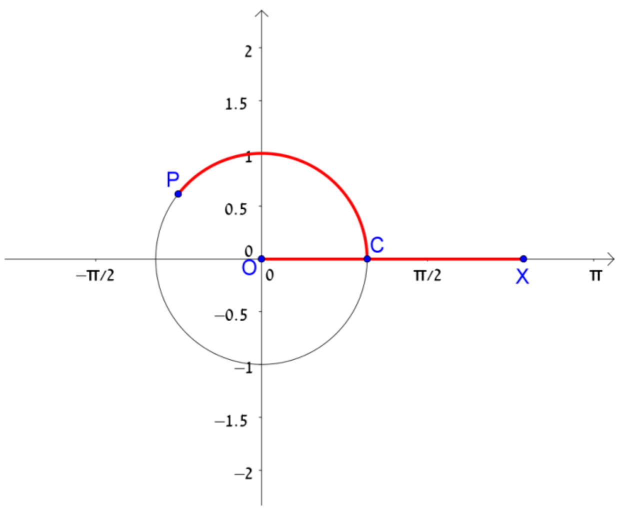
דגשים

- גזירת תכונותיהן של הפונקציות הטריגונומטריות מתוך הגדרותיהן על מעגל היחידה.
- לחילופין, ניתן גם להשתמש בהגדרת הפונקציות במשולש ישר זווית והרחבת ההגדרה לזוויות שאינן חדות, ולאחר מכן להגיע מכך לנושא המחזוריות.
- בכל מקרה בסוף כיתה יוד התלמידים יבינו את נושא המחזוריות ככלל ושל פונקציות טריגונומטריות בפרט.
- אפיון הפונקציות הטריגונומטריות כפונקציות מחזוריות.
- הצגת הבעייתיות החישובית למציאת ערכי הפונקציות הטריגונומטריות.
- מעבר בין ייצוגים שונים של הפונקציות הטריגונומטריות (על מעגל היחידה, גרף של פונקציה, יחסים במשולש ישר זווית).
- תכונות סימטריה של הפונקציות הטריגונומטריות והאינווריאנטיות שלהן ביחס לטרנספורמציות מסוימות.
- שימוש בכלי המתמטי החדש:
  - פתרון בעיות בגאומטריית המישור.
  - מידול תופעות מחזוריות.

תכנים

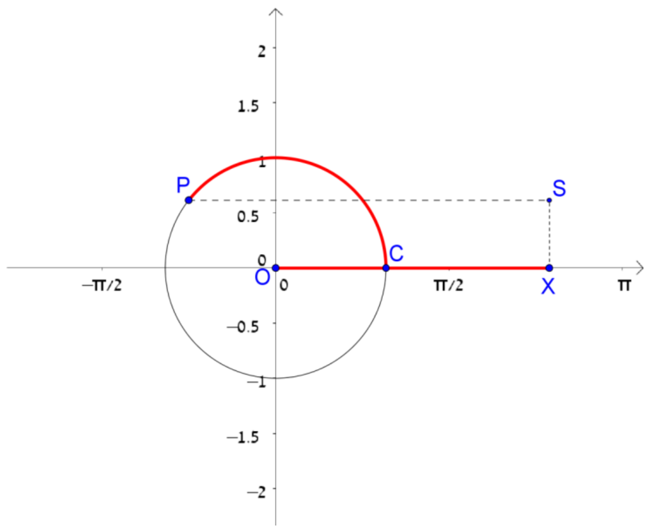
- הגדרה והסקת תכונותיהן של הפונקציות הטריגונומטריות מתוך הגדרותיהן על מעגל היחידה ואפיון הפונקציות הטריגונומטריות כפונקציות מחזוריות.
- הצגת ייצוגים שונים של הפונקציות הטריגונומטריות על מעגל היחידה כגרף של פונקציה וכיחסים בין צלעות במשולש ישר זווית.
- הכרת תכונות הסימטריה של הפונקציות הטריגונומטריות.
- היכרות עם משוואות וזהויות טריגונומטריות בסיסיות; קישור ודגש על ההצגה הגרפית של המשוואות בייצוגים השונים וגזירת תכונות איכותניות של הפתרונות מתוכן.
- שימוש בדמיון משולשים להסקה על היחסים במשולש ויישומים פשוטים של דמיון ושל הפונקציות הטריגונומטריות בגאומטריה.

נגדיר את הפונקציות הטריגונומטריות הבסיסיות (קודם $cos\ cos\ (x)$, $sin\ sin\ (x)$ ואח״כ $tan(x)$) על מעגל היחידה באופן אופֶּרציונלי. במילים אחרות, כאשר ניתן מספר ממשי, נגדיר באופן גאומטרי את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבורו[3]. דרך אחרת היא להגדיר את הפונקציות הטריגונומטריות באופן דינמי כמתארות את תכונותיה של נקודה הנעה על מעגל היחידה. פונקציית הסינוס מתארת את השתנות שיעור ה-y של הנקודה כתלות במידת הסיבוב (הנמדדת במעלות). במסמך זה כלולה כרגע רק הדרך הראשונה.



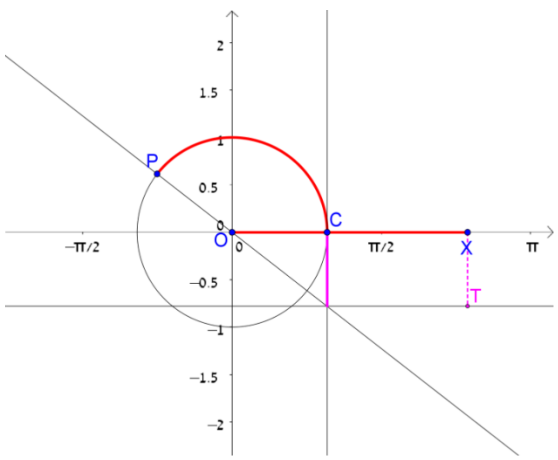
1. הגדרת נקודות על מעגל היחידה
   i. שלב ראשון הוא התאמה בין מספר ממשי לנקודה על מעגל היחידה. לכל מספר ממשי מתאימה נקודה על מעגל היחידה שמתקבלת באופן הבא: אם המספר הממשי חיובי, מלפפים על מעגל היחידה נגד כיוון השעון קשת שאורכה כמידת המספר הממשי החל בנקודה (1,0). אם המספר הממשי שלילי, עושים את אותה פעולה אלא שהפעם הליפוף הוא עם כיוון השעון. יש לבסס את ההגדרה באמצעות תרגול מתאים (ראו לדוגמה ״פונקציות טריגונומטריות״ מאת אורי רימון, חנה פרל וסטלה שגב עמ׳ 1-10).
   אפשר להשתמש באורך קשת על מעגל לפי החלק היחסי בלי שימוש במעלות ובלי לציין את המילה ״רדיאן״ כדי לא ליצור בלבול בשלב מוקדם זה. ידוע כי היקף מעגל היחידה הוא 2π וקשת שמתאימה לרבע מעגל היא רבע של 2π.
   ii. לכל מספר ממשי מתאימה נקודה יחידה על מעגל היחידה. לעומת זאת, לכל נקודה על מעגל היחידה יש אינסוף מספרים ממשיים שנקודה זו מתאימה להם. אם הנקודה P מתאימה למספר ממשי X, אזי היא מתאימה לכל מספר ממשי מהצורה $X+2\pi k$ לכל k שלם.

[3] ראו למשל אנליזה 4 ו-5 יח"ל, כרך ראשון מאת אנה ספרד, חנה פרל, פרופ' שמשון עמיצור ופרופ' מיכאל משלר, הוצאת המרכז הישראלי להוראת המדעים, האוני' העברית בירושלים, פרקים 10-11.



2. נגדיר את הפונקציה $sin\,sin\,(x)$ כפונקציה שמתאימה לכל מספר ממשי את שיעור ה-Y של הנקודה P על מעגל היחידה שהוגדרה לעיל.
נסיק ישירות מתוך ההגדרה באמצעות כלים גאומטריים את תכונות המחזוריות והסימטריה של פונקציית הסינוס. לדוגמה $sin(-x) = (x)$ וכו'.
3. באותו אופן נגדיר את $cos\,cos\,(x)$ כפונקציה שמתאימה לכל מספר ממשי את שיעור ה-X של הנקודה P על מעגל היחידה שהוגדרה לעיל. גם כאן נסיק ישירות מההגדרה את תכונות המחזוריות והסימטריה של פונקציית הקוסינוס.
4. נציג באופן גרפי את שתי הפונקציות $sin\,sin\,(x)$ ו- $cos\,cos\,(x)$ ונראה את הקשרים ביניהן, כולל הזזות מתיחות וכיו"ב (ראו דוגמאות).
הסקה של הזהויות $sin^2x + cos^2x = 1$

$$\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cosx$$



5. נגדיר את הפונקציה $tan(x)$ באמצעות הישר המשיק למעגל היחידה בנקודה (1,0). נלמד את תכונות הפונקציה וייצוגה הגרפי.
הערה: הגדרת פונקציית ה- tan(x) היא הזדמנות נוספת לדון בנושא הגבול ובנושא של פונקציות המוגדרות על קבוצות חלקיות לישר הממשי. כאן ניתן לדון בהצגת גבולות אינסופיים, גבול מימין ומשמאל וכהעשרה להבחין בין אי-קיום גבול (למשל בפונקציות מחזוריות כאשר x שואף לאינסוף) לקיום של גבול אינסופי.
6. נוכיח בעזרת דמיון משולשים את הקשר $tan\,tan\,(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$ (השימוש בדמיון מהווה הכנה לסעיף שימושים של הפונקציות הטריגונומטריות בפתרון בעיות בגאומטריית המישור).
7. נלמד איך מחשבים את הערכים של הפונקציות הטריגונומטריות, מה מספר לנו המחשבון.
8. נזכיר כי יש פונקציות מחזוריות שאינן פונקציות טריגונומטריות פשוטות תוך שימת דגש על תופעות מחזוריות בחיי היום-יום: למשל, תנועת כדור הארץ, הירח, כוכבי הלכת, זרם חילופין בחשמל, שעון מטוטלת, ריצה באצטדיון או במסלול מְרוצים שיש להקיפו מספר פעמים ועוד, ראו גם תרגילים בנספח 2 (ניתן להקדים את הפרק הזה להגדרת הפונקציות הטריגונומטריות)

9. נלמד משוואות וזהויות טריגונומטריות בסיסיות:
   i. ערכים של הפונקציות הטריגונומטריות במספרים ממשיים מיוחדים ($\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$).
   ii. אפיון קבוצת התמונות של הפונקציות הטריגונומטריות (התנאים לקיום פתרון במשוואות מהסוג $sin\,sin\,(x) = a$, $cos\,cos\,(x) = b$, $tan\,tan\,(x) = c$).
   פתרון משוואות מהצורה $A \cdot sin(a \cdot x + b) + B = 0$, $C \cdot cos(c \cdot x + d) + D = 0$) וכן $E \cdot tan\,tan\,(e \cdot x + f) + F = 0$.
   פתרון המשוואות שצוינו לעיל. פתרון כללי ופתרון בתחום חלקי וקישור להצגתן הגרפי של פונקציות אלה.
   iii. פתרון משוואות פשוטות בעזרת הזהויות המקשרות בין סינוס קוסינוס וטנגנס.

