

יעדים ללימוד מתמטיקה רעיונות אחדים למורים

שמואל אביטל
ושרה שטלורס

מאנגלית:

נצה מובשוביץ-הדר

ש. אביטל, ש. שטלורס: יעדים ללימוד מתמטיקה

בהוצאת "קשר-חם", תשס"ו

פרופ' שמואל אביטל (1915-2001), מאבות החינוך המתמטי בישראל, היה מורה למתמטיקה בבית הספר המקצועי שעל-יד הטכניון במשך 24 שנים, והעמיד דורות של תלמידים שהשפעתו על עתידם הייתה מכרעת. עם הקמת המחלקה להוראת המדעים בטכניון, השלים את לימודי הדוקטורט בחינוך מתמטי באוניברסיטת טורונטו בקנדה, הצטרף אל סגל המחלקה ולימים עמד בראשה. החוברת "יעדים ללימוד מתמטיקה" היא פרי עבודת הדוקטורט שלו.

במשך שנים רבות הוציא פרופ' אביטל לאור את "גליונות לחשבון" - עיתון מתמטי לנוער. הוא הנחה וטיפח מספר רב של חוקרים בחינוך מתמטי, פרסם שורה ארוכה של מאמרים ואת הספר "מתמטיקה בהנאה" בהוצאת עם עובד. פרופ' אביטל אהב את המתמטיקה עד כדי כך שביקש לחרוט על קברו את הנוסחה של אוילר: $e^{xi}-1=0$ שהפכה לסמל יופייה של המתמטיקה בהיותה קשר בין חמשת הגדלים המרכזיים ביותר. בני משפחתו הקימו לזכרו קרן המחלקת פרס שנתי למורים עבור יוזמה חינוכית לקידום הוראת המתמטיקה.



הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים
"קשר-חם" - המרכז הארצי
לקידום, שיפור ורענון החינוך המתמטי



יעדים ללימוד מתמטיקה רעיונות אחדים למורים

שמואל אביטל, מרצה
המחלקה למדידה והערכה והמחלקה לפסיכולוגיה יישומית

שרה שטלוורס, עוזרת מחקר
המחלקה לתוכניות לימודים

בולטין מס. 3, 1968
המכון של אונטריו למחקר בחינוך

מאנגלית: נצה מובשוביץ-הדר, הטכניון, חיפה 1970

זהו תרגום לעברית של :

Shmuel M. Avital and Sara J. Shettleworth:
*Objectives for Mathematics Learning, Some
Ideas for the Teacher.*

OISE Bulletin No. 3, 1968.

The Ontario Institute for Studies in Education.

102 Bloor Street West, Toronto 5, Ontario, Canada,

QA 11 .A86 GERSTM

©1968

הדעות המובעות בחוברת זו הן של המחברים, וככאלה אינן
בהכרח משקפות את עמדת המכון.

תרגום מאנגלית :

נצה מובשוביץ-הדר 1970.

עובד מחדש בסיוען של בתיה עמית וזיוה שחם

והובא לדפוס ברשות המו"ל,

לקראת חלוקת פרס אביטל לשנת תשס"ו, מאי 2006.

הודפס בישראל ומופץ ע"י "קשר חם" – המרכז הארצי
לקידום שיפור ורענון החינוך המתמטי, הטכניון, חיפה 32000
<http://kesher-cham.technion.ac.il>

פתח דבר

איש לא צריך להיפגע מהטענה כי רק לעתים רחוקות מתקבל פרסום של מחקר חינוכי בהתלהבות על ידי מורים. מזווית הראייה של עבודת היום-יום המתישה בהוראה בכיתה, נטייתו של החוקר להפשטה נראית בעיני המורה כסוג של עיסוק אינטלקטואלי חסר תועלת, בתיאוריות מרחיקות לכת על בעיות בוערות בחינוך. חוקרים, ברובם, מייחסים את הקבלה הצוננת של עבודתם להיעדר ראייה קדימה בקרב המורים, ולחוסר רצון לבחון רעיונות חדשים.

אף כי חוסר ההבנה בין החוקר לבין המורה, היא מצערת, אין בה סכנה של ממש לקידום החינוך, סכנה שקימת בכישלון למצוא בסיס לשיתוף פעולה. בסיס כזה לא קל לאתר הואיל ועליו לאפשר השלכה של הדגש הניסויי-תיאורטי של החוקר על בעיות חינוכיות של המורה ברמת פירוט כזאת שהמורה יוכל להתמודד עימה.

הפרסום שלפנינו מדגים מה ניתן לעשות כאשר התנאים הם אזהדים. ד"ר אביטל השקיע מחשבה רבה לפסיכולוגיה של למידת מתמטיקה וכעת הוא מעורב במחקר בתחום זה. יחד עם זאת, במסמך הזה הוא עובר מעל לעניינו התיאורטי הטהור כדי להתמודד עם בעיה פרקטית והיא – הגדרה של מערכת מאורגנת כהירארכיה של התנהגויות מתמטיות המשקפות את התוצאות הרצויות של הוראת המתמטיקה בכיתה.

לדעת כותב שורות אלו, לעבודה יש שני יתרונות יוצאי-דופן. קודם כל, המחברים מגישים שפע של דוגמאות מאלפות לפריטי-מבחן (בעיות) המבהירות את רוחב היריעה של טווח רמות החשיבה האפשריות בהוראת מתמטיקה. דוגמאות אלו, יחד עם הרציונאל המוצג לצידן, יוכיחו את עצמן כבעלות ערך עצום לכל מורה בבואו לחבר שאלות בנושא מסוים אותו הוא מלמד. שנית, המחברים נותנים הצעות מעשיות לשיפור הביצוע ברמות הגבוהות (אך קשות להשגה) של אנליזה וסינתזה, שהגיבוי להן איננו נסמך רק על ספקולציה סתמית אלא נשען על ניסיונו הארוך והמוצלח של ד"ר אביטל בהוראה בפועל.

לדין וחשבון אשר מזמין את המורים להתבונן בקפידה בתוצאות ההתנהגותיות של עבודת ההוראה, יש חשיבות

מיוחדת בימים אלה בהם מתחולל שינוי מהיר בתוכניות הלימודים, כשההתלהבות מהחידוש עצמו לעיתים מקהה את חוש הביקורת בשנים האחרונות באו לידי ביטוי ראיות לכך, שאף כי התלמידים לומדים מושגים חדשים ומונחים חדשים - מטרות רצויות כשלעצמן, התוכניות לשלב מתמטיקה מודרנית בתוכנית הלימודים השפיעו אך במעט על השגת המטרה שהייתה תמיד מרכזית בהוראת מתמטיקה: פיתוח היכולת לרתום את החשיבה המתמטית לפתרון בעיות. לא תחול כל התקדמות עד שנשכיל להבחין באופן בהיר בין רמת הבנה 'נמוכה' (זכירה) לבין רמת הבנה 'גבוהה' (פתרון בעיות) בביצועים מתמטיים, ולנקוט צעדים לקראת זיהוי של היכולות הגבוהות אצל תלמידינו. לפרסום שלפנינו יש תרומה חשובה לשני היבטים של הבעיה.

פאליז' ט': רובינסון
פרופ' קלאבאן. אונגווי
מרץ 1968

הקדמת המחברים

חוברת זו עוסקת ביעדיה של הוראת המתמטיקה, במיוחד בכיתות העליונות של ביה"ס היסודי ובביה"ס התיכון. היא מנסה להציג מודל של רמות הביצוע בו ניתן להשתמש על מנת לפרט את עומק ההבנה שמצפים לו מהתלמיד תוך כדי התמודדות עם משימות מתמטיות שונות. אנו מקווים שהמורים יעשו שימוש במודל זה כדי להכין יעדים ייחודיים לכל נושא לימודי, על מנת להבטיח שהוא יכלול לא רק היכרות של המושגים והמונחים המופיעים בתוכנית הלימודים, אלא גם פתרון בעיות ברמה גבוהה יותר. החוברת מבוססת על עבודת הדוקטורט של המחבר הראשון: 'השגת חשיבה ברמה גבוהה במתמטיקה אצל תלמידי תיכון' שהוגשה לאוניברסיטת טורונטו בשנת 1967. תרומתה של המחברת השותפה הייתה בהבהרת הרעיונות והדוגמאות ובפיתוחן למתכונת נוחה לשימוש בידי המורים. הבעיות המתמטיות הכלולות בטכסט נצברו במהלך עשרים וארבע שנות עבודה של המחבר הראשון כמורה למתמטיקה

בבית ספר תיכון. חלק מהן מקוריות, אחרות עובדו על-פי מקורות שונים שחלקם מצוינים ברשימה הביבליוגרפית. אי אפשר לציין את המקור של כל אחת מהן. המחברים מבקשים להודות לד"ר קרל ברייטר, למר ד. פ. בוריל, למר וו. וו. מוריסון, למר פול ווילנד, לד"ר אלו מ. ריגן ולד"ר ה. הווארד ראסל אשר קראו את כתב-היד והעירו הערות על נקודות מסוימות בו. תודה מיוחדת לגב' ברברה ג'. פינטש שסייעה בעריכת החומר. אנו מקוים מאד שחוברת זו תתרום לשיפור ההוראה והלמידה של המתמטיקה - המלכה והמשרתת של המדעים.