טריגונומטריה במישור כולל משוואות טריגונומטריות (15 שעות)

מבוא

בפרק זה נרחיב את השימוש בזהויות ונעסוק בצורות גאומטריות במישור.

תכנים

1. שימוש בנוסחה לחישוב שטח משולש: $s=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot sin\ sin\ \gamma$. הנוסחה דורשת הוכחה עבור משולש חד זוויות וקהה זווית.
2. משפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים ושימושיהם. את משפט הסינוסים ניתן להוכיח בעזרת מעגל או להוכיח במשולש ולהוכיח בהמשך את השוויון $\frac{a}{sin\alpha}=2R$ בעזרת מעגל.
3. קישור בין פתרון בעיות גאומטריות להכרה איכותית של הפונקציות הטריגונומטריות. לדוגמה, אם מגיעים לביטוי $ksin2\alpha$, המייצג אורך קטע, אפשר להסיק שהביטוי יקבל מקסימום כאשר $\alpha=45°$ או $\alpha=135°$, מבלי להשתמש בגזירה. בדומה, בביטוי המייצג יחס בין צלעות ניתן לקבוע מגבלה על היחס, על סמך התכונות של הפונקציות הטריגונומטריות.
4. שימושים של המשפטים הטריגונומטריים להוכחת משפטים וטענות בגאומטריה.

דגשים

- השימוש בטריגונומטריה יאפשר מחד חישובי גדלים ומאידך יהווה כלי עזר להוכחת טענות במישור ובמרחב, בעזרת זהויות טריגונומטריות בסיסיות או בעזרת חישובים טריגונומטריים, לצורך הוכחת שוויון בין קטעים, שטחים, נפחים, ושוויון זוויות.
- יש להבחין בין חישובים שיכולים להיות מקורבים, למשל $sin45°=0.707$, לבין הוכחות של טענות כלליות בגאומטריה, בהן נדרש דיוק בחישוב, ובהן חייבים להשתמש ב- $sin45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- ייעשה שימוש בטריגונומטריה כדי להמחיש משפטים גאומטריים, כמו חשיבות השימוש בזווית מול הצלע הגדולה מבין השניים במשפט חפיפה רביעי, תכונות וקשרים במצולעים משוכללים חוסמים וחסומים במעגל, תכונות במעגל.
- התרגילים יטפלו גם במצבים של עודף נתונים או חוסר נתונים, כשיידרש מהתלמיד לבצע בקרה אחרי שלבי התקדמותו בתרגיל. תידרש מהתלמיד ההבנה שאם חסר נתון, יש להגדירו כפרמטר ולבטא את התוצאה בעזרתו, ואם יש עודף נתונים, יש לבדוק אם לא נוצרת סתירה.
- יושם דגש על בקרת התוצאות ובקרה על סדרי גודל. כשכל הקטעים בבעיה הנתונה מבוטאים על ידי פרמטרים, כדאי לעשות בקרת מימדים ויחידות, כלומר לוודא שהתוצאה אכן מייצגת אורך, שטח או נפח.
- יודגש ההבדל בין זהות למשוואה.
- ההוראה תשולב ביישומונים במקומות מתאימים.
- יושם דגש על ריבוי דרכי פתרון. הנסיון לפתור תרגיל בדרכים שונות מרגיל את התלמיד לחפש פתרונות באמצעים שונים וגורם לקישור בין נושאים שונים. למשל, בהוכחת משפט הסינוסים יש להפנות את התלמידים לקרוא בבית הוכחה שלא נעשתה בכיתה בכדי להדגיש את קיומן של מספר הוכחות אפשריות תוך עידודם למצוא הוכחות נוספות. בספרי הלימוד יכללו לפחות שתי הוכחות שונות במהותן.

נספח 1: מקומן של ההוכחות בתוכנית הלימודים

הוכחות הן מרכזיות בתכנית הלימודים ברמת 5 יחידות לימוד והן משולבות בכל נושאי הלימוד שלה. יש ביטוי לכך גם ברציונל של התכנית בתחילת מסמך זה. בנספח הנוכחי נעמוד על היבטים מרכזיים הקשורים להוכחות אשר מתבטאים לאורך התכנית בכלל, ובפרקים כגון הוכחה באינדוקציה מתמטית בפרט.

קיימות הפניות מהנספח אל מקומות רלוונטיים בתכנית וקיימות הפניות מתוך התכנית אל סעיפי הנספח.

דגשים קשורים להוכחות שרצוי להדגיש בספרי הלימוד ובהוראה

1. במתמטיקה, טענה מתקבלת כנכונה רק אם יש לה הוכחה.
2. מטרה מרכזית של הוכחות בתוכנית הלימודים ברמת 5 יח"ל היא להסביר מדוע הטענה נכונה. לעיתים קרובות הבנת הסיבות מדוע הטענה נכונה מבססות קשרים בין האובייקטים המתמטיים המעורבים בה. מסיבה זו יש להעדיף תמיד הוכחות מסבירות על פני הוכחות שרק מאשרות שהטענה נכונה. באותה רוח נציין שיש לשים דגש על בניית שרשרת היסקית נכונה תוך שילוב של כל הנימוקים הדרושים, ולא בהכרח על הכתיבה הפורמלית .
3. חשוב לפתח אצל התלמידים מיומנויות שונות הקשורות בהוכחה :
   - להתנסות בפירוש הוכחות המוצגות ע"י אחרים (המורה בכיתה, ספר לימוד, חברים במהלך דיון).
   - להתנסות בבנייה של הוכחות, הן בתרגילים שבהם ההוכחה היא לב התרגיל, והן בהצדקה של שיקולים שהתלמיד מעלה במהלך דיון. לשם כך חשוב שמשימות רבות המוצגות לתלמידים ידרשו הוכחה או הצדקה.
   - להבחין בין שיקולים נכונים ושגויים במהלך ההוכחה, ובפרט :
     - לזהות הנחות בלתי-מוצדקות,
     - לזהות שיקולים מעגליים,
     - לזהות מצבים בהם לא מתקיימים התנאים של משפט בו משתמשים.
4. כדי שתלמידים יוכלו לעקב אחרי הוכחה הם חייבים לפרש את הטענה. ניתן להשיג זאת על ידי הצגת הטענה באמצעות דוגמאות (גם דוגמאות שהתלמידים יוצרים בעצמם) וגם על ידי ניסוחה במילים של התלמיד.
5. חשוב שהתלמידים יפנימו את הרעיון שהוכחה תקפה לגבי כל המקרים בהם מתקיימים תנאי הטענה. במילים אחרות : לטענה שהוכחה אין יוצאים מן הכלל ולא יכולה להיות דוגמה נגדית.
6. תכנית הלימודים מעודדת חקר והכללות, המבוססות על חקירת מקרים פרטיים אך בינתיים לא הוכחו אלא נוסחו כהשערות. על כן חשוב במיוחד לעורר ולחזק את המודעות למעמד של השערות : טענה היא בגדר השערה כל עוד לא הוכחה.
7. יש להסביר איך נושא ההוכחה מתקשר ללוגיקה : אין צורך להציג את הלוגיקה האבסטרקטית ואף לא את הטרמינולוגיה הקשורה בה, אך יש להציג את כללי הבסיס שמושג ההוכחה נגזר מהם, למשל
   1. אם "א" גורר "ב" ו-"ב" גורר "ג" אז "א" גורר "ג",
   2. אם "א" אז "ב" שקול ל: אם "לא ב" אז "לא א",
   3. יתכנו מקרים בהן "א" גורר "ב" אך "ב" אינו גורר "א" (כלומר, משפט לא גורר את המשפט ההפוך לו).

   כללי הלוגיקה האלה יוצגו במסגרת ההקשר שהצורך בהם עולה בו ולא כיחידה נפרדת.
8. באופן דומה יש להציג את תפקידן של ואת חשיבותן של דוגמאות נגדיות ובהקשר זה לבנות את הבסיס להוכחה על דרך השלילה. כדאי להדגיש שהרעיון של הוכחה בדרך השלילה הוא להראות שאם הטענה לא נכונה מתקבל אבסורד – אם הטענה איננה נכונה ניתן להוכיח טענה אחרת שידועה כשגויה.
9. הנושא אינדוקציה מתמטית נפתח ביחידת מבוא המציגה את רעיון ההוכחה תוך כדי הדגמה והתנסות. חשוב להציג את הנושא באמצעות דוגמאות פשוטות כדי להפנות את הקשב של התלמיד לרעיון ההוכחה, ללא הפרעה של חישובים אלגבריים מורכבים. יש לדאוג שצורת הוכחה זו תופיע בהמשך בתחומים רבים ככל שניתן.
10. הוכחות בדרך השלילה נחשבות ככלי מתמטי חשוב אך לא אינטואיטיביים. הטמעת כלים אלה בהלך החשיבה של התלמידים דורשת זמן ומאמץ.
11. דיון בתפקידן של דוגמאות :

- דוגמה תומכת (מקיימת את תנאי הטענה וגם את התוצאה שלה): דוגמאות תומכות חשובות בשיח המתמטי. הן מחזקות השערות ומעודדות להמשיך לחקור ולחפש הוכחה. יחד עם זאת חשוב לחזור ולחזק את המודעות שעם כל חשיבותן של הדוגמאות התומכות הן אינן מוכיחות טענות כלליות. הדיון בסוגיה זו חשוב כיוון שבשיקולים יומיומיים ואף במדעי הטבע, ממצאים אמפיריים כן משמשים כראיות.
- ניתוח של הסיבות שבגללן דוגמה תומכת מקיימת את הטענה לעיתים מאירה את הרעיון של ההוכחה הכללית.
- דוגמה נגדית (מקיימת את תנאי הטענה אך לא את התוצאה שלה) סותרת את הטענה ולכן מפריכה טענה.
- דוגמה שאינה מקיימת את התנאים של טענה איננה רלוונטית, וחשוב שתלמידים ידעו להבחין בינה לבין דוגמאות תומכות ודוגמאות נגדיות. ניתן להשיג זאת באמצעות שיפוט של דוגמאות, הן כאלו שתלמידים יוצרים במהלך דיון והן דוגמאות מוכנות.

12. לצד הדיון בטענות כלליות (טענות "לכל") יש לדון גם בטענות קיום שכדי להוכיח אותן מספיקה דוגמה אחת וכן בטענות המתייחסות למספר סופי של מקרים אותן ניתן להוכיח באמצעות בדיקת כל המקרים האפשריים.
13. רצוי להוכיח טענות בדרכים שונות במקרים שניתן ולהדגים בכך שאפשר ללמוד על מגוון שיקולים וקשרים מהוכחות שונות. יש לעודד תלמידים לחפש הוכחות אחרות, למשל הוכחות שנעשה בהן שימוש בסימטריה – שיקוף ו/או סיבוב.
14. אמנם לכל הטענות שבתכנית הלימודים יש הוכחות. יחד עם זאת לא ניתן להוכיח הכל במסגרת מספר השעות שעומדות לרשות לימודי המתמטיקה ובמסגרת המושגים המוכרים לתלמידים (למשל, התלמידים לא מכירים את ההגדרה הפורמלית של מושג הגבול). ההחלטה אם להוכיח טענה מסויימת או לא עשוייה להיות מבוססת על חשיבות הטענה וכן על היותה מסבירה או לא (ראו סעיף 2).
במקרים בהם לא מוכיחים טענה חשוב:

- לציין את העובדה שההוכחה קיימת
- להסביר מדוע לא הוכחנו (למשל: כאשר הכלים להוכחה אינם בהישג ידם של התלמידים או בגלל דמיון להוכחות שכבר הוצגו),
- חשוב גם לציין מקרים בהם הנימוק המצופה מתלמידים אינו מהווה הוכחה (למשל במקרה שמזהים אסימפטוטות בדרכים אמפיריות).
- להפנות תלמידים מתעניינים למקורות בהם מופיעה ההוכחה.

הערה: רצוי להפנות תלמידים מתעניינים לספרות בנושא מקומה של ההוכחה מתמטיקה מודרנית (בתחילת המאה ה-20 הילברט (Hilbert) סבר שניתן להוכיח או להפריך כל טענה וטענה במתמטיקה, אולם גדל (Gödel) הראה שאין זה כך), ולספרות המדגישה את העובדה שהמתמטיקה היא תחום הממשיך להתפתח כל העת, וטענות שהיו בגדר השערה משנות את מעמדן והופכות למשפטים מוכחים או לטענות שהופרכו.

נספח 2: דוגמאות לשאלות על פי נושאי הלימוד

הדוגמאות שלהלן מסמנות יעדים ומדגימות פעילויות שתואמות את הדגשים בתכנית החדשה ואת הערך המוסף שלה.

שוב נדגיש כי דוגמאות ו/או נושאים המצוינים כהעשרה לא ייכללו כנושאי חובה בתכנית, אך מצופה מהמורים להכירם ולהפנות את התלמידים המתעניינים לקריאה עליהם בספרי הלימוד.

כהעשרה מתמטית, תרבותית ומדעית, כמצוין בכמה דוגמאות, כדאי להפנות את התלמידים לקריאה על דמויות מרכזיות בפיתוח המתמטיקה הנלמדת, על התחומים שפיתחו וחשיבותם. רשימת המתמטיקאים/ המדענים שכדאי שיכירו את תרומתם: אוקלידס, דקארט, ניוטון, לייבניץ, הילברט, גדל, גלואה, פוינקרה, ברנולי, גאוס, פון-ניומן, פורייה, פרמה, ווילס, סמייל ועוד.

חשוב לציין שבנוסף לתרגילים המוצעים ברוח התכנית, יש לכלול תרגילים רגילים שיתרמו להבנה ולשליטה בחומר ויפתחו את היכולות הטכניות של התלמידים בהדרגה. בדרך זו הם יוכלו להתמודד עם רמת המורכבות בדוגמאות הנתונות (אין צורך לכלול תרגילים מאוד טכניים ברמת מורכבות גבוהה באופן משמעותי מהדוגמאות המובאות).

מבוא להנדסה אנליטית

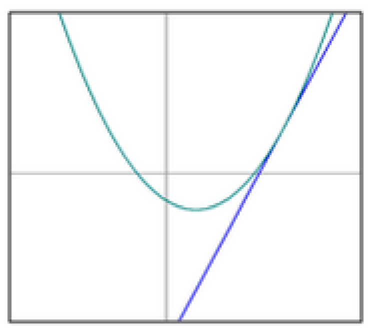
1. נתונה התבנית: $kx+(1-k^2)y=k^3-k$.

עבור אילו ערכים של k (אם קיימים ערכים כאלה; אם לא, נמקו) מייצגת התבנית:

- קו ישר שעובר דרך ראשית הצירים.
- קו יש שמקביל לציר ה-x.
- קו ישר שמקביל לציר ה-y.
- קו ישר שמאונך לישר 5+y=2x.
- קו ישר שחותך את ציר ה-y בנקודה (0,7).
- במידה שלא קיימים ערכים מתאימים באחד הסעיפים, הציעו דרך לשנות את התבנית כך שניתן יהיה למצוא ערכים מתאימים.

2. מעגל קנוני – נתון ריבוע חסום במעגל קנוני. אחד מקודקודי הריבוע הוא (3,4).
מצאו את משוואת המעגל ואת שאר קודקודי הריבוע.
3. פרבולה וישר: מתוך הפיצוח פרבולה לי, לו ולה (הפתרונות ללא שיקולי חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי)

2. היה או לא היה?



תום סרטט סקיצה לפרבולה:

$$y=ax^2+bx+c \quad (a,b\neq 0)$$

ומשיק לפרבולה:

$$y=2ax+b$$

תמר טענה שהאיור של תום לא יתכן.

מה דעתכם? האם ניתן ליצור פרבולה ומשיק אלו?
אם כן, עבור אילו ערכים של a, b ו- c .

אם לא, הסבירו מדוע.

מבוא לאנליזה של פונקציות

i. דוגמאות בספר "ללמוד וללמד אנליזה" בפרק פונקציות ממשיות (עמ' 30- 58).
ii. לדפי עבודה עם שימוש בטכנולוגיה:

משפחות של פונקציה חזקה הזזות ומתיחות (בצורה הקודקודית)

זוגיות ואי-זוגיות של פונקציה

השורש של פונקציית הישר והריבועית

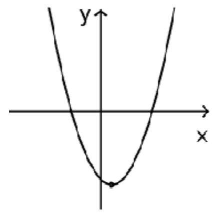
ההופכית לפונקציה לינארית

פונקציה הופכית לפונקציה ריבועית

פונקציה הפוכה

חשבון דיפרנציאלי

דוגמאות לשאלות איכותניות על פונקציה מורכבת (מתוך "ללמוד וללמד אנליזה.":)"



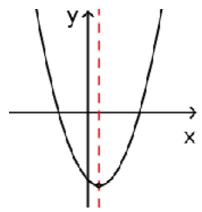
בסרטוט המצורף נתון גרף הפונקציה $f(x)=x^2-x-3$.

1. סרטטו באופן סכמתי את הגרפים של הפונקציות הבאות ללא טבלת ערכים:

1. $y=\sqrt{f(x)}$ ב. $y=2f(x)$. ג. $y=\left(f(x)\right)^3$.

2. גרף הפונקציה f סימטרי ביחס לישר $x=0.5$. האם תכונה זו נשמרת גם בשלוש הפונקציות האחרות של סעיף 1? הסבירו.

(מה כולל הסבר לשאלה מסוג זה? האם העובדה שבתחום שסרטטנו או בתחום המשתקף על צג המחשב גרף הפונקציה סימטרי ביחס לישר $x=0.5$ היא הצדקה מספיקה?)



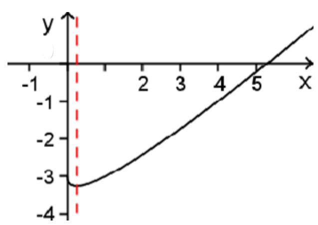
3. האם הגרף של כל פונקציה מורכבת שהפונקציה הפנימית שלה היא $f(x)=x^2-x-3$ סימטרי ביחס לישר 0.5 ? הסבירו.

4. נהפוך את כיוון ההרכבה כך שהפעם הפונקציה $f(x)=x^2-x-3$ היא חיצונית.

האיור המצורף מציג את גרף הפונקציה $k(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x}-3$.

מצאו, ללא שימוש בנגזרת, את שיעורי נקודת הקיצון.

הסבירו כיצד קבעתם את שיעור ה- x וכיצד קבעתם את שיעור ה- y .



דוגמאות לשאלות יישומיות המשלבות הרחבת הידע המדעי וניתוח איכותני, למשל דוגמאות מתוך הקורס בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של התכנית האמריקאית להסללה אקדמית AP:

https://secure-media.collegeboard.org/digitalServices/pdf/ap/ap-calculus-ab-and-bc-course-and-exam-description.pdf

1. על פי חוקי התנועה של ניוטון ידוע כי גובהו של כדור (המסומן להלן ב-y) כפונקציה של הזמן (מסומן להלן ב-t) שנבעט מהקרקע במהירות אנכית התחלתית (חיובית) v, נתון בנוסחה
$y(t)=vt-0.5*gt^2$; כאן g מסמל את תאוצת כוח הכבידה של כדור הארץ (g שווה בערך $9.8\ [m/s^2]$). ציירו את גובהו של הכדור כפונקציה של הזמן עד שהוא נוחת על הקרקע. מתי הכדור נוחת?
מהו הגובה המקסימלי שהכדור יגיע אליו? מתי מגיע הכדור לגובה המקסימלי? מהו גרף המהירות האנכית שלו כפונקציה של הזמן? (רמז: המהירות האנכית נתונה על ידי קצב השינוי של הגובה); מהו גרף התאוצה האנכית שלו, a, כפונקציה של הזמן (רמז: התאוצה היא קצב השינוי של המהירות).
הסיקו: מהו הכוח האנכי F הפועל על הכדור (נזכיר כי ma=F) (מה קורה אם נכפיל את מהירותו ההתחלתית האנכית של הכדור?)

2.

T (שעות)	0	1	3	4	7	8	9
L(t) (אנשים)	120	156	176	126	150	80	0

מכירת כרטיסים לקונצרט החלה בדיוק ב-12:00 בצהריים (t=0), וכל הכרטיסים נמכרו כעבור תשע שעות. נניח כי הפונקציה שמתארת את מספר האנשים

שמחכים בתור לקניית כרטיסים בזמן נתון היאL(t), גזירה פעמיים המוגדרת עבור $0\le t\le 9$. ערכים של L(t) בזמנים שונים נתונים בטבלה לעיל.