דבר המתרגמת

זכיתי להיות תלמידת מחקר של פרופ' שמואל אביטל ז"ל, מאבות החינוך המתמטי בישראל. אני חבה לו חוב שאי-אפשר לפרוע אותו, אלא בהמשכת דרכו. בהנחייתו הנאמנה והבלתי מתפשרת, סיימתי בשנת 1970 את לימודי לתואר מגיסטר למדעים בטכניון. בעידודו המשכתי בלימודים לתואר שלישי ולבסוף, הודות להערכתו, התקבלתי עם תום הלימודים כחברת-סגל בטכניון. במהלך עבודתי על התואר השני, שימשתי לו כעוזרת-הוראה ואז תרגמתי את "החוברת האדומה", זו החוברת שתרגומה מופיע כאן והיא פרי עבודת הדוקטורט שלו שנעשתה בקנדה. היו אלה שנים של טרום תקופת המחשב האישי, כשהקלדה במכונת כתיבה הייתה נחלתן של מזכירות מקצועיות בלבד. בשנת 2005, אחרי פרישתי מהטכניון, "עשיתי סדר" ומצאתי להפתעתי את כתב-היד ולצידו פתק אל שמואל משנת 1989, בו הצעתי לו להדפיס ולהפיץ את התרגום שעשיתי כעשרים שנה קודם לכן. תגובתו הייתה בתנועת ביטול, שהייתה כה אופיינית לצניעותו, וכך נותר כתב היד בשיממונו. אבל הדברים לא התיישנו וציבור המורים למתמטיקה בישראל יכול להשתבח בהם גם כיום. אני רואה לעצמי חובה וזכות גם יחד להביא את העיבוד המחודש בפני קהיליית החינוך המתמטי בישראל.

נצה מלואל-הצר

חיופה, מרץ 2006

תוכן העניינים

1	1. הצורך במיון של יעדים להוראת המתמטיקה
6	2. טקסונומיה של יעדים ללימוד מתמטיקה
8	3. לימוד מושגים, הכללות ואלגוריתמים
20	4. חיפוש פתוח
38	5. מה יכולים המורים לעשות
49	רשימת מקורות
50	הצעות לקריאה נוספת
51	נספח : בעיות נוספות

1. הצורך במיון של יעדים להוראת המתמטיקה

תוכניות הלימודים המשתנות

אנו חיים בעידן של שינויים בתוכניות הלימודים במתמטיקה. בכל העולם חלים שינויים בתוכניות ובשיטות ההוראה. נושאים שנלמדו בכיתות העליונות יורדים לכיתות נמוכות יותר ונושאים חדשים שבעבר נלמדו רק באוניברסיטה, נכנסים לתוכנית הלימודים של ביה"ס התיכון.

השאלה המהותית המתעוררת היא: מהן מטרות השינויים הללו? איך ניתן להשיג אותן ואיך ניתן לדעת שאכן השגנו אותן? אילו הן שאלות הנוגעות ליעדי החינוך, כלליים וייחודיים, ולהוראה והערכה הנגזרות מיעדים אלה.

יעדים חינוכיים כלליים

בחירת היעדים להוראת מתמטיקה מושפעת על-ידי גורמים רבים. קודם כל, מטרות חינוכיות כלליות. אלה הנובעות מהתוצר המוגמר של ביה"ס כפי שהוא נדרש מנקודת ראות חברתית או אישית. מקורן בגישות פילוסופיות ובסביבה התרבותית של העוסקים בתכנון ובעיצוב התהליך החינוכי.

בעבודה מסוג זה, בה משורטטים קוים ליעדי החינוך המתמטי, הכרחי לציין במפורש את ההנחות שעליהן היא מבוססת מבחינת יעדי החינוך בכלל.

אנו מניחים, כמו ג'. ס. ברונר שמטרת הלמידה היא לרכוש ידע עובדתי שישמש ליצירה (Bruner J. S., 1959, p. 189). במלים אחרות, גוף ידע כפי שנלמד בבית הספר צריך להוות לא רק עוגן ליצירת חומר חדש, אלא גם מקור ל'למידה יוצרת' המאפשרת להגיע אל מעבר לחומר שנלמד. למידה כזאת מקנה את היכולת לראות יחסים חדשים בתוך החומר הנלמד ובינו לבין תחומים אחרים. יתרה מזאת, אנו מניחים שכדי שחומר מתמטי יילמד באופן משמעותי ויישמר כך, יש לעקוב באופן שיטתי אחר ההתפתחות ההיסטורית שלו, כדי להבין שהכללות ותגליות חדשות הן תולדה של ניסיונות לפתור בעיות העולות מתוך תגליות קודמות.

מכאן שההוראה בבית הספר צריכה להיבנות על ניסיון מתמשך של התלמידים לפתור בעיות המבוססות על חומר שהם אמנם למדו כבר, אבל הוא גם מוביל אל מעבר אליו.

יעדים כלליים ללמידת מתמטיקה

לעיתים קרובות מנסחים את המטרות הכלליות ללימוד מתמטיקה בביה"ס מנקודת ראות שימושית. כך למשל ווילר (Wheeler, 1963), מציג שלוש מטרות כלליות כאלה: (א) שימוש בחיי יום-יום על-ידי חתך רחב על האוכלוסייה; (ב) שרות למדעים אחרים; (ג) אימון בחשיבה לוגית.

אנו מניחים שבנוסף לחשיבות השימושית המקובלת של המתמטיקה, שהיא ללא ספק מוגבלת, יש למתמטיקה ערך פנימי רב משל עצמה ואין צורך בקריטריון חיצוני להצדקתה. מנקודת ראות זו, הערכת המתמטיקה היא חלק מ'החיים הטובים' באותה דרך שהערכת הספרות והמוסיקה הן חלק מכך. כתיבת חיבור היא חלק מתהליך הלימוד של הערכת הספרות ומוסיקה מלמדים בבית הספר כהכנה להנאה עתידית ממנה, כך גם מתמטיקה צריכה להיכלל בתוכנית הלימודים של בית הספר התיכון למען ערכיה העצמיים.

החלק החשוב ביותר של הניסיון הלימודי הוא מגע חי עם מתמטיקה של ממש, כלומר, עם השיטות שבאמצעותן מתפתחת המתמטיקה החל מהפשוטה ביותר ועד למורכבת ביותר. רק דרך מגע כזה יכולים התלמידים להתוודע אל המבנה של המתמטיקה ואל טבעה. אחת המטרות העיקריות של תוכנית לימודים חדשה היא להעשיר את היצע ההזדמנויות שניתנות לתלמיד לקחת חלק בניסוח לוגי ובהגדרת מושגים מתמטיים. בין התוצאות האפשריות של מעורבות כזאת נשיג חלק מהמטרות שנוסחו על-ידי The Cambridge Committee on School Mathematics (1963) לפיהן על התלמיד: (א) לרכוש בטחון ביכולת הניתוח שלו; (ב) להגיע להערכת הדיוק בשיח המתמטי המתאפשר על-ידי הסימבוליקה המתמטית; (ג) להתחיל להבין את כוחה ומגבלותיה של המתמטיקה.

מטרות ייחודיות והערכה

להנחות המובילות לניסוח יעדים חינוכיים כלליים יש השלכות על בחירת הנושאים שאותם כוללים בתוכנית הלימודים. אם למשל

היעד הכללי הוא שהתלמיד יבין את כוחה ומגבלותיה של המתמטיקה, אפשר לכלול בתוכנית הלימודים בעיות שנפתרו וגם בעיות חסרות פתרון מתוך תורת המספרים¹.

יש להבחין בין נושאים להוראה (למשל: 'פירוק לגורמים של פולינום' או 'ריבית דריבית') כפי שהם מופיעים בתוכנית לבין המטרות של הוראתם. כדי לנסח מטרות שישמשו כלי עזר להוראה, יש לעשות זאת מנקודת ראות התנהגותית. יש לנסח בדייקנות מה אנו רוצים שהתלמיד יידע לעשות עם תום תהליך הלמידה של נושא מסוים. לדוגמה, מטרות ייחודיות ללמידה של פירוק לגורמים של פולינום יכולות להיות כדלקמן:

עם תום הלימוד התלמיד יהיה מסוגל:

- (א) לזהות פולינום שמפורק לגמרי;
- (ב) לפרק לגורמים כל פולינום פריק ממעלה שנייה;
- (ג) לבדוק באיזו מידה פולינום יכול לייצר מספרים ראשוניים. כדוגמה נוספת אפשר להביא את המטרות הייחודיות של הוראת הפרק על תכונותיהם של המספרים הממשיים. מטרות אלו אפשר לנסח כך:

עם תום הלימוד התלמיד יוכל:

- (א) לנסח את חוק החילוף, חוק הקיבוץ וחוק הפילוג;
 - (ב) להשתמש בחוקים אלה כדי לפשט ביטוי מספרי או אלגברי;
 - (ג) להוכיח משפטים נתונים בעזרת תכונותיהם של המספרים הממשיים;
 - (ד) לנתח את תכונותיה של קבוצה נתונה עם פעולה חדשה המוגדרת בין איבריה.
- ניסוח המטרות קשור להערכה. אם המטרה היא שהתלמיד יוכל לפרק תלת-איבר, הכרחי שהמבחן יבדוק באיזו מידה הושגה המטרה הזאת. אם המטרה היא שהתלמיד ידע לנסח משפטים או להוכיח משפטים שהם חדשים לו, הכרחי שהמורה יבדוק בדרך כלשהי את יכולתו של התלמיד לעשות זאת.

הסכנה שבהדגשת מטרות ברמה נמוכה

הבעיה העיקרית של הצבת מטרות ייחודיות בכל תחום, היא הנטייה להדגיש יתר על המידה את המטרות ההתנהגותיות הקלות

¹ לתורת המספרים יש תכונה מוזרה, קל לנסח בה בעיות מובנות שקשה מאד לפתור אותן.

להשגה ולמדידה שאותן קל יותר ללמד, ולהזניח את הקשות יותר שהן לא פחות חשובות. המושגים החדשים וההגדרות הפורמאליות הכלולים בתוכניות הלימודים החדשות עלולים להוביל את המורה לדרוש רק זכירה והבנה ראשונית ולהתעלם מחומר שבו הכוח היוצר והדיוק שאצורים במושגים ובהגדרות, באים לכלל ביטוי. המורה עלול להתפתות ליהנות מההרגשה שתלמידיו עוסקים ב'מתמטיקה-של-ממש' כשהם משתמשים בטרמינולוגיה מודרנית או בסימול מתקדם, כשלמעשה המטרה הממשית של לימוד מתמטיקה היא פיתוח היכולת ליישם את שיטותיה למצבים חדשים. כך למשל, חשוב שתלמיד ידע להגדיר את קבוצת הראשוניים כ:

$$\{x \text{ הוא שלם המתחלק רק ב-1 ובעצמו} \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

אך התלמיד מוכיח הבנה הרבה יותר עמוקה של מושג המספר הראשוני כאשר הוא יכול להוכיח שהקבוצה:

$$\{y \mid y = n^2 - 1, n \in \mathbb{Z}\}$$

יכולה להכיל לכל היותר מספר ראשוני אחד.