1. השתמשו בנתונים שבטבלה כדי להעריך את קצב השינוי של מספר האנשים שמחכים בתור בשעה 5:30 אחה"צ ($t=5.5$). הראו את החישובים שהובילו לתשובה והקפידו על יחידות מידה מתאימות.
2. השתמשו בסכום שטחי טרפזים בשלושה אינטרוולים כדי להעריך את המספר הממוצע של האנשים המחכים בתור ברגע נתון במשך ארבע השעות הראשונות שבהן נמכרו כרטיסים.
3. בתחום $0 \le t \le 9$. - מהו המספר המינימלי של הפעמים שבהן $L'(t)$ חייב להתאפס?

נמקו את טענתכם.

יש לתת את הדעת כי בדוגמה מובאת פונקציה בדידה, אך השימוש בכלי של מנת ההפרשים נותן אומדן על קצב השינוי של הפונקציה, וזהו ייצוג נוח ושימושי גם אם לא מדויק.

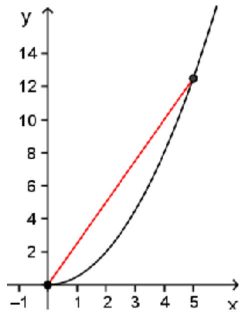
מבחינה היסטורית רבים מן הכלים המתמטיים פותחו כדי לתת לבעיות פיסיקליות תשובות בעלות תוצאות קרובות , ויש להדגיש פן זה.

דוגמה להצגת הנגזרת כקצב שינוי (מתוך "ללמוד וללמד אנליזה")

הנגזרת כקצב שינוי

פונקציית המהירות כנגזרת של פונקציית הדרך

רכב חייזרים נוסע לאורך מסילה. הפונקציה המתאימה לזמן הנסיעה x בשניות, את הדרך שעוברים החייזרים $f(x)$, היא $f(x)=2x^2$.



אין קושי למצוא את מהירות הנסיעה הממוצעת של רכב החייזרים ב- 5 השניות הראשונות לנסיעתם: במשך 5 שניות החייזרים נסעו 50 מטרים, ולכן מהירותם הממוצעת היא 10 מטרים בשנייה.

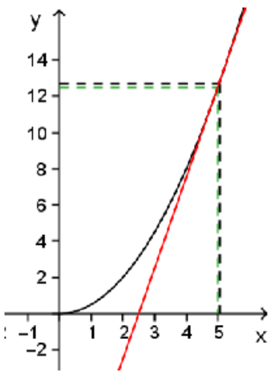
נוכל גם לחשב את המהירות הממוצעת בפרק זמן קצרצר:

נחשב את המהירות הממוצעת באלפית השנייה שלאחר השנייה החמישית.

הדרך שעברו החייזרים: $f(5.001)-f(5)=50.020002-50=0.020002$

המהירות הממוצעת בפרק זמן זה היא $\frac{0.020002}{0.001}=20.002$, והיא מיוצגת על-ידי שיפוע הישר שבאיור.

כיצד נחשב את המהירות הרגעית של רכב החייזרים?



נוכל לחשב את המהירות בפרקי זמן קצרים עוד יותר, ולבדוק מהו הערך אליו שואפת המהירות הממוצעת, כאשר משך זמן הנסיעה שואף לאפס.

במשך $5+h$ שניות, רכב החייזרים נוסע $f(5+h)=2(5+h)^2$ מטרים.

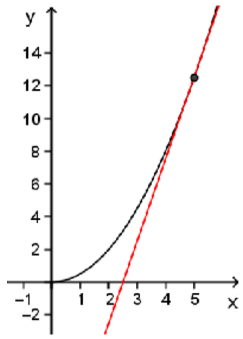
המהירות הרגעית בזמן $x=5$ היא הגבול של המהירות הממוצעת בפרק הזמן שבין 5 שניות לבין $5+h$ שניות, מתחילת הנסיעה כאשר $h\to 0$:

$$\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\frac{2(5+h)^2-2\cdot 5^2}{h}=\cdots=20+2h\xrightarrow[h\to 0]{}20 .$$

התהליך שעשינו הוא בדיוק חישוב הנגזרת של הפונקציה $f(x)=2x^2$ כאשר $x=5$.

נוכל להכליל:

אם f היא פונקציה המתארת את הדרך שעובר גוף מתחילת התנועה ועד לנקודת זמן x, אז ניתן לייצג את המהירות הממוצעת בפרק הזמן שבין $x = x_0$ לבין $x = x_0 + h$ כ-



$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

המהירות הרגעית ב- x_0 היא הגבול אליו שואפות המהירויות הממוצעות כאשר $h \to 0$:

הגבול שחישבנו זה עתה הוא בדיוק הנגזרת של הפונקציה f בנקודה x_0.

פונקצית הנגזרת של פונקציית הדרך היא פונקציית המהירות הרגעית.

מד המהירות במכונית מראה את המהירות הרגעית.

מהירות ממוצעת מדגימה קצב שינוי ממוצע, במקרה בו הפונקציה מתאימה לזמן הנסיעה את אורך הדרך. במקרה זה הנגזרת מייצגת את המהירות הרגעית.

אם הפונקציה $y = f(x)$ מתארת גידול של אוכלוסיית חיידקים ביחס לזמן, אז הביטוי $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ מתאר את קצב השינוי הממוצע בגודלה של אוכלוסיית החיידקים בפרק הזמן שבין $x = x_0$ לבין $x = x_0 + h$. המספר אליו שואף ביטוי זה כאשר $h \to 0$ מתאר במקרה זה את קצב השינוי של אוכלוסיית החיידקים, ברגע מסוים $x = x_0$.

במילים אחרות : אם הפונקציה $y = f(x)$ מתארת גידול של אוכלוסיית חיידקים ביחס לזמן, אז הנגזרת שלה מתארת את קצב השינוי של אוכלוסיית החיידקים בכל רגע נתון.

מה מתאר הביטוי $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ אם הפונקציה $y = f(x)$ מתאימה לזמן המילוי של בריכת מים את כמות המים בבריכה?

מה מתאר, במקרה זה, הגבול של הביטוי הנ"ל כאשר $h \to 0$?

דוגמאות לשאלות בסגנון "האם נכון ש...?")מתוך "ללמוד וללמד אנליזה("

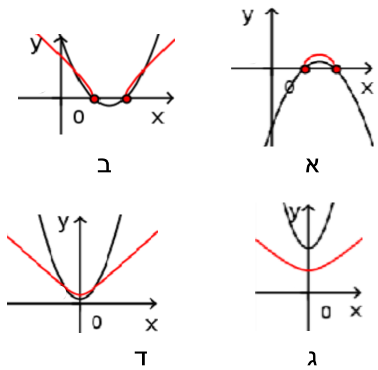
האם נכון ש...?

אם כן – הסבירו מדוע.

אם לא – הביאו דוגמה נגדית.

1. פונקציה $|f(x)|$ היא תמיד פונקציה זוגית.
2. פונקציה $f(|x|)$ היא תמיד פונקציה זוגית.
3. הגרף $y = |f(x)|$ עובר תמיד דרך ראשית הצירים.
4. הגרף $y = f(|x|)$ עובר תמיד דרך ראשית הצירים.
5. כל ערכי הפונקציה $|f(x)|$ הם אי-שליליים.

6. כל ערכי הפונקציה $f\left(|x|\right)$ הם אי-שליליים.



דוגמאות לשאלות בסגנון "הביאו דוגמה")מתוך "[ללמוד וללמד אנליזה]("(

7. לפניכם גרפים של זוגות של פונקציות שורש מורכבות (באדום) עם הפונקציות הפנימיות שלהן (בשחור). סרטטו במחשב זוגות של פונקציות המתאימים לכל אחד מן האיורים. תארו כיצד בחרתם את הפונקציה הפנימית בכל אחד מן המקרים.

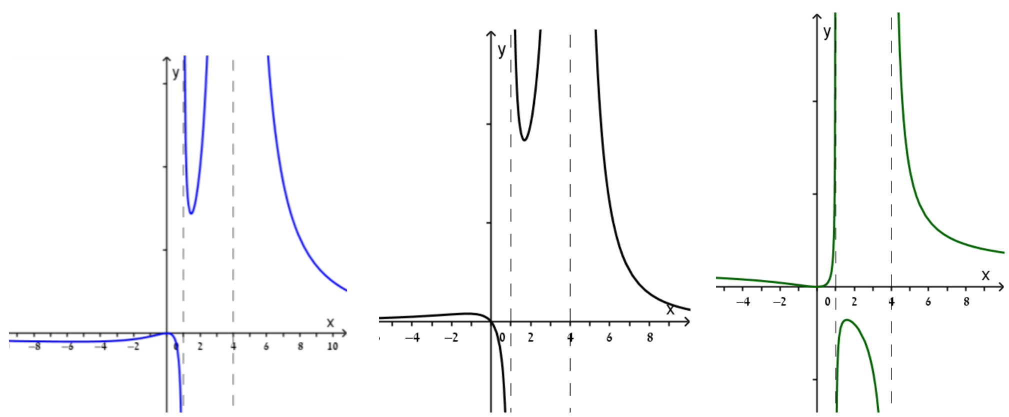
פונקציות רציונליות

1. מדגימה: נקודות אפס בריבוי זוגי ואי זוגי, שיקולים איכותניים במציאת נקודות פיתול, קשר בין פונקציה לנגזרותיה

הגרפים באיורים שלפניכם מתאימים לפונקציות

1. $\frac{ax^2}{(x-1)(x-4)^2}$ ב. $\frac{bx}{(x-1)(x-4)^2}$ ג. $\frac{cx^2}{(x-1)(x-4)}$

זהו איזה גרף מתאים לאיזו פונקציה



2. דגש: הסקת מסקנה איכותנית מאסימפטוטה אופקית

מקור: מנות קינוח לפונקצית מנה/ לאה דולב וללמוד וללמד אנליזה

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x-3)^2}{x^2-4}$. איזו מבין הטענות הבאות נכונה:

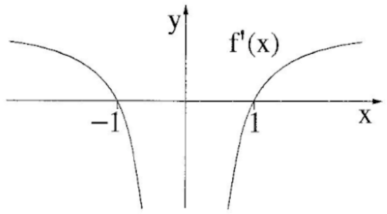
א. $\boxed{f\left(-\left(10^{100}\right)\right)<f\left(10^{100}\right)}$

ב. $\boxed{f\left(-\left(10^{100}\right)\right)=f\left(10^{100}\right)}$

ג. $\boxed{f\left(-\left(10^{100}\right)\right)>f\left(10^{100}\right)}$

3. השאלה מדגישה: סרטוט סקיצה של גרף על פי תיאור מילולי הכולל אסימפטוטות. זיהוי פרמטרים.

מקור: שאלון 35806 קיץ תשע"ד



בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

האסימפטוטה היחידה של הפונקציה $f(x)$ היא $x = 0$.

נתון כי יש פתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = 2$

ופתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = -2$.

א. רק על פי נתוני השאלה,

סרטט סקיצה של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ב. נתון גם כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא: $f'(x) = \frac{ax^2 - b}{ax^2}$,

a ו־ b הם פרמטרים שונים מ־ 0.

מצא את הפונקציה $f(x)$ (בלי פרמטרים).

דוגמאות לשימוש בטכנולוגיה

1. [טיול רציונלי ללונה פרק – חלק א]

מקור : המרכז הארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי

2. התנהגות פונקציה רציונללית בסביבת נקודת אי הגדרה. מקור : המרכז הארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי. [דף עבודה], [יישום דינמי]

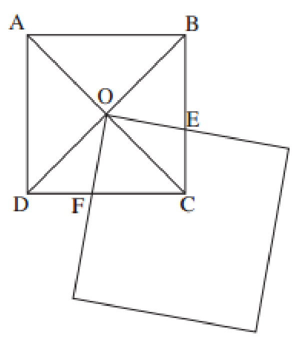
גאומטריה

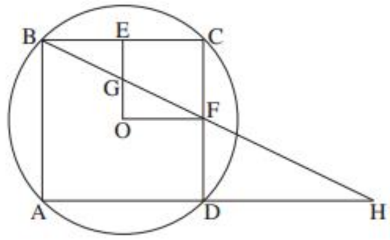
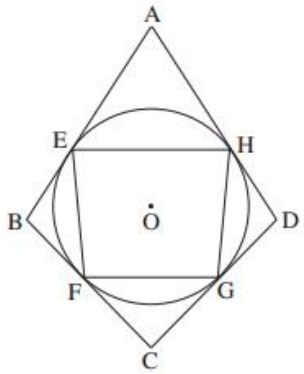
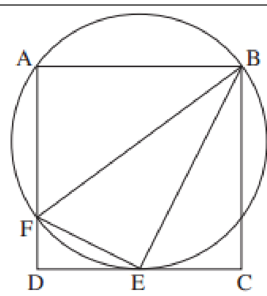
חלק א : דוגמאות לשאלות בגאומטריה 5 יח״ל על בסיס שאלות ממבחני בגרות.

רוב השאלות המוצגות כאן לקוחות מתוך שאלון 005 כיוון שהיה שאלון משותף לתלמידי 4 ו-5 יח״ל. בחלק מהשאלות מוצע להפחית סעיפי מדרגה או להוסיף סעיפים חדשים (כדאי לבדוק גם שאלונים המיועדים ל-5 יח״ל ולעבד משם שאלות. בטבלה זו יש דוגמה אחת בסוף).

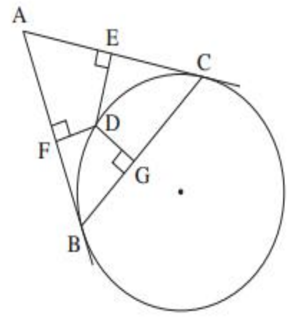
המטרות

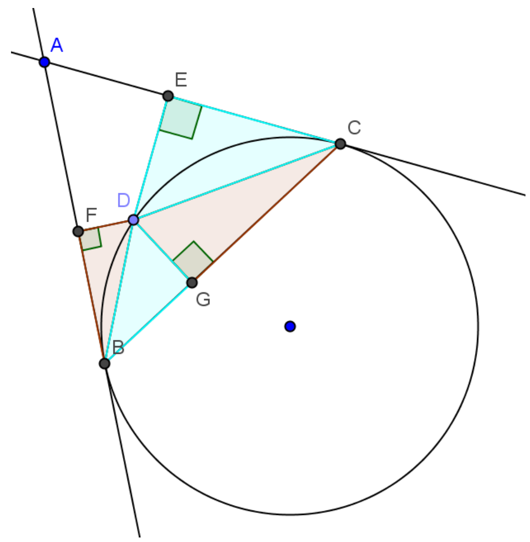
1. להראות שניתן לערוך שינויים קלים בשאלות באופן שיאפשר להעריך מיומנויות נוספות של תלמידים.
2. להדגים אפשרויות לעסוק בחקר בשגרת ההוראה מבלי לוותר על הכנת התלמידים לבחינות.
3. לשמר מיומנויות וידע שהתפתחו אצל תלמידים(הוכחות והפרכות/ כמתים/ בניות, כולל מיומנות הקדמת תכנון לביצוע).
4. להגיש בעיות מתמטיות באופן שמאפשר יצירתיות, מיומנויות של העלאת השערות ובדיקתן.

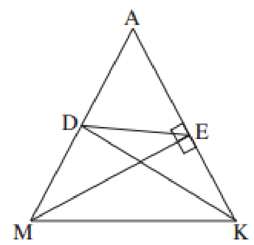
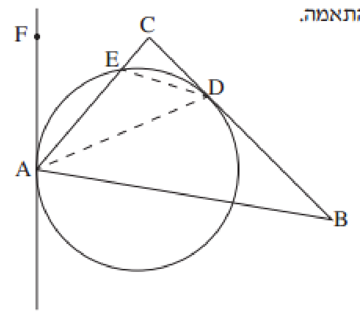
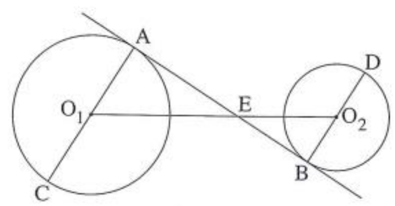
נושא + מקור	השאלה המקורית	הצעות שינוי	מה הדוגמה מדגימה
חפיפה, שטחים 005 קיץ תשע״ב	 4. נתון ריבוע ABCD. אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה O. בנקודה O נמצא קדקוד של ריבוע אחר. שתי צלעות סמוכות של הריבוע האחר חותכות את הצלעות BC ו- DC בנקודות E ו- F בהתאמה (ראה ציור). א. הוכח כי $\Delta OEC \cong \Delta OFD$. ב. נתון כי שטח הריבוע ABCD הוא 100 סמ״ר. חשב את שטח המרובע OFCE .	להוסיף סעיף (לשקול אם במקום סעיף א) : הוכיחו ששטח המרובע OECF אינו תלוי במיקומן של הנקודות E ו-F. להוסיף סעיף : האם הנתונים מאפשרים לחשב את שטח הריבוע השני? הסבירו.	זהו עיבוד לשאלת חקר יפה בבגרות שחושפת תופעה מפתיעה. הדגש כאן לא על השטח המספרי, אלא על כך ששטח המרובע OECF אינו תלוי במיקומן של הנקודות E ו-F.

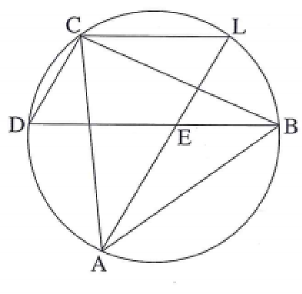
מעגל 005 חורף תשע"ד	- 4 - מתמטיקה, חורף תשע"ד, מס' 035005 + נספח  4. ריבוע ABCD חסום במעגל שמרכזו O . נקודה F נמצאת על הצלע CD ונקודה E נמצאת על הצלע BC כך ש- $OF \perp CD$ ו- $OE \perp BC$ (ראה ציור). א. הוכח כי המרובע ECFO הוא ריבוע. ב. הישר BF חותך את OE בנקודה G (ראה ציור). הוכח כי $EG = GO$. ג. המשך AD נפגש עם המשך BF בנקודה H (ראה ציור). (1) הוכח כי $\triangle BCF \cong \triangle HDF$. (2) מצא את היחס $\frac{EG}{DH}$.	במקום "הוכח" בסעיף ב לתת מספר שאלות מסוג הוכח או הפרך (ללא שימוש בטריגונומטריה) 1. $EG=GO$ 2. OC מאונך ל- EF לבקש יחס נוסף ?$EF:FD$	הוכיחו או הפריכו תשובה מסוג לא ייתכן.
משיק למעגל חורף תשע"ב	4. הצלעות של הדלתון ABCD $(AB = AD)$ משיקות למעגל שמרכזו O בנקודות E , F , G , H (ראה ציור). הוכח: א. $EF = GH$. ב. $EH \parallel FG$.  	להחליף את הדרישה ב- הוכיחו שהמרובע EHGF הוא טרפז שווה שוקיים או מלבן. אפשר להתחיל עם בעיית בנייה: נתון דלתון. האם ניתן לחסום בדלתון מעגל. אם כן, בנו את המעגל. אם לא, הסבירו מדוע. אפשר הפוך: לבנות דלתון שצלעותיו משיקות למעגל ואז הסרטוט דינמי.	אפשרות לחקר בגאוגברה התייחסות להגדרה: יש להבין שהפתרון צריך לכלול הסבר מדוע המרובע לא יכול להיות מקבילית. בניות?
משיק למעגל 005 מועד ב 2013	3. נתון ריבוע ABCD ונתון מעגל. הקדקודים A ו- B של הריבוע נמצאים על המעגל. הצלע DC משיקה למעגל בנקודה E . הצלע AD חותכת את המעגל בנקודה F (ראה ציור). א. הוכח: $\Delta EDF \sim \Delta BEF$. ב. נתון: האורך של רדיוס המעגל הוא 5 ס"מ $FD = 2$ ס"מ חשב את האורך של EF . ג. חשב את האורך של צלע הריבוע הנתון.  		הבחנה בין משפט למשפט ההפוך לו (במקרה זה, המשפט על זווית שנשענת על קוטר) על ידי שימוש בשניהם בפתרון אותה שאלה.

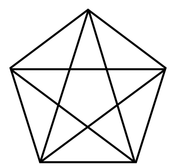
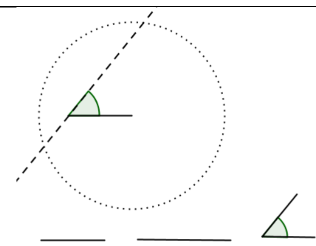
<table dir="rtl">
<tr>
<td>משיק למעגל

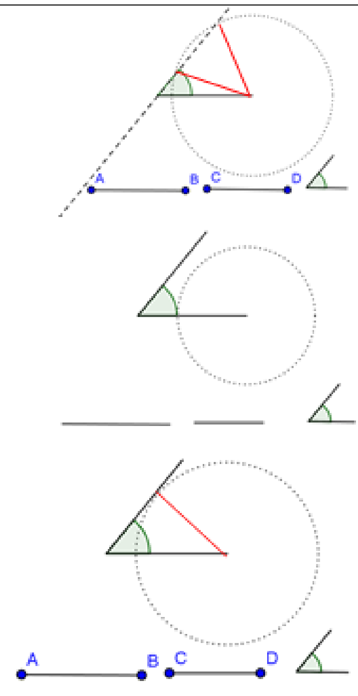
חורף 2012</td>
<td>3. מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל בנקודות B ו- C.
מנקודה D, שעל הקשת הקטנה BC, מורידים אנכים ל- AC, ל- AB ול- BC.
האנכים חותכים את AC, את AB ואת BC בנקודות E, F ו- G בהתאמה (ראה ציור).
א. הוכח כי $\Delta DFB \sim \Delta DGC$.
ב. הוכח כי $DF \cdot DE = DG^2$.