'הבנה' - מושג מעורפל

בכל פעם שמורה רוצה לומר שהוא מלמד יותר ממה שהיה שיגרתו, הוא אומר שהוא מלמד 'להבין'. ברור שכמעט בכל מקרה יש יותר מרמה אחת של 'הבנה'. תלמיד היודע ש $ax + b = c$ כאשר $a \neq 0$ שקול ל-

$$x = \frac{c-b}{a}$$

רכש משהו מה'הבנה' של המושג משוואה. אך מובן שתלמיד שמצא את מספר הפתרונות במקרה בו $a = 0$ ו $c - b \neq 0$ ובמקרה בו $a = 0$ ו $c - b = 0$ הגיע לדרגה גבוהה יותר של 'הבנה'.

באופן דומה, תלמיד שלמד את מושגי המרחק בין נקודה לישר והמרחק בין שני ישרים מקבילים ויכול למצוא את שלושת הגבהים במשולש, הראה במפורש 'הבנה' כלשהי. אם אותו תלמיד יכול לעשות שימוש במושגים אלה כדי למצוא את מספר הקווים במישור שמרחקיהם שווים משלוש נקודות שאינן על ישר אחד, הוא מראה 'הבנה' ברמה יותר גבוהה. המושג 'הבנה' אינו ברור די הצורך. הוא יותר מדי רחב ויוצר סכנה של יישומו ברמה נמוכה ללא התייחסות לרמה גבוהה יותר, אליה ניתן להגיע.

המורה עשוי להחליט שלכיתה מסוימת או בשלב מסוים של הלימוד, די להציב כמטרה - הבנה ברמה נמוכה, אך עם זאת עליו לחפש דרך כדי להכין את התלמידים להבנה מעמיקה יותר בשלב מאוחר יותר של התפתחותם.

הצורך במודל

ברור אפוא שיש צורך במודל או תיאור מדויק יותר של רמות יכולת מתמטית מהנמוכה עד לגבוהה שעל פיו יוכל המורה להציב לו את יעדיו. מודל כזה יעזור למורה לזהות את רמת היכולת המתמטית שהשיגו תלמידיו ולתכנן את משימות ההוראה כדי להכיל את כל התחום המתמטי, המתאים לגיל וליכולת של תלמידיו.

ב.ס. בלום ושותפיו למחקר (Blum B. S., et al. 1956) בנו מודל מקיף כזה שנקרא: טקסונומיה של מטרות חינוכיות ובה יש מיון לשש קטגוריות ראשיות או רמות: ידע, הבנה, יישום, אנליזה, סינתזה והערכה.

הערך הגדול של הטקסונומיה של בלום הוא בכך שהיא מכסה ספקטרום רחב מאוד של מעשים, מהתפקיד הנמוך ביותר של חזרה על חומר ועד לגבוה ביותר שבו הלומד בונה מחדש את החומר שלמד כדי להוציא מסקנות חדשות ולמצוא תוצאות שונות לגמרי מאלה שכבר קיבל.

מחברי הטקסונומיה מתארים את הקטגוריות הראשיות במונחים מאד כלליים ומביאים קבוצה גדולה של דוגמאות לפריטים המיועדים למדוד ביצועים הקשורים לכל קטגוריה. הנחתם היא שהקטגוריות הכלליות הללו יכולות לעבור התאמה לכל מקצוע ולשמש כמדריך להכנת יעדים חינוכיים באותו שטח. אף על פי שהטקסונומיה עצמה מנוסחת במונחים כלליים שאינם קשורים לדיסציפלינה מסוימת, מעט מאד מהדוגמאות לפריטים הן מתמטיות. לפיכך התאמת הטקסונומיה למתמטיקה תגדיל את הסיכוי שמורים למתמטיקה יעשו בה שימוש לניסוח מטרות ולהערכת השגתן.

בחוברת זו מתוארת דרך למיון מטרות להוראת המתמטיקה הנשענת על הטקסונומיה, אחרי שהותאמה במיוחד לתיאור מדויק של רמות ביצוע במתמטיקה.

2. טקסונומיה של יעדים ללימוד מתמטיקה

רמות בחשיבה מתמטית

הצעד הראשון בתכנון של טקסונומיה של מטרות להוראת מתמטיקה הוא לזהות רמות שונות ונפרדות של חשיבה מתמטית. אנו מציעים שלוש רמות שונות של חשיבה מתמטית. הראשונה והבסיסית היא הכרת החומר בצורה שבה הוא נלמד. השנייה בדרגת המורכבות היא הכללה ישירה או העברה מהחומר המקורי שנלמד לחומר מקביל לו. נוכל לקרוא לשלב זה חשיבה תהליכית (Algorithmic thinking). זוהי הדרגה שבה אנו מצפים מהתלמיד לכך שיוכל לבחור לו היטב את הדרך, התהליך, השיטה לפתרון בעיה נתונה. התנהגות ברמה זאת הולכת ונעשית מורכבת ככל שהחומר שבו צריך התלמיד להגיע להכללה נעשה רחוק יותר מהחומר במצב המקורי שבו נלמד.

הרמה השלישית היא השלב הגבוה ביותר של חשיבה מתמטית. נקרא לרמה זו חיפוש פתוח (Open search). התנהגות ברמה זו נחוצה כשאוצר ידיעותיו של התלמיד אינו מוגבל לפעולות פשוטות ולהתמודדות עם בעיות שעבור פתרון למד דרך ישירה. התלמיד יכול לארגן מחדש או לנסח מחדש את חלקיה של בעיה ולראות בין מרכיביה יחסים חדשים רלבנטיים לפתרון המבוקש. מבחינה פסיכולוגית, רמה זו זכתה לטיפול מועט בספרות המקצועית והיא הפחות מובנת. לתיאורטיקנים יש שמות שונים ותיאורים שונים עבורה. תיאורים אחדים של תהליך הגילוי המתמטי, ניתנו על-ידי המתמטיקאים בעצמם. פואנקרה מבחין בין שלשה שלבים בהתמודדות עם פתרון של קושי חדש: הכנה, אינקובציה (דגירה), הברקה. רוב התיאורים האחרים של התהליך, המתוארים על-ידי (Hadamard 1945) בספרו על המצאה מתמטית, כוללים 'הארה' או ההתגלות הפתאומית של פתרון כשלב הקריטי בחשיבה מתמטית ברמה גבוהה. יחד עם זאת, לא נמצאה תורה שיטתית מוסכמת של התנאים שבהם מתעורר אותו רגע של 'הארה'. זהו ללא ספק חסרון גדול, מנקודת הראות של המורה למתמטיקה, המעוניין לקדם חשיבה ברמה גבוהה. אך הארה כזאת אינה מוגבלת לגילוי המתמטי בשיאו. לדוגמא: תלמיד מראה בוננות ברמה מקבילה כשהוא מגלה שאי אפשר לכתוב ריבוע של מספר כלשהו

בעזרת הספרות 2, 3, 7, 8 בלבד. הוא הדין לגבי תלמיד בכיתה ג' הרואה לפתע תבנית של חוקיות בסדרה מורכבת של מספרים.

הקטגוריות של הטקסונומיה

במסגרת שלוש רמות חשיבה שמנינו לעיל, אנו מבחינים בחמש קטגוריות של מטרות להוראת המתמטיקה. הקטגוריה 'ידע' מתאימה כמעט לכל שיחזור מילולי וזיהוי, בדומה למופיע בטקסונומיה של בלום. חשיבה אלגוריתמית כוללת את שתי הקטגוריות הבאות: הבנה ויישום. הרמה השלישית, חיפוש פתוח, כוללת את הקטגוריה הרביעית והחמישית: אנליזה וסינתזה.

בטקסונומיה קיימת קטגוריה שישית - הערכה. ההנחה היא שזוהי רמת הביצוע המורכבת ביותר, אולם בביצועים מתמטיים אי אפשר לדעתנו להפריד את ההערכה מיתר הקטגוריות, מבחינה פסיכולוגית. משימות כדוגמת שיפוט של נכונותה של הוכחה על ידי ניתוח כל צעד, שמבחינה מילולית צריך היה להכניס לקטגוריה 'הערכה', הן חלק בלתי נפרד מתהליך ההוכחה עצמו ולכן משימות כאלו שייכות לדעתנו לאנליזה או לסינתזה. כך למשל, הגילוי שתוך כדי ניסיון להוכיח את משפט פרמה (למשוואה $x^n + y^n = z^n$ כאשר n הוא מספר טבעי, אין פתרונות שלמים עבור $n > 2$), הניח קומר (Kummer) בטעות פריקות חד-ערכית של שלמים אלגבריים, איננו מצביע על חשיבה ברמה יותר גבוהה מזו של ההוכחה המוטעית עצמה.

לסיכום, יש לנו שלוש רמות חשיבה ומתאימות להן חמש קטגוריות של מטרות ביצוע מתמטי:

רמה	תהליך חשיבה
בטקסונומיה	
1. ידע	1. זיהוי, קריאה מחדש
2. הבנה	2. חשיבה תהליכית (אלגוריתמית), הכללה
3. יישום	
4. אנליזה	3. חיפוש פתוח
5. סינתזה	

בעמודים הבאים מופיע תיאור יותר מלא של ההתנהגויות המאפיינות כל רמת ביצוע במתמטיקה, יחד עם מטרות הוראה לכל קטגוריה.

3. לימוד מושגים, הכללות ואלגוריתמים

ידע

ידע, השלב הנמוך ביותר, מכיל זיכרון ויכולת חזרה על חומר בצורה המדויקת שבה הוצג לראשונה בפני התלמיד. זיכרון של עובדות, הגדרות, חוקים פרוצדורות ותיאוריות שייכים לשלב זה, כל עוד לא נדרש התלמיד לתרגם עובדה לצורה חדשה, לזהות חלק המובא בדרך שונה וכד'. ברור שאין התלמיד יכול לעבור לשלב גבוה יותר של הבנה הדורש שימוש בעובדות בדרך מסוימת, מבלי שיהיה בעל הידע החיוני. לפיכך, כשאנו מודדים את מידת ההישג של רמה גבוהה יותר של התנהגות אנו באופן בלתי ישיר מעריכים את הידע ההכרחי לפעולה ברמה היותר גבוהה. במקרים אחדים תלמיד יוכל לעבוד ברמה גבוהה יותר מבלי להיות מסוגל לקבוע באופן מפורש את הידע בו הוא משתמש.

ניתן דוגמאות אחדות למטרות מפורטות בשלב הידע, מתוך תוכנית הלימודים של ביה"ס התיכון. ההנחה היא שהחומר הוצג כמעט בדיק באופן שבו מצפים מהתלמיד לזהותו או לשחזר אותו. עם תום לימוד היחידה התלמיד צריך להיות מסוגל לבצע משימות כגון:

- (א) להגדיר זווית קהה ;
- (ב) לקבוע איך מוצאים אחוז נתון של מספר ;
- (ג) לצטט את משפט פיתגורס במישור ;
- (ד) לכתוב את חוק החילוף ואת חוק הקיבוץ לחיבור מספרים ממשיים ;

(ה) לרשום את המספר המתאים לקבוצה סופית נתונה. הקשר הישיר בין הנושאים לבין בדיקת ההישגים בולט מהדוגמאות לעיל. אם מסלקים מכל יעד את הקידומת: "עם תום לימוד היחידה התלמיד צריך להיות מסוגל...", מתקבל פריט לאבחון מידת ההשגה של היעד הזה. כך למשל כדי לקבוע אם הושגה המטרה הראשונה המוצגת לעיל, המורה יכול פשוט לבקש מהתלמיד לחזור על ההגדרה של זווית קהה.

יש לשים לב לכך שהמטרות אינן מנוסחות בלשון: "על התלמיד לדעת...", שהרי ידיעה במובן זה יכולה להשתייך לפחות לשתי יכולות שונות: היכולת לחזור והיכולת להשתמש. רק הראשונה נכללת בקטגוריה ששמה: ידע, בעוד השנייה עשויה להשתייך

לקטגוריה גבוהה יותר: הבנה או יישום, או אפילו ליכולת להשתמש ברמה הגבוהה ביותר של פתרון בעיות.

פעילויות בקטגוריה 'ידע', כמו גם בקטגוריות גבוהות יותר ניתן להעריך באמצעות פריטי רב-ברירה, כפי שנראה בחמש הדוגמאות שלהלן המראות יעדים בקטגוריה זו ופריטי מבחן להערכת השגת היעד². יש לזכור כי לפי הטקסונומיה של בלום – ידע משמעו יכולת לחזור על דברים בדיוק בצורה בה נלמדו, נבין מכאן כי שאלות רב-ברירה מתאימות מאוד לבדיקת ידע כזה. לפיכך, כל אחד מפריטי ההערכה מניח דרך מסוימת שבה נלמד המידע עליו נשאלת השאלה.

1. **המטרה:** התלמיד צריך להיות מסוגל להכיר את השקילות בין שני יחסים מספריים ואת שוויון המכפלות של האיברים החיצוניים והפנימיים.

שאלה לדוגמא:

אם $r:s$ ו- $p:q$ כאשר $s \neq 0$ ו- $q \neq 0$ הם שני יחסים שווים אז:

- $p = r$ ו- $q = s$
- $q \cdot s = p \cdot r$
- $p + r = q + s$
- $p - r = q - s$
- $p \cdot s = q \cdot r$ ✓

2. **המטרה:** התלמיד צריך להיות מסוגל לקבוע את הסדר המקובל של פעולות על-מנת לבצע חישוב. שאלה לדוגמא:

כדי לפשט ביטוי מספרי המכיל פעולות חיבור, חיסור, כפל וחילוק, ללא סוגריים, צריך:

- קודם לחבר ולחסר בסדר שבו הפעולות האלו מופיעות ואחר-כך לכפול ולחלק באותו סדר.
- קודם לחבר, אחר-כך לכפול, אחר-כך לחסר ואחר-כך לחלק בסדר שבו מופיעות הפעולות.
- קודם לכפול ולחלק בסדר בו הפעולות האלו מופיעות ואחר-כך לחבר ולחסר באותו סדר. ✓
- לבצע את כל הפעולות לפי סדר הופעתן משמאל לימין.
- אפשר לבחור כל סדר שרוצים ומקבלים אותה תוצאה.

² הערת המתרגמת: בדוגמאות מכאן ואילך, מופיע ניסוח המטרה ובעקבותיו דוגמא לשאלת רב-ברירה אשר בודקת את השגתה. הבחירה הנכונה מסומנת ב-✓, כשירות לקורא העברי.

3. **המטרה:** התלמיד צריך להיות מסוגל לקבוע את יחס הסדר בקבוצת המספרים הממשיים.
שאלה לדוגמא:
נתון $a + b = c$ כש- a, b ו- c שלמים, a חיובי. מהו המשפט הנכון?
 א. a גדול מ- c .
 ב. a קטן מ- c .
 ג. b קטן מ- c .
 ד. c אף פעם לא 0.
 ה. $c - a$ תמיד חיובי. ✓
4. **המטרה:** התלמיד צריך להיות מסוגל לזהות את תכונותיו של המספר 0.
שאלה לדוגמא:
איזה משפט מהמשפטים הבאים **איננו** נכון?
 א. הסכום של אפס ומספר נתון, תמיד שווה למספר הנתון.
 ב. המכפלה של אפס במספר נתון תמיד שווה לאפס.
 ג. ההפרש בין מספר נתון לבין אפס תמיד שווה למספר הנתון.
 ד. ההפרש בין אפס לבין מספר נתון תמיד שווה לנגדי למספר הנתון.
 ה. מנת החילוק של מספר נתון באפס תמיד שווה לאפס. ✓
5. **המטרה:** התלמיד צריך להיות מסוגל לזהות את התכונות החלות על קבוצה חלקית של המספרים הממשיים.
שאלה לדוגמא:
לקבוצת המספרים הרציונאליים האי-שליליים עם פעולת החיבור והכפל יש בדיוק אחת מהתכונות הבאות. מהי התכונה?
 א. הקבוצה אינה סגורה תחת אחת משתי הפעולות.
 ב. ליותר מאיבר אחד של הקבוצה אין הפכי לכפל.
 ג. אפס איננו איבר שלה.
 ד. חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור אינו מתקיים בה.
 ה. כל התכונות הללו אינן חלות על הקבוצה הנתונה. ✓

הבנה

הקטגוריות 'הבנה' ו'יישום' מצריכות את התהליך הפסיכולוגי של הכללה או העברה (טרנספר). ההבדל בין שתי הקטגוריות הוא במידת החידוש שיש במצב החדש בהשוואה לנקודה שממנה התלמיד צריך לצאת לצורך ההכללה או ההעברה.

בעבודה המתמטית, תהליכים כמו מיומנויות הפעולות, הבאת דוגמאות להמחשת הגדרה נתונה או משפט נתון, מעבר ממילה לסימול מתמטי ולהיפך - הם כולם בקטגוריה 'הבנה', בהנחה שהחוקים או המשפטים הבסיסיים המופיעים בשאלה כבר נלמדו קודם לכן, כלומר הם חלק מה'ידע'. יש חשיבות מיוחדת במינה ל'תרגום', אותו מכניס בלום כתת-קטגוריה של 'הבנה'. בחשיבה מתמטית תרגום של סמלים מתמטיים הוא דבר בסיסי מאוד. התפקיד של קבוצת המטרות הנכללת תחת השם 'הבנה' הוא להבטיח שימוש משמעותי בסמלים ולמנוע סכנה של טיפול רוטיני בהם, אשר ימנע תחת כל שינוי קטן שבקטנים אשר נכניס בו. סכנה נוספת היא טעויות הנוגעות למושגים כגון הטעות הנפוצה של

תלמיד הכותב $\frac{1}{2}$ עבור $\frac{\cos \pi}{\cos 2\pi}$ כי צמצם תחילה ב-cos אחר-כך ב-

π ונותר עם $\frac{1}{2}$. טעות כזאת נובעת כמובן מהבנה דלה ביותר של הסימון המתמטי.

על מנת שהדוגמאות הבאות יבדקו 'הבנה', אסור כמובן שהתלמיד ייתקל בהן תוך כדי עבודתו שאם לא כן הריהו מפגין כאן רק זיכרון, כלומר 'ידע'.

שתי הדוגמאות הראשונות דורשות מהתלמיד לזהות חומר נתון כדוגמא של מושג או פעולה המוכרת לו. על מנת לעשות זאת, הוא מוכרח לתפוס את מהותו של המושג או הפעולה ולהיות מסוגל לראות מהות זו בחומר החדש.

1. **המטרה:** התלמיד יוכל לזהות שימושים בחוקי הקיבוץ, החילוף והפילוג. שאלה לדוגמה:

בחיבור שורה ארוכה של מספרים טבעיים, חיבר ראובן תחילה את המספרים אשר היחידות שלהם מסתכמות ל-10 ואחר-כך חיבר את הסכומים. החוקים בהם השתמש ראובן לשם כך הם: א. חוק החילוף ב. חוק הקיבוץ ג. חוק הפילוג. התשובה הנכונה היא:

- i. א בלבד
 ii. א ו-ב בלבד
 iii. ב בלבד
 iv. ב ו-ג בלבד
 v. א, ב ו-ג'

✓

2. **המטרה:** התלמיד יהיה מסוגל לזהות את האיחוד והחיתוך של שתי קבוצות נתונות.