</td>
<td>במקום (או בנוסף) לסעיף ב של השאלה, להלן 5 סעיפי המשך אחרים לסעיף א שלה:
ג. הוכיחו $\sphericalangle BDG = \sphericalangle EDC$.
ד. האם מהסעיף הקודם נובע שהזוויות $\sphericalangle EDC$ ו- $\sphericalangle BDG$ קדקודיות?
תשובה: לא. (קל לייצר דוגמה נגדית)
ה. הוכיחו:
$$\frac{S_{\Delta BDG}}{S_{\Delta CDE}} = \frac{S_{\Delta DFB}}{S_{\Delta DGC}}$$
ו. האם ייתכן שארבעת שטחי המשולשים שווים זה לזה?
(תשובה: כן, במקרה שהנקודה D באמצע הקשת BDC).
ה. האם ייתכן ש-DG ממוצע גאומטרי של הקטעים שהוא מקצה על הבסיס
(תשובה: לא ייתכן. אילוDG היה ממוצע גאומטרי של הקטעים GC ו- BG אז $\sphericalangle BDC$ היתה ישרה. מכאן היה נובא ש- BC קוטר במעגל. זה לא ייתכן כי המשיקים בקצות קוטר מקבילים, ובמשולש הנתון המשיקים הנ"ל נפגשים ב- A.)</td>
<td>מתאים להדגים את הסעיפים א-ה באמצעות תוכנה דינמית.
השאלה עוסקת בממוצע גאומטרי בהקשר לא מוכר.
סעיף ד מחדד הבחנה בין המשפט על שוויון זוויות קדקודיות לבין טענה הפוכה שאיננה נכונה.
סעיפים ד, ו, ז מדגימים שאלות מסוג: האם ניתן להסיק...? האם ייתכן...? באיזה תנאי...? ועיסוק בשאלה "מה היה מתקיים אילו...?"</td>
</tr>
</table>

דמיון תיכון ליותר, קטע אמצעים 005 קיץ 2013	.4 במשולש שווה־שוקיים AMK ‏($AM = AK$) KD הוא תיכון לשוק AM, ו־ ME הוא גובה לשוק AK (ראה ציור). א. הוכח כי $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DEA$. ב. אם נתון גם כי $MK = 2 \cdot DE$: (1) מהו הגודל של $\sphericalangle MAK$? נמק. (2) הוכח כי $DE \parallel MK$. (3) ME ו־ DK נחתכים בנקודה P. מצא פי כמה גדול היקף המשולש MPK מהיקף המשולש EPD. 		זהירות בשרשרת ההסקה: מפתה להשתמש במשפט קטע האמצעים על בסיס המידע ש- MK=2DE, אבל בהתחלה אין מספיק נתונים.
משפט חוצה הזווית 005 קיץ תשע"ב	<u>הנדסת המישור</u> .3 BC ו־ AF משיקים למעגל בנקודות D ו A בהתאמה. AC חותך את המעגל בנקודה E (ראה ציור). נתון: $\sphericalangle FAC = \sphericalangle ABC = \alpha$ א. הוכח כי $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ABC$. ב. הוכח כי AD חוצה־זווית BAC. ג. הוכח כי $AD^2 = AE \cdot AB$. 		
מועד ב תשע"ד 806	.4 AC הוא קוטר במעגל שמרכזו O_1. BD הוא קוטר במעגל שמרכזו O_2. ישר משיק למעגלים O_1 ו־ O_2 בנקודות A ו־ B בהתאמה. המשיק חותך את קטע המרכזים O_1O_2 בנקודה E (ראה ציור). נתון: רדיוס המעגל O_1 הוא 30 ס"מ רדיוס המעגל O_2 הוא 20 ס"מ אורך קטע המרכזים O_1O_2 הוא 90 ס"מ א. (1) מצא את היחס $\frac{O_1E}{O_1C}$. נמק. (2) הוכח כי $\Delta EO_1C \sim \Delta EO_2D$. ב. הוכח כי הנקודה E נמצאת על הישר CD. 	במקום הנתונים המספריים: נתון כי רדיוס המעגל O_1 גדול פי 1.5 מרדיוס המעגל O_2. 1. מצאו את היחס O_1E/EO_2 (יותר פשוט וגם מדרגה). 2. בנו את המשיק המשותף לשני המעגלים. 3. כמו א(2) בשאלה המקורית. 4. הסבירו מדוע לא ייתכן ש $O_1E/EO_2= O_1A/AO_2$ (בפעילות חקר על בסיס שאלה זו כדאי	שילוב בנייה עם צורך בתכנון מוקדם: למצוא את יחס החלוקה ש-E מחלק את קטע המרכזים. לחלק קטע ביחס נתון. לבנות משיק למעגל מחוץ לישר.

		לשאול אם היחס נכון תמיד, לפעמים, אף פעם לא).	
חורף תשע״ד 806	- 4 - מתמטיקה, חורף תשע"ד, מס' 035806, 316 + נספח **פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור** ($33\frac{1}{3}$ נקודות) ענה על שתיים מהשאלות 6-4 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות). **שים לב!** אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.  4. משולש שווה־צלעות ABC חסום במעגל. נקודות D ו־ L נמצאות על המעגל כך ש־ $BD \parallel LC$. המיתרים AL ו־ BD נחתכים בנקודה E (ראה ציור). א. הוכח כי המרובע $LEDC$ הוא מקבילית. ב. (1) הוכח כי $\triangle ADE$ הוא משולש שווה־צלעות. (2) הוכח כי $LC + LB = LA$.	לסרטט כך שגם משולש CDE ייראה שווה צלעות במקום (?) סעיף ב2 : אילו מן התוצאות שלהלן ניתן להסיק בוודאות מהנתונים : 1. המשולש ADE שווה צלעות. 2. המשולש CDE שווה צלעות. לחילופין : אם במקום משולש שווה צלעות, היה נתון משולש שווה שוקיים - האם ניתן להסיק שהמשולש ADE שווה שוקיים? שהמרובע LEDC מקבילית?	לא להתבסס על מראה עיניים שילוב חקר . לא ידוע מראש אם הטענה נכונה.

נושא	דוגמה	מה הדוגמה מראה והערות נוספות
דמיון משולשים	נתון משולש ישר זווית ABC(זווית A ישרה). AD הגובה ליתר. הוכיחו: $AD^2=BD\cdot DC$	1. שאלה שנתונה ללא סרטוט. תוצאת התרגיל קשורה לפרופורציות במשולש ישר זווית. לכן התרגיל מדגיש את העובדה שפרופורציות במשולש ישר זווית אינן נושא בתכנית הלימודים, אם כי מומלץ לעסוק בהן במסגרת התרגילים ולא כנושא שמבססים עליו תרגילים אחרים.
דמיון משולשים	נתון מחומש משוכלל עם כל האלכסונים.  מצאו בסרטוט זוגות של משולשים דומים שאינם חופפים. מצאו זוגות נוספים של משולשים דומים שאינם דומים למשולשים הקודמים שמצאתם. מצאו את יחס הדמיון בין המשולשים. רשמו את כל המידות של זוויות בסרטוט. מה המשותף לכל המידות? (כולן כפולות של36°)	בעיה פתוחה, חושפת את היופי של הגאומטריה. מובילה לדיון ביחס הזהב ובמשולש זהב (ומונעת טעות נפוצה של כינוי משולש אחר בשם משולש זהב). שילוב של אלגברה וגאומטריה.
משפט חפיפה רביעי	1. בנו משולש על פי שתי צלעות וזווית מול הצלע הגדולה שבהן. 2. כמה משולשים כאלה אפשר לבנות? 3. האם כל צירוף של נתונים "כאלה" מאפשר בניית משולש? 	בעיית בנייה עם דיון בשאלות מסוג "האם הנתונים מאפשרים את הבנייה?" ובשאלת יחידות הבנייה.
משפט חפיפה רביעי	בנו משולש על פי שתי צלעות וזווית מול הצלע הקטנה שבהן. a. כמה משולשים כאלה אפשר לבנות? b. האם כל צירוף של נתונים "כאלה" מאפשר בניית משולש? 1. הראו שאם נתוני הבנייה מאפשרים לבנות שני משולשים, אז הזוויות מול	השאלה מחדדת את התנאים בהם מתקיים משפט החפיפה הרביעי, באמצעות מקרה בו לא חל המשפט

	הצלעות הגדולות משלימות זו את זו ל- 180 מעלות.		

דוגמאות לעיבוד שאלות בגרות לפעילויות עם יישומים דינמיים באתר המרכז הארצי

806 קיץ, שאלה 5

005 חורף, שאלה 4

806 מועד ב', שאלה 5

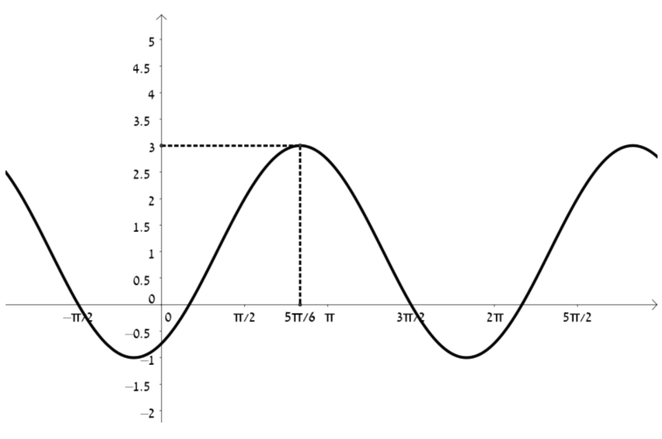
005 חורף, שאלה 3

005 מועד ב, שאלה 3

פונקציות טריגונומטריות

דוגמה **1**

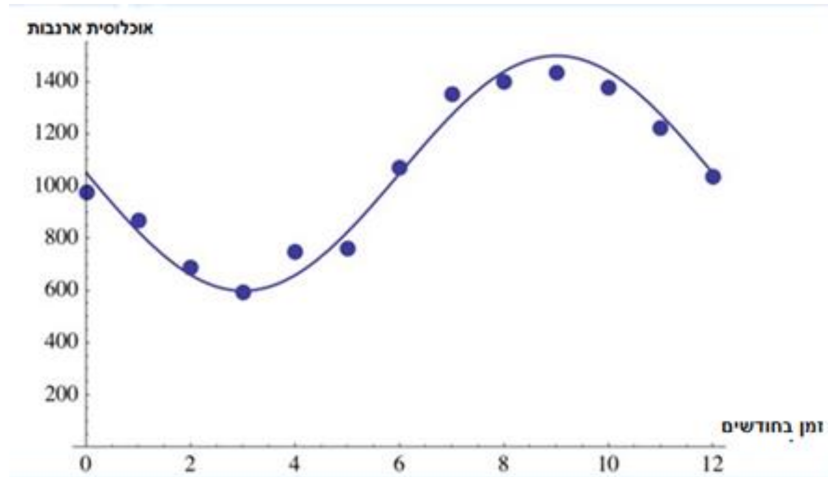
נתון גרף של פונקציה טריגונומטרית בסיסית (מהצורה $A\cdot sin(a\cdot x+b)+B$ או $C\cdot cos(c\cdot x+d)+D$). רשמו שתי פונקציות טריגונומטריות, האחת טרנספורמציה של פונקציית סינוס והשנייה טרנספורמציה של פונקציית קוסינוס, שהגרף הנתון מתאים להן.



דוגמה 2

נתון גרף נקודות המתאר את אוכלוסיית הארנבות בשמורת טבע בצפון הולנד כפי שנמדדה על ידי פקחי השמורה החל מ-1.1.2000.

גרף הנקודות מתואר בקירוב על ידי גרף של פונקציה טריגונומטרית $f(x)$.

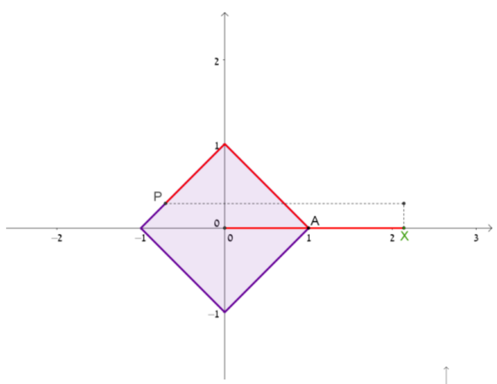


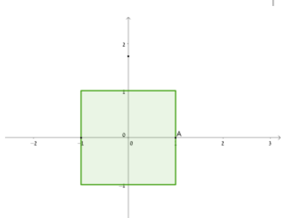
1. רשמו את הפונקציה $f(x)$ בהנחה שהיא מהצורה הטריגונומטרית הבסיסית.
2. בהנחה שהשתנות אוכלוסיית הארנבות בשמורה היא אכן תופעה מחזורית הנוהגת לפי הפונקציה שמצאתם $f(x)$, באיזה חודש בשנת 2002 תגיע אוכלוסיית הארנבות בשמורה בקירוב ל-1,200 פרטים?

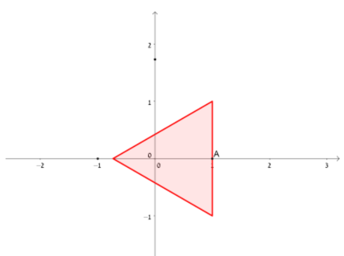
פונקציות מחזוריות כלליות

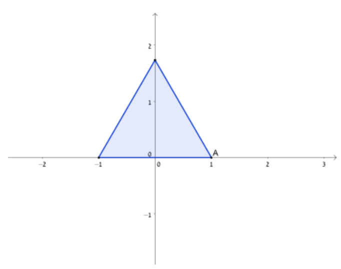
דוגמה 3 (העשרה)

הדגמה ותרגול של פונקציות המוגדרות באופן דומה על צורות שונות ממעגל היחידה. למשל (ראו איור) התאמה בין מספר ממשי X לשיעור ה-y של נקודה P המתקבלת על ידי ליפוף קטע שאורכו |X| (נגד כיוון השעון אם X חיובי ועם כיוון השעון אם X שלילי) – החל בנקודה (1,0) על הריבוע שמשוכן במערכת צירים כמודגם באיור. אפשר כמובן להגדיר פונקציות על בסיס צורות כרצוננו ולבחון את מחזוריותן (ראו איור).









ראו למשל דוגמאות נוספות בקישורים אלה:

השחיינים כולל יישומון

שלט חוצות

מגדלור

טריגונומטריה במישור כולל משוואות טריגונומטריות

1. אורכי שתי צלעות של משולש הם 7 ס"מ ו 5 ס"מ. הזווית מול הצלע של ה- 5 ס"מ היא $40°$. חשב את זוויות המשולש.

- על פי הנתונים יש שני משולשים אפשריים. השאלה מדגישה קשר למשפט חפיפה רביעי.

2. האם יתכן שאחת מזוויות המשולש תגדל ב- $60°$, הצלעות לצידה ישארו באותו אורך ושטח המשולש לא ישתנה?

- השאלה קשורה גם לזהות: $sin\alpha = sin\,sin\,(180° - \alpha)$ בהקשר של שני משולשים בעלי אותו השטח.

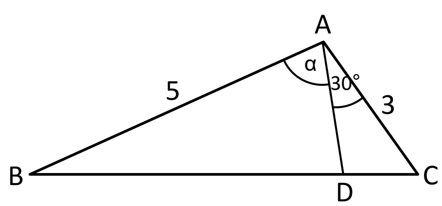
3. מה ניתן להגיד על משולש ששתיים מזוויותיו $\alpha\beta$, מקיימות: $sin\alpha = sin\beta$?

מה ניתן להגיד על המשולש אם מתקיים $sin2\alpha = sin2\beta$?

4. באילו מצבים יתקיים: מכפלת הקוסינוסים של זוויות המשולש תהיה חיובית? שלילית? שווה ל- 0?

5. במשולש ABC נקודה D נמצאת על הצלע BC .

העזר בנתונים שבציור והוכח כי $\frac{S\Delta ABD}{S\Delta ADC} \le \frac{10}{3}$



6. בגרות חורף תשע"ו , 5 יח"ל

במשולש שווה־שוקיים ABC ‏($AB = AC$)

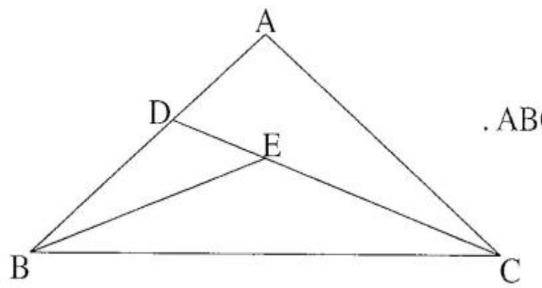
זווית הבסיס היא 2α .

הנקודה E היא מפגש חוצי־הזווית במשולש ABC .

המשך CE חותך את הצלע AB בנקודה D

(ראה ציור).

נתון: $\frac{EC}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha}$, $\sphericalangle BAC > 90^o$.



א. מצא את α .

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC

וביו רדיוס המעגל החסום במשולש ABC .

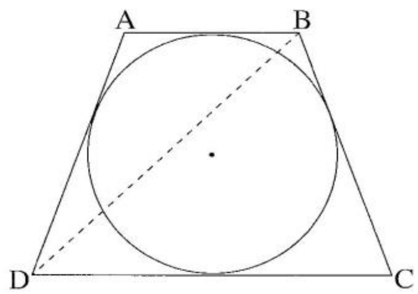
- אפשר להרחיב את השאלה ולבדוק מה קורה כאשר המשולש ABC הוא שווה צלעות או ישר זווית: מה תהיה ההשפעה על מיקום הנקודה E ומה תהיה ההשפעה על הקשר בין רדיוס המעגל החוסם את משולש ABC לבין רדיוס המעגל החסום במשולש.

7. בגרות קיץ תשע"ה מועד ב' , 5 יח"ל

ג מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז שווה־שוקיים ABCD

($AB \parallel DC$), כמתואר בציור.

נתון: $\sphericalangle BCD = 70^o$.



א. הבע באמצעות r :

(1) את הבסיס הגדול של הטרפז.

(2) את שוק הטרפז.

(3) את אלכסון הטרפז.

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החסום בטרפז

ובין רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

- אפשר להוסיף ולבדוק - באיזה תנאי BD יעבור דרך מרכז המעגל?

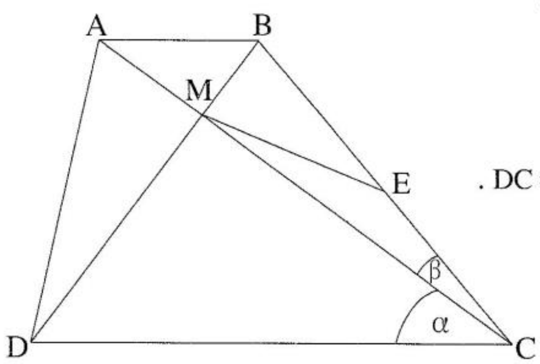
8. בגרות חורף תשע"ה, 5 יח"ל

אלכסוני הטרפז ABCD מאונכים זה לזה

ונפגשים בנקודה M .

E היא אמצע השוק BC (ראה ציור) .

נתון: $DC = a$, $\sphericalangle ACB = \beta$, $\sphericalangle ACD = \alpha$.



א. הבע באמצעות a , α ו־ β

את האורך של ME .

נתון: $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{1}{3}$, $a = 6.6$ ס"מ .

ב. מצא את האורך של AB .

נתון גם: $BM = 1.3$ ס"מ .

ג. מצא את הזווית DCB .

● ניתן לשנות את השאלה ולשאול איזה מהמשתנים : $\beta\alpha$, , או α צריך לקבל ערך מספרי כדי שאפשר יהיה לחשב את אורך AB.
בסעיף ב׳ לתת את אורך AB ולשאול על אורך DC.

9. בגרות קיץ תשע״ד, 5 יח״ל

במשולש שווה־שוקיים ABC $(AB = AC)$,

BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle BAC = 50^0$.

א. חשב את גודל הזווית הקהה AMB .

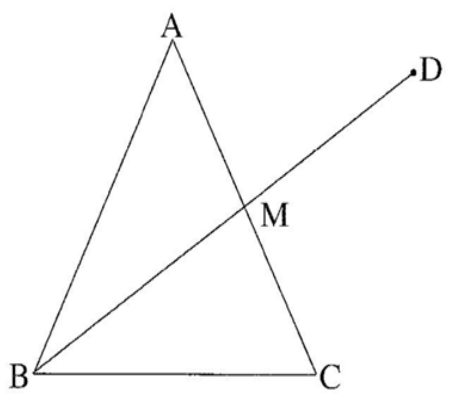
ממשיכים את BM עד הנקודה D .

נתון גם:

רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10 ס"מ.

רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.

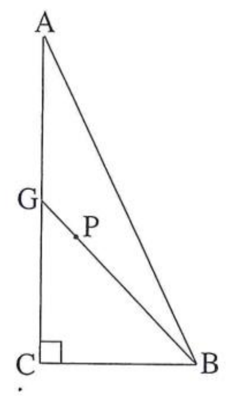
ב. חשב את זוויות המשולש AMD .



● האם יש בציור שני משולשים בעלי אותו רדיוס מעגל חוסם?

● ניתן להזיז את המשולש בעזרת יישומון דינמי ולבדוק מה קורה כאשר המשולש ABC הוא שווה צלעות או ישר זווית.

10. בגרות קיץ תשע״ד מועד ב׳, 5 יח״ל



במשולש ישר־זווית ACB ($\measuredangle ACB = 90^\circ$)

נקודה G היא אמצע הניצב AC.

נקודה P נמצאת על GB כך ש־ $BG = 4 \cdot PG$ (ראה ציור).

רדיוס המעגל החוסם את המשולש CGB הוא R.

נתון: $GC = BC$.

א. הבע באמצעות R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACB.

ב. הבע באמצעות R את מרחק הנקודה P ממרכז המעגל החוסם את המשולש ACB.

- ניתן לשנות את היחס $PG : BG$ ולראות את ההשפעה על האורכים.

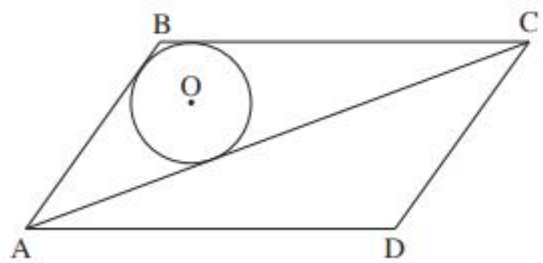
11 בגרות חורף תשע״ח, 5 יח״ל .

נתונה מקבילית $ABCD$. AC הוא האלכסון הארוך, כמתואר בציור.

במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו O.

נתון: הנקודה O נמצאת במרחקים 6 ו־ 3 מן הישרים AD ו־ AC בהתאמה;

$OA = 10$.



א. חשב את גודלי זוויות המקבילית.

ב. חשב את אורך האלכסון AC.

ג. חשב את שטח המקבילית.

נספח 3: רשימת משפטים בגאומטריה (מאתר המפמ"ר) עם התייחסות ללימודם/ השמטתם מהתכנית החדשה

1. זוויות צמודות משלימות זו את זו ל- $180°$. חט"ב
2. זוויות קדקודיות שוות זו לזו. חט"ב
3. במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות. חט"ב
4. במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות. חט"ב
5. סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית. חט"ב
6. במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים. חט"ב
7. אם במשולש חוצה זווית הוא גובה, אז המשולש הוא שווה שוקיים. חט"ב
8. אם במשולש חוצה זווית הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים. חט"ב
9. אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים. חט"ב
10. במשולש (שאינו שווה צלעות) מול הצלע הגדולה יותר מונחת זווית גדולה יותר. חט"ב
11. במשולש (שאינו שווה זוויות) מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר.
12. סכום הזוויות של משולש הוא $180°$. חט"ב
13. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה. חט"ב
14. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה. חט"ב
15. ישר החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שנייה, חוצה את הצלע השלישית. חט"ב
16. קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים. חט"ב
17. משפט חפיפה צ.ז.צ. חט"ב
18. משפט חפיפה ז.צ.ז. חט"ב
19. משפט חפיפה צ.צ.צ. חט"ב
20. משפט חפיפה שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מבין השתיים. חט"ע
21. האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זווית הראש, חוצה את האלכסון השני ומאונך לו. חט"ב
22. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז הישרים מקבילים. חט"ב
23. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז הישרים מקבילים. חט"ב
24. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם סכום זוג זוויות חד-צדדיות הוא $180°$ אז שני הישרים מקבילים. חט"ע (לא חובה ללמד בחט"ב)
25. אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי אז:
    1. כל שתי זוויות מתאימות שוות. חט"ב
    2. כל שתי זוויות מתחלפות שוות. חט"ב
    3. סכום כל זוג זוויות חד-צדדיות הוא $180°$. חט"ע
26. במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות. חט"ב
27. במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות. חט"ב
28. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה. חט"ב
29. מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית. חט"ב
30. מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית. חט"ב
31. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית. חט"ב
32. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית. חט"ב
33. במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות. חט"ב

34. מקבילית שבה אלכסון הוא חוצה זווית היא מעוין.
35. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה. חט״ב
36. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין. חט״ב
37. אלכסוני המלבן שווים זה לזה. חט״ב
38. מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן. חט״ב
39. בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות. חט״ב
40. טרפז שבו הזוויות שליד אותו בסיס שוות הוא טרפז שווה שוקיים. חט״ב
41. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה. חט״ב
42. טרפז בו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים. חט״ב
43. קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם. חט״ב
44. בטרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים חוצה את השוק השנייה. חט״ב
45. שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת. חט״ע
46. נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס של 1 : 2. חט״ב
(החלק הקרוב לקודקוד הוא פי שניים מהחלק האחר).
47. כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחקים שווים משוקי זווית זו. חט״ע
48. אם נקודה נמצאת במרחקים שווים משני שוקי זווית, אז היא נמצאת על חוצה הזווית. חט״ע
49. שלושת חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש. חט״ע
50. בכל משולש אפשר לחסום מעגל. חט״ע
51. כל נקודה הנמצאת על האנך האמצעי של קטע, נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע. חט״ע
52. כל נקודה הנמצאת במרחקים שווים מקצות קטע, נמצאת על האנך האמצעי לקטע. חט״ע
53. כל משולש ניתן לחסום במעגל. חט״ע
54. במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש. חט״ע
55. שלושת הגבהים במשולש נחתכים בנקודה אחת. חט״ע (הוכחה כהעשרה)
56. ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם הסכום של זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180°$. חט״ע
57. אם טרפז חסום במעגל אז הוא טרפז שווה שוקיים. מתוך התוכנית של 4 יח״ל חט״ע
58. מרובע קמור חוסם מעגל אם ורק אם סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות. חט״ע
59. כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל. חט״ע-במסגרת שיעורי הטריגונומטריה
60. בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל. חט״ע-במסגרת שיעורי הטריגונומטריה
61. דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד. חט״ע
62. במעגל שתי זוויות מרכזיות שוות רק אם שתי הקשתות המתאימות להן שוות. חט״ע
63. במעגל שתי זוויות מרכזיות שוות רק אם שני המיתרים המתאימים להן שווים. חט״ע
64. במעגל מיתרים שווים רק אם שתי הקשתות המתאימות להם שוות .חט״ע (עכשיו מנסחים : ״...אם ורק אם יש להם קשתות מתאימות שוות״, כי הרי לכל מיתר שתי קשתות)
65. מיתרים שווים נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל. חט״ע
66. מיתרים במעגל אחד הנמצאים במרחקים שווים ממרכזו שווים זה לזה. חט״ע
67. במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן ממרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך מהמיתר האחר. חט״ע במסגרת התרגול
68. האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר וחוצה את הקשת המתאימה למיתר. חט״ע
69. קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר. חט״ע
70. במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת. חט״ע

71. במעגל, לזוויות היקפיות שוות קשתות שוות ומיתרים שווים. חט"ע
72. במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות. חט"ע
73. במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על המיתר מאותו צד שוות. חט"ע
74. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה (90°).חט"ע
75. זווית היקפית של 90° נשענת על קוטר. חט"ע
76. במעגל, זווית פנימית שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן. לא בתכנית
77. במעגל, זווית חיצונית שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן. לא בתכנית
78. המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה. חט"ע
79. ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל. חט"ע
80. זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מִצדו השני. חט"ע
81. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים. חט"ע
82. קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה שממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים. חט"ע
83. אם שני משיקים מקבילים זה לזה, אז הקטע המחבר את נקודות ההשקה הוא קוטר במעגל. מתוך התוכנית של 4 יח"ל חט"ע
84. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו. לא בתכנית
85. נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה, נמצאת על קטע המרכזים או על המשכו. לא בתכנית
86. משפט פיתגורס : במשולש ישר זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר. חט"ב
87. משפט פיתגורס ההפוך : משולש בו סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית הוא ישר זווית. חט"ע
88. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר. חט"ב
89. משולש שבו התיכון שווה למחצית הצלע שהוא חוצה הוא משולש ישר זווית. חט"ב
90. אם במשולש ישר זווית זווית חדה של 30° , אז הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר. חט"ב
91. אם במשולש ישר זווית ניצב שווה למחצית היתר, אז מול ניצב זה זווית של 30° . חט"ב
92. משפט תאלס : שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים. חט"ע
93. משפט תאלס המורחב : ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים. חט"ע
94. משפט הפוך למשפט תאלס : שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים, הם ישרים מקבילים. חט"ע
95. חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים שהיחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה. חט"ע
96. ישר העובר דרך קדקוד משולש ומחלק את הצלע שמול הקדקוד חלוקה פנימית ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה), חוצה את זווית המשולש שדרך קודקודה הוא עובר . חט"ע
97. משפט דמיון צ.ז.צ. חט"ע (הוכחה כהעשרה)
98. משפט דמיון ז.ז. חט"ב
99. משפט דמיון צ.צ.צ. חט"ע (הוכחה כהעשרה)
100. במשולשים דומים :
    1. יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הדמיון. חט"ע
    2. יחס חוצי זוויות מתאימות שווה ליחס הדמיון. חט"ע
    3. יחס תיכונים מתאימים שווה ליחס הדמיון. חט"ע
    4. יחס ההיקפים שווה ליחס הדמיון. חט"ע
    5. יחס הרדיוסים של המעגלים החוסמים שווה ליחס הדמיון. חט"ע
    6. יחס הרדיוסים של המעגלים החסומים שווה ליחס הדמיון. חט"ע
    7. יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון. חט"ע

101. אם במעגל שני מיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני. חט״ע – במסגרת התרגילים

102. אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני. חט״ע – במסגרת התרגול

103. אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק. חט״ע – במסגרת התרגול

104. במשולש ישר זווית, הניצב הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטל ניצב זה על היתר. חט״ע – במסגרת התרגול

105. הגובה ליתר במשולש ישר זווית הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר. חט״ע – במסגרת התרגול

106. סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא $180°(n-2)$. חט״ב