שאלה לדוגמה:

מהי קבוצת החיתוך של שתי הקבוצות הבאות:

- i. קבוצת כל הגברים שגילם מעל 20
 ii. קבוצת כל הנשים שגילן מתחת ל-30

התשובה הנכונה היא:

- א. קבוצת כל הזוגות הנשואים.
 ב. קבוצת כל הזוגות הנשואים שבהם הבעל והאישה צעירים מגיל 30.
 ג. קבוצת כל הזוגות הנשואים שבהם הבעל והאישה גילם עולה על 20.
 ד. קבוצת כל הזוגות הנשואים שבהם הבעל והאישה שניהם מבוגרים מ-20 וצעירים מ-30
 ה. הקבוצה הריקה

✓

שלוש הדוגמאות הבאות בקטגוריה של 'הבנה' מצריכות ביצוע פעולות שיש להניח כי התלמיד למד אותן או על-ידי תיאורן שלב אחרי שלב (אלגוריתם) או על-ידי דוגמאות מספריות. כדי להמחיש את הבנתו הוא צריך להיות מסוגל לתת דוגמאות מקבילות בצורתן לאלה שראה, אך שונות בנתונים.

3. **המטרה:** התלמיד יוכל לפשט ביטוי מספרי או אלגברי המכיל חיבור, חיסור, כפל, חילוק עם או בלי סוגריים.

שאלה לדוגמה:

איזה מהבאים הוא פישוט של הביטוי $8 + 2 \times 3 - 8$?

- א. 11
 ב. 10
 ג. 3
 ד. -3
 ה. 26

✓

4. **המטרה:** התלמיד יוכל לעבור ממשוואה נתונה למשוואה שקולה.
שאלה לדוגמה:

המשוואה $\frac{x-2}{6} - \frac{x-3}{4} = -1$ שקולה לאחת או יותר

מהמשוואות הבאות:

א. $4x - 8 - 6x : 18 = -24$

ב. $2x - 4 - 3x - 9 = -12$

ג. $\frac{2(x-2) - 3(x-3)}{12} = -1$

ד. $\frac{4(x-2) - 6(x-3)}{24} = -24$

התשובה הנכונה היא:

i. א-ו ג בלבד.

ii. א-ו ד בלבד.

iii. ב בלבד.

✓ iv. ג בלבד.

v. ב-ו ג' בלבד.

5. **המטרה:** התלמיד יוכל למצוא את קבוצת הפתרון של שני אי-שוויונים קשורים מסוג 'וגם'.
שאלה לדוגמה:

אם x חייב להיות מספר שלם אי-שלילי קטן מ-2, איזה קבוצה מהבאות שקולה לקבוצה של

$$\left\{ x \mid \frac{2x-3}{3} < x, x \in \mathbb{N} \right\}$$

א. $\{0\}$

✓ ב. $\{0,1\}$

ג. $\{0,1,2\}$

ד. $\{0,1,2,3,4\}$

ה. הקבוצה הריקה.

ארבע הדוגמאות האחרונות למטרות בקטגוריה 'הבנה' מצריכות תרגום ממערכת סימבולית אחת לאחרת, פעולה שיש לה

חשיבות מרובה בתכניות הלימודים החדשות בהן נכנסו לשימוש סימון ומינוח מתמטי. שאלות כדוגמת הבאות בודקות באם התלמיד תפס את המשמעות של סמלים אלה.

6. **המטרה:** התלמיד יוכל לזהות ולתאר באופן מילולי את איבריה של קבוצה המתוארת באופן סימבולי. שאלה לדוגמה:

איזה מבין הפסוקים הבאים הוא פסוק אמת לגבי הקבוצה

$$\{x \mid x \geq -4, x \in I\}$$

- א. הקבוצה מכילה שלמים שליליים בלבד.
- ב. הקבוצה אינה מכילה את (-4) .
- ג. הקבוצה מכילה רק מספרים שלמים גדולים או שווים ל- (-4) . ✓
- ד. הקבוצה מכילה ארבעה מספרים שלילים וזה הכול.
- ה. הקבוצה מכילה את כל המספרים השלמים הקטנים מ- (-4) .

7. **המטרה:** התלמיד יוכל לכתוב את הביטוי המתמטי המתאים למשפט מילולי. שאלה לדוגמה:

במשך עונה מסוימת עבד ילד w שבועות וקיבל d ש"ח לשבוע. הוצאותיו במשך כל העונה היו k ש"ח. חסכוניותו (בש"ח) היו אפוא:

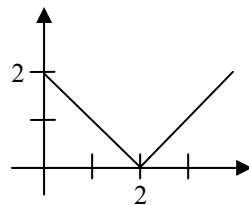
א. $w + k + d$

ב. $wk : d$

ג. $w + k - d$

ד. $wd - k$ ✓

ה. אף אחת מהתוצאות הקודמות.



8. **המטרה:** התלמיד יוכל לרשום משוואה לגרף נתון, כשהמשוואה הנדרשת מכילה ערכים מתמטיים שאלה לדוגמה:
כשנתון $x, y \in R$ איזה מהקבוצות הבאות מיוצגת על-ידי הגרף?

א. $\{(x, y) \mid y = |x| + 2\}$

✓ ב. $\{(x, y) \mid y = |-x + 2|\}$

ג. $\{(x, y) \mid y = |x + 2|\}$

ד. $\{(x, y) \mid y = |x| - 2\}$

ה. $\{(x, y) \mid y = -|x| + 2\}$

9. **המטרה:** התלמיד יוכל לתרגם משפטים מילוליים למשפטים סימבוליים של זהויות אלגבריות ולהיפך.

השאלה הראשונה שניתן כאן לדוגמא מצריכה את התרגום ממילים לסמלים והשנייה את הפעולה ההפוכה.

א. שאלה ראשונה לדוגמא:

כך נרשום באופן סימבולי את המשפט המילולי: "לכל המספרים השלמים, אם נוסיף למכפלת שני שלמים עוקבים את הגדול שבהם, הסכום יהיה שווה לריבועו של המספר הגדול": לכל $n \in I$

i. $n^2 + 1 = n(n-1) + n + 1$

ii. $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

✓ iii. $n^2 = n(n-1) + n$

iv. $(n+1)n = n^2 + n$

v. $(n-1)^2 + 2n = n^2 + 1$

ב. שאלה שנייה לדוגמא:

איזה מהמשפטים הבאים הוא תיאור מילולי של המשפט:

לכל $n \in I$ ושונה מאפס, $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$?

i. היחס בין שני שלמים שווה להפרש המתקבל מחיסור ההפכי לשני מ-1.

ii. היחס בין שני שלמים עוקבים שווה להפרש בין 1 לבין ההופכי של הגדול שביניהם.

iii. היחס בין שני שלמים עוקבים שווה להפרש בין 1 לבין ההופכי של הקטן שביניהם.

- iv. ההפכי של מספר אחד שווה להפרש המתקבל מחיסור ההפכי לשני מ-1.
- v. אף אחד מהקודמים אינו מתאר את המשפט.

מטרות בקטגוריה 'הבנה' קשורות מאוד למטרות בקטגוריה 'ידע'. למשל שאלה 2 של 'ידע' (ר' לעיל עמוד 9) בודקת האם התלמיד יודע לציין את סדר הפעולות הדרוש לפישוט של ביטוי אלגברי או מספרי. כדי לענות על שאלה 3 של 'הבנה' באופן נכון הוא חייב לדעת להוציא לפועל את העבודה במקרה נתון שאותו הוא רואה לראשונה, עם זאת המורה צריך להיות מוכן לכך שהתלמיד עשוי להיות מסוגל לבצע פעולות ברמת 'הבנה' מבלי להיות מסוגל לענות על שאלת ה'ידע' המתאימה.

יישום

כשדנים בקטגוריה 'יישום' חשוב ביותר לתת את הדעת לכך שמיון מטרות בהתאם לקטגוריות של הטקסונומיה נקבע תמיד על פי היחס בין מה שהתלמיד כבר ראה, עשה ולמד לבין מה שאנו מצפים שיעשה.

כפי שכבר הוזכר, אנו מניחים שאותו תהליך פסיכולוגי, הכללה או העברה, מונח ביסודו של ביצוע הן ברמת הבנה והן ברמת יישום. ייתכן שלכן קשה לנסח מטרות שיבחינו בין שתי הקטגוריות הללו. ההבדל העיקרי ביניהן הוא במידת החידוש שבמשימה מנקודת ראותו של התלמיד.

בעיית 'סיפור' שבה התלמיד נדרש ליישם עקרון מתמטי למצב יומיומי שייכת בדרך כלל לקטגוריה זו, בהנחה שהתלמיד לא ראה בעיה דומה בזמן שלמד את העיקרון.

פתרון של בעיית 'סיפור' בדרך כלל מצריך שני שלבים: (א) ניסוח סימבולי של סיפור המעשה הנתון בבעיה באופן מילולי. (ב) טיפול בהצגה הסימבולית, בהתאם לאלגוריתם שנלמד בעבר. מצבים אחרים שבהם התלמיד חייב לבצע הליך רב-שלבי, כמו למשל שימוש בזה אחר זה בשורה של אלגוריתמים אותם למד, הם מקרים של 'יישום' אם רק החומר החדש הוא מספיק מרוחק מהחומר שאליו נחשף התלמיד קודם לכן.

המטרות המתארות התנהגות על פי קטגוריה זאת בדרך כלל מקבלות את הצורה: "התלמיד יוכל להשתמש בעקרון נתון כדי לפתור בעיה המתוארת בצורת מצב הלקוח מחיי יומיום, משטחי המדע ומדוגמאות של שטחים אחרים במתמטיקה". המורה יכול

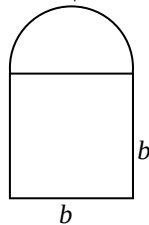
לנסח מטרות יותר ספציפיות ברמת יישום המייחסות את נושא ההוראה לתחום מסוים כמו קינמאטיקה, כימיה, מדעי החברה, או שטח מתמטי שונה מהנושא הנלמד.
הדוגמאות הבאות בודקות ביצוע ברמת 'יישום'. הן יכולות לסייע בהבהרת ההבדל בין מטרות בקטגוריה זו לבין מטרות בקטגוריה 'הבנה' - הנמוכה יותר.

שאלות לדוגמא:

1. מידותיו של מלבן הן a ס"מ ו- b ס"מ. אם כל צד יוגדל ב-10% ממידתו המקורית, בכמה אחוזים יגדל השטח?
- א. 10
ב. 11
ג. 20
ד. 21 ✓
ה. מוכרחים לדעת את ערכי a ו- b כדי להשיב.

בשאלה זאת אנו מניחים כי התלמיד למד את נוסחת השטח של מלבן ואת הדרך שבה מוצאים את התוצאה של הגדלת ערך נתון כלשהו באחוז נתון. העובדה שעל התלמיד לצרף את שני הדברים בבעיה זאת עושה אותה לבעיית 'יישום' יותר מאשר בעיית 'הבנה'.

2. הצורה שלפניך מורכבת מריבוע שמידותיו $b \times b$ וחצי מעגל שקוטרו על אחת מצלעות הריבוע. מהו בקירוב היחס בין שטח חצי העגול לשטח הריבוע?



- א. 0.2:1
ב. 0.4:1 ✓
ג. 0.8:1
ד. 1.2:1
ה. אי אפשר לחשב מהנתונים.

כדי לענות על שאלה זאת התלמיד מוכרח לצרף את הבנת נוסחאות שטח הריבוע והעגול עם הבנת היחס ופישוט ביטוי אלגברי. לכן היא בודקת ביצוע בדרגה של 'יישום' שכן נדרש כאן שימוש בעקרונות ייחודיים שהוא מכיר אך לא היה רגיל להשתמש בהם ביחד.

3. את הפולינום $p^2 - p - 6$ אפשר לפרק לגורמים $(p+2)(p-3)$. נציב בפולינום מספרים טבעיים במקום p .
 איזה משפט נכון לגבי המספרים שיתקבלו:
 א. אחדים מהם יהיו אי-זוגיים.
 ב. אפס לא יופיע.
 ג. אף אחד מהם לא יהיה ראשוני. ✓
 ד. כולם יהיו קטנים מ-100.
 ה. אף אחד מהמשפטים הקודמים אינו נכון.

בעיה זאת כמו קודמתה בודקת ביצוע ברמת 'יישום' מפני שהיא מצריכה הבנה וצירוף של מושגים אחדים – מספר אי-זוגי, מספר ראשוני, גזירת אינפורמציה מהצבה חוזרת. יצוין כי הזכרת הפירוק לגורמים בגוף השאלה עושה אותה לבעיית יישום יותר מאשר לבעיית ביצוע בדרגת אנליזה או סינתזה. ללא רמז זה לשיטת הפתרון, הבעיה הייתה מצריכה חשיבה מסוג המחקר הפתוח.

4. מתלמידי כיתה מסוימת קיבלו ציון גבוה מ-80 במבחן $\frac{2}{5}$.

בחישובן. $\frac{1}{3}$ מהנותרים קיבלו ציון בין 70 ל-80 ויותר תלמידי

הכיתה קיבלו ציון בין 50 ל-70. 12 תלמידים קיבלו ציון בין 50 ל-70. כמה תלמידים בכיתה?

במקרה זה נשתדל להראות את השלבים שהתלמיד יכול היה ללכת בהם כדי לפתור בעיה זו. הפרוצדורה היא לגמרי ישירה (כלומר אלגוריתמית) והפעולות החשבוניות והאלגבריות הן אלמנטריות. יישום זהיר של הסיפור והצירוף של אלגוריתמים אחדים הנחוצים להצלחה בפתרון, הם שעושים אותה לבעיה ברמת 'יישום'.
 א. אני יודע כי 12 תלמידים יש להם ציון שבין 50 ל-70. אני יכול למצוא איזה חלק של הכיתה מהווה קבוצה זו. אכתוב משוואה עבור המספר הכולל של תלמידי הכיתה.

ב. איזה חלק של הכיתה קיבל ציון מעל 70? $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$ מהיתרה.

ג. $\frac{1}{3}$ מהיתרה = $\frac{1}{3}$ של $\left(1 - \frac{2}{5}\right)$ או $\frac{1}{3}$ של $\frac{3}{5}$ כלומר $\frac{1}{5}$.

ד. $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ קיבלו ציון מעל 70. על כן $\frac{2}{5}$ קיבלו ציון מתחת ל-70.

ה. עכשיו אוכל לרשום את המשוואה. אם c הוא מספר התלמידים

$$\frac{2}{5}c = 12$$

ו. פתרון המשוואה נותן $c = 30$.

תלמיד מאומן היטב שאינו צופה כל קושי בטיפול בשברים היה אולי מנסה לפשט את הנתונים לפני תקיפת הבעיה העיקרית. הצעד הראשון של תלמיד כזה יהיה בודאי שלב ג' של הפתרון לעיל ואז יעשה:

$$א. \frac{1}{3} \text{ מהיתרה כלומר } \frac{1}{3} \text{ של } \left(1 - \frac{2}{5}\right) \text{ כלומר } \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

ב. מה אני יודע? $\frac{2}{5}$ מעל 80, $\frac{1}{5}$ מעל 70 ומתחת ל-80 כלומר $\frac{3}{5}$ מעל 70.

ג. מה עלי למצוא?

ועכשיו יעשה את שלבים א, ד, ה, ו, של הפתרון הקודם.

נחזור ונדגיש כי אם התלמיד ראה כבר שאלות כאלה בעבר, הריהו מגלה בפתרון שאלות אלה 'הבנה' ולא 'יישום'.

4. חיפוש פתוח

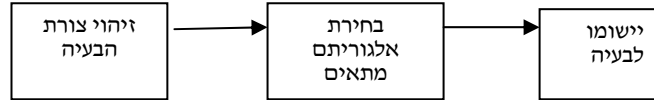
חשיבה אלגוריתמית לעומת פתרון בעיות ברמה גבוהה

בשתי הרמות של חשיבה אלגוריתמית, 'הבנה' ו'יישום', עומדת לרשות התלמיד פרוצדורה של צעד אחר צעד המובילה מהבעיה אל פתרונה. כדי להצליח בביצוע ברמת החשיבה האלגוריתמית, התלמיד צריך לצבור ידע שהוא בקי בו המורכב מפרוצדורות, אלגוריתמים ומראי מקום בצורת מלים או סמלים אחרים שבעזרתם הוא יכול לשלוף וליישם את ההליך הדרוש. כאשר אין לרשותו פרוצדורה או אלגוריתם הנותנים פתרון מלא, הרינו עוסקים במכניזם של פתרון בעיות ברמה גבוהה יותר. שתי הקטגוריות – 'אנליזה' ו'סינתזה' הן המציינות בעיות ברמה זו. הקריטריונים שעל פיהם אפשר להחליט האם בעיה שייכת לקטגוריות 'הבנה-יישום' או לקטגוריות 'אנליזה-סינתזה' הם: (א) מספר העקרונות או החוקים הנדרשים לצורך הפתרון. (ב) המרחק בין החוקים לבין הרמזים הנתונים בניסוח השאלה ובהוראות לפתרונה. (ג) הפער שיש לגשר עליו כדי לצרף את החוקים בדרך הנחוצה לפתרון הבעיה הנתונה. המאפיין המהותי הוא המניפולציה ברמה גבוהה ולא רוטינית של חומר שנלמד כבר, וברמה היותר גבוהה, גילוי של קשרים בין מושגים שנלמדו בעבר בלי קשר זה לזה.

קריטריונים אלה מדגישים שוב את החשיבות המכרעת של הידע הקודם של התלמיד, דבר שחשוב לדעת אותו על מנת להחליט לאיזו קטגוריה לשייך את הבעיה. אם קיימת אצל התלמיד זמינות של מספר רב של חוקים ויש לו ניסיון קודם בצירופיהם, בעיה שהייתה מסובכת בתקופה מסוימת נעשית לגביו הרבה פחות מסובכת ויורדת לרמה של הרגל.

ההבדל בין חשיבה אלגוריתמית לבין 'חיפוש פתוח' הוא מהותי כמו ההבדל בין חשיבה רפרודוקטיבית לבין חשיבה פרודוקטיבית. אם התלמיד צריך לעבד מחדש חומר שכבר ידוע לו, הרי זוהי עבודה בשלב החשיבה האלגוריתמית. אם הוא צריך ליצור משהו חדש לגמרי בשבילו, הריהו נמצא בשלב הגבוה ביותר של פתרון בעיות (אנליזה וסינתזה).

נוכל לאבחן את ההבדל בין חשיבה אלגוריתמית לבין פתרון בעיות ברמה גבוהה יותר גם מנקודת ראות של תהליך הפתרון עצמו. פתרון בעיות מהדרג הנמוך נעשה בסדרות של צעדים ישירים: בדרך כלל הצעד המכריע, הראשון, הוא זיהוי צורת הבעיה והכנסתה למסגרת שאליה היא שייכת בתחום הידע שכבר נרכש. אחר כך בחירת האלגוריתם המתאים מבין אלה המוכרים ולבסוף יישומו לבעיה הנתונה. תיאור בתרשים של מהלך הפתרון יהיה קווי, בכיוון אחד דרך מערכות של צעדים, למשל כך:



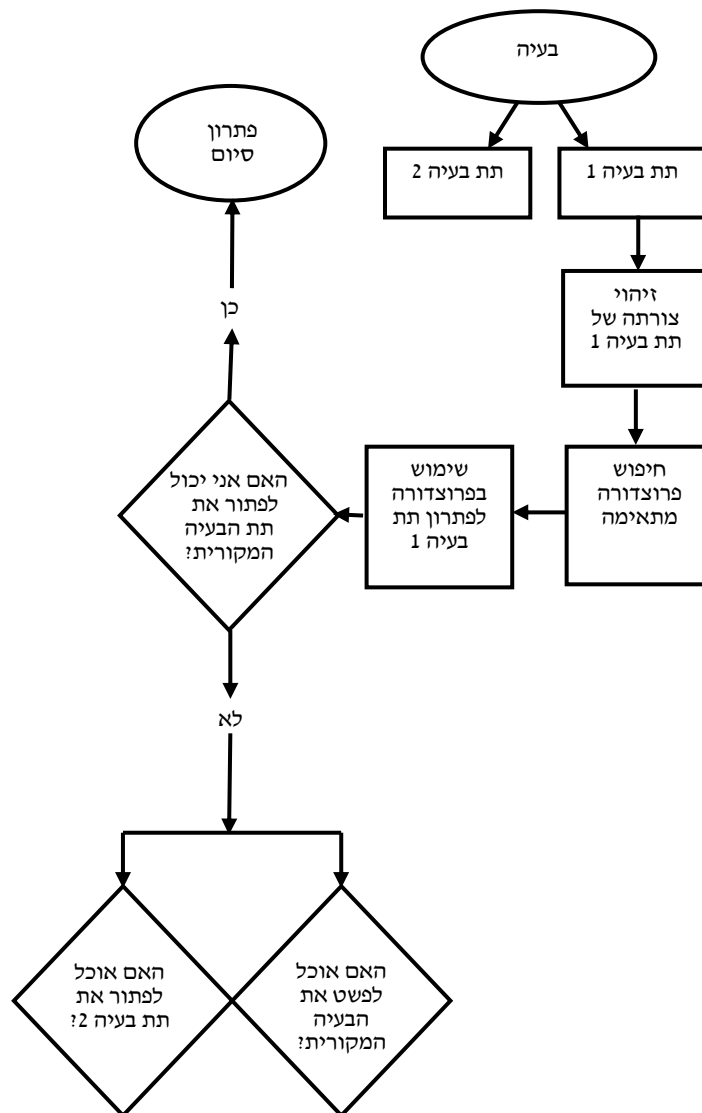
פתרון בעיות ברמה גבוהה יותר הוא הרבה יותר מסובך. התלמיד צריך לתת את הדעת לדברים רבים בבת אחת: הבעיה כפי שהיא נתונה, האפשרויות השונות לתרגום חלקיה, גיוס הידע השייך להם, הקשרים של כל אלה אל הפתרון המבוקש ועוד. נדמה כאילו יש אינטראקציה מתמדת בין הבעיה לבין חלקיה שכתוצאה ממנה צץ לפתע הרעיון המוליך אל הפתרון. בכל שלב של תהליך הפתרון, חוזרים ומחפשים ידע השייך לעניין, משווים עם הבעיה או עם אחד מחלקיה עד שהקשרים הנחוצים לפתרון, מתגלים. על כן התרשים של מהלך הפתרון מורכב מתנועה הלך ושוב בין השלבים השונים כפי שמראה התרשים בעמוד הבא.

אנליזה

אנליזה זהו השלב הנמוך מבין השניים, הנעור כאשר התלמיד אינו מכיר אלגוריתם לפתרון בעיה נתונה. הצעד הראשון שלו הוא הפרדת הבעיה לבעיות חלקיות וגילוי הקשר הפנימי בין החלקים לבין הבעיה. לעיתים קרובות יתגלה הפתרון מתוך הקשרים בין הבעיות החלקיות שיתבררו על ידי תרגום ועיבוד האינפורמציה הנתונה בבעיה. פתרון של בעיה בדרך זאת מדגים ביצוע ברמת 'אנליזה'.

למשל, התלמיד נתקל בבעיה הבאה:

מצא מספר חיובי t כך ש- $s^2 - t^2$ יהיה מספר ראשוני ו- $s = 14$. יש לנו שני משתנים ורק ערך מספרי אחד נתון. אין שום אלגוריתם או תהליך של תרגום אשר יוביל אל הפתרון לכן התלמיד מוכרח לפרק את הבעיה לחלקים ולבדוק מה הוא יודע על כל אחד מהם.



- א. האם אוכל לפשט את הביטוי $s^2 - t^2$.
- ב. $s^2 - t^2 = (s-t)(s+t)$ ('הבנה' של האלגוריתם לפירוק לגורמים של הפרש הריבועים).
- ג. נציב $s=14$ $14^2 - t^2 = (14+t)(14-t)$
- ד. זוהי מכפלה שצריכה לתת מספר ראשוני.
- ה. כדי שמכפלה תיתן מספר ראשוני אחד מגורמיה חייב להיות 1 או 1- ('ידע' של הגדרת מספר ראשוני).
- ו. $14+t$ אינו יכול להיות 1 או 1- ('הבנה' של האינפורמציה הנתונה: $s=14$ $t > 0$).
- ז. $14-t$ חייב להיות 1 או 1-.
- ח. על כן או $t=13$ או $t=15$ ('הבנה' של תהליך הפתרון של משוואה ממעלה 1).
- ט. $(14+13)$ אינו ראשוני (שוב 'הבנה' של ראשוניות $27 = 3 \times 3 \times 3$ על כן אינו ראשוני).
- י. לפיכך $t=15$ ועל כן $-1(14+15) = -29$ שהוא ראשוני.
- נחזור ונדגיש שוב כי שיוך בעיה לרמה מסוימת תלוי בידע הקודם של התלמידים. הבעיה שתוארה לעיל עשויה להיות ברמת 'אנליזה' בכיתה ט' אבל ברמת 'חשיבה אלגוריתמית', בכיתה גבוהה יותר, כשהתלמיד כבר ראה ולמד כיצד פותרים בעיות מסוג זה. הואיל וכדי לפתור בעיות ברמה הגבוהה אסור שהתלמיד יסתגל אליהן, נשאלת השאלה כיצד ניתן לאמן את התלמיד בפתרון ברמה כזאת. אם נבחן את הבעיה הקודמת ניווכח כי לפתרונה הכרחית שליטה ברמות 'ידע' ו'הבנה'. נוכל אפוא לאמן את התלמידים במיומנויות ברמות אלו המהוות תנאי הכרחי והכנה לפתרון ברמה גבוהה. פתרון הדוגמא שהובאה לעיל נשען על הבנה של פירוק לגורמים ומושג המספר הראשוני. הוא דורש גם יכולת להשתמש בכלל הסקה בסיסי שאותו ניתן ללמד באמצעות דוגמאות מסוגים שונים: אם p או q הוא אמת ו- p שקר, אזי q אמת. יש לחשוף את התלמידים לכללים כגון זה ולמגוון של בעיות שבהן ניתן להשתמש בכללים אלה. יש להבהיר כי הוראת העקרונות כשלעצמם ללא מגוון רחב של דוגמאות ליישומם, לא יקדמו את יכולת התלמידים להתמודד עם פתרון בעיות.
- אפשר לטעון שדרך טובה לחשיפה לפתרון בעיות היא להציג בפני התלמידים פתרון בעיות מסובכות שלב אחר שלב, תוך הדגשת

אסטרטגיות האופייניות לפתרון בעיות כאלה. רוב התלמידים זקוקים לדוגמאות של אסטרטגיות שימושיות לפתרון של בעיות מורכבות לפני שאפשר יהיה לצפות מהם להתמודד עם סוג זה של בעיות בכוחות עצמם. בחלק החמישי של חוברת זו יורחב על כך הדיבור.

מטרות ברמת 'אנליזה' הן בעלות הצורה "התלמיד צריך להיות מסוגל לנתח את האינפורמציה הנתונה בבעיה מסוימת לחלקיה העיקריים, ועל-ידי יצירת קשרים נכונים ביניהם, להגיע לפתרון". על המורה לתת ניסוח דומה לזה בקשר לכל נושא ונושא. נעבור לדוגמאות לפתרון בעיות ברמה הנדונה, חלקן מתאימות לביה"ס היסודי וחלקן לביה"ס העל-יסודי.

1. הבעיה

הממוצע של שמונה מספרים רציונאליים הוא 12. אחרי שמוחקים אחד מהם, הופך הממוצע של שבעת הנותרים ל-9. איזה מספר נמחק?

א. מה נתון? הממוצע של שמונה מספרים ושל שבעה מספרים מביניהם.

ב. איך מוצאים ממוצע? ('הבנה' ו'ידע')! חילוק הסכום ב-8 נותן 12. חילוק השאר ב-7 נותן 9.

ג. איך אפשר להשוות את שתי הכמויות? ('הבנה')! 8×12 נותן את כל הסכום. 7×9 נותן את הסכום הנותר.

ד. האוכל למצוא את המספר החסר? ההפרש בין הסכום הכללי לסכום המוקטן הוא $33 = 96 - 63$ שהוא המספר.

הראינו כאן את השאלות השונות שהתלמיד עשוי לשאול את עצמו במהלך חיפוש הפתרון. הדרישות להצלחה בפתרון הן הבנה טובה של חלקי הבעיה (הממוצע במקרה זה) והכרה מסוימת כי הצעד הראשון לקראת פתרון בעיה לא מוכרת הוא הבהרת הידוע בנוגע לכל אחד מהחלקים. החלק החשוב של הפתרון הוא שינוי הבעיה בעזרת הידע הקודם (אפשר לרשום במקום הממוצע את הביטוי $1/n$ של הסכום, ובמקום הסכום את הביטוי $n \times$ הממוצע).

2. הבעיה

הוכח כי כל מספר טבעי שרשום בצורתו העשרונית על-ידי שלש ספרות שוות – מתחלק ב-37.

א. מהם המספרים הנרשמים על ידי 3 ספרות זהות? 111, 222, 333 וכו'.

ב. האוכל לבטא את כולם בדרך כללית אחת:
 $100a + 10a + a = 111a$ כולם כפולות של 111.

בצעד האחרון התלמיד משתמש בעקרון שכדי להסיק שלמספר מסוים יש תכונה מסוימת המקיימת תנאי כלשהו, עליו לנסות ולבנות ביטוי אלגברי למשפחת המספרים המקיימים תנאי זה.

ג. אם 111 מתחלק ב-37 הרי כל המספרים הנתונים מתחלקים בו.

זה היה השלב העיקרי שבו נדרשת אנליזה. על סמך ההבנה של פירוק לגורמים, על התלמיד להבחין בכך שאם 37 הוא גורם של 111, אזי 37 הוא גורם של כל מספר ש-111 הוא גורם שלו. מובן מאליו שהבעיה כולה היא בעיית 'הבנה' לתלמיד שנחשף ליישומו של המשפט הכללי הקובע כי תנאי מספיק לכך ש- a יתחלק ב- b הוא שאחד מגורמיו של a מתחלק ב- b .

ד. נבדוק זאת: $\frac{111}{37} = 3$.

טיפול בנתוני הבעיה (מספרים ששלוש ספרותיהם זהות) ושינוי מספרים אלה באופן המתאים לפתרון הובילו ישירות לתוצאה המבוקשת.

3. הבעיה

תהי D קבוצת המספרים האי-זוגיים, שליליים וחיוביים (אפס איננו מספר אי-זוגי). מבצעים פעולת חשבון על שנים מאברי D . איזו פעולה נותנת איבר של D ?

(1) חיבור (2) כפל (3) חילוק (4) ממוצע חשבוני
 התשובה הנכונה היא:

א. (1) ו-(2) בלבד

ב. (2) ו-(4) בלבד

ג. (2), (3), (4) בלבד

ד. (2) ו-(3) בלבד

ה. (2) בלבד

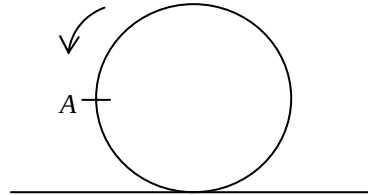


אם התלמיד לא נתקל בבעיה מסוג זה קודם לכן, עליו ליצור פתרון אנליטי. הוא מוכרח להתחשב בכל אחת מהפעולות לפי הסדר ולשאול את עצמו האם הוא יכול לקבל מספר זוגי כתוצאה הביצוע של פעולה זאת בין שני מספרים אי-זוגיים. לו השאלה הייתה

פתוחה היה עליו להוכיח שהכפל עונה על הדרישות. לצורך התשובה כאן מספיק שימצא דוגמא נגדית לחיבור, חילוק וממוצע חשבוני.

4. הבעיה

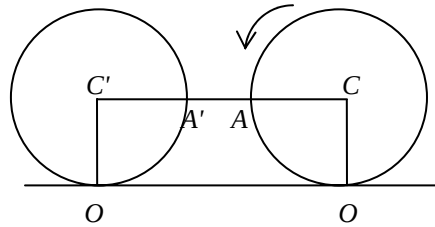
החישוק שבציור הוא בקוטר 28 ס"מ. אם הוא מתגלגל ללא החלקה, בכיוון החץ, בכמה ס"מ מתקדמת נקודה A לאחר שהושלם חצי סיבוב?



- א. 28
ב. 16
ג. 56
ד. 72
ה. 84

הפתרון של בעיה זו ודומות לה, מצריך ניתוח של המצב הפיסיקלי, באופן כזה שאפשר יהיה לקבוע ערכים מספריים בתוצאות.

א. נשרטט תרשים של המצב ונציין מה נתון. יש לשים לב ש"מה ידוע ל"י" הוא לרוב הצעד הראשון.



ב. המרחק $\overline{OO'}$ הוא $\frac{1}{2}$ ההיקף לכן $\frac{1}{2} \cdot 28\pi = 14\pi$.

ג. באמצעות גיאומטריה פורמאלית או באופן אינטואיטיבי התלמיד צריך לראות עכשיו שהמרחק $\overline{AA'}$ קשור ל- $\overline{OO'}$ כך ש- $\overline{AA'} = 14\pi - 2r$. לתלמידים מתקדמים, בעיה זאת הייתה הופכת לבעיית 'יישום', במיוחד אם התרשים נתון.

ד. $\overline{AA'} = 14\pi - 2 \cdot 14 \approx 16$

5. הבעיה

נתונות 5 נקודות במישור שאף שלוש מהן אינן על ישר אחד. בכמה דרכים אפשר לחבר אותן על-ידי קווים ישרים כך שכל נקודה תחובר בדיוק אל 3 נקודות אחרות?

- ✓ א. 0
 ב. 1
 ג. 3
 ד. 5
 ה. יותר מ-5

גם כאן התלמיד מוכרח לנתח מצב הנדסי. גישתו הראשונה תהיה ודאי לשרטט, אך לשם השגת פתרון כללי עליו לדעת לחשב את מספר הקווים שיש לשרטט בציר.

א. אם יש בכלל פתרון, הרי כל אחת מחמש הנקודות מחוברת לשלוש אחרות, זאת אומרת מכל נקודה יצאו שלושה קווים, סך-הכול $3 \times 5 = 15$ קווים.

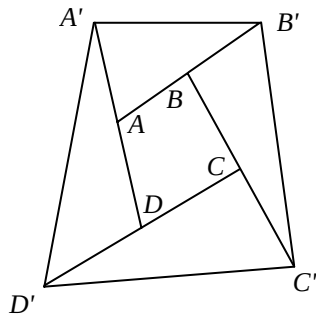
ב. כל קו נספר פעמיים. פעם אחת מ-A ל-B ופעם שנייה מ-B ל-A.

על כן יהיו באמת $7 \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$ קווים.

ג. מספר שבור של קווים – אינו מתקבל על הדעת. לכן אין כל אפשרות לשרטט צורה כזאת.

הנה עוד בעיה בגיאומטריה אוקלידית³.

6. הבעיה



נתון מרובע קמור $ABCD$ כפי שרואים בשרטוט. נאריך את הצלעות כך ש:

$$AB = BB', BC = CC'$$

$$CD = DD', DA = AA'$$

מהו היחס בין שטח המרובע $A'B'C'D'$ לבין שטח המרובע $ABCD$?

- ✓ א. 5:1
 ב. 4:1
 ג. 4.5:1
 ד. 6:1

ה. אי אפשר לחשב מנתונים אלה.

³ המחברים נמנעו מלהכניס דוגמאות רבות יותר מגיאומטריה אוקלידית לאור השינויים בתוכניות הלימודים ששמים יותר דגש על אלגברה.

הנקודה המהותית בפתרון בעיה זו היא זיהוי העובדה שמידת השטח של $DA'D'$ היא כפליים ממידת השטח של ADC (כי ADC שווה בשטחו לשטח של ADD' ששטחו הוא מחצית שטחו של $A'DD'$). הפותר יכול להגיע לכך על ידי ניתוח הבעיה. עליו למצוא דרך להשוואת שטחיהם של המרובע הגדול והמרובע הקטן, והעובדה שהשטח הנוסף מחולק למשולשים, צריכה לרמוז לו על חלוקת המרובע $ABCD$ למשולשים. לכן פתרון נכון מצריך עקרון שאינו מאד מרוחק מנתוני הבעיה עצמה.

לסיכום פתרון של כל אחת מהבעיות הללו הוא ברמת 'אנליזה' כי הוא מצריך פירוק הבעיה לתת-בעיות וארגונה מחדש או פישוטה כשידיעה קודמת תוליך ישר לפתרון.

סינתזה

ביצוע ברמת 'סינתזה' מתבטא בחיבור אלמנטים נתונים בצורה חדשה לחלוטין. כמובן שהדגש הוא על "צורה חדשה לחלוטין" והכול ביחס למה שנלמד כבר קודם. הידע שעל התלמיד ליצור, בניגוד ל"לשחזר", אינו בהכרח חדש לחלוטין עבור מומחה בשטח זה, אך כל עוד הדבר חדש ללומד, אפשר לחשוב אותו ל"חדש" מנקודת ראות חינוכית, כלומר ל-פרודוקציה, יותר מאשר לרה-פרודוקציה. ההבחנה בין אנליזה לבין סינתזה בשלב זה של חשיבה בכיוון 'חיפוש פתוח', דומה להבחנה שבין 'הבנה' לבין 'יישום' בדרגה הנמוכה יותר של חשיבה אלגוריתמית. ההבדל נמצא במידת המרחק שיש בין הפתרון לבין נתוני הבעיה, מנקודת ראותו של הפותר. פתרון בעיות 'סינתזה' מצריך לרוב מידת-מה של 'אנליזה' (שבירת הנתונים ותרגומם בניסיון למצוא קשרים חדשים ביניהם) וכמובן גם מידה מסוימת של 'ידע' רלבנטי ו'הבנה', אך בנוסף להם נחוץ גם עקרון נוסף ובלתי מוכר כדי להגיע לפתרון. ברמת 'סינתזה' התלמיד חייב להיות מסוגל לזהות את הצורך בעקרון שממבט ראשון נראה חסר כל קשר עם הבעיה, אך אפשר ליישמו על הנתונים במטרה להגיע לתוצאה. כדי להגיע לעקרון כזה יש קודם כל לנתח את החומר הנתון.

ניתן להלן דוגמאות אחדות ותוך כדי כך נצביע על עוד אפיונים של ביצוע בשלב של 'סינתזה'. גם כאן כמו ברמות היותר נמוכות נשתמש בסגנון שאלות רב-ברירה. מורים אחדים יחשו ודאי צורך בשאלות פתוחות ולא סגורות להערכת רמות החשיבה הגבוהות בהן יש הכרח לבנות מחדש את הנתונים. דבר זה מצריך מחקר מעמיק

יותר. אך כיום יש הסכמה ששאלות סגורות (בסגנון רב-ברירה) יעילות לבדיקת ידיעה בכל הרמות.⁴ אף כי המורה צריך להשתמש גם באמצעים לקביעת הדרך בה הגיעו התלמידים לפתרון, הנוכחות של אפשרויות קבועות מראש שביניהן יש לבחור את התשובה הנכונה אין בה כדי למנוע מהתלמיד את הצורך לפתור את הבעיה. כפי שיתברר בדיון בחלק מהדוגמאות שלהלן, ניסוח המסיחים הוא אמצעי ביד המורה לעשיית הבעיה ליותר מסובכת או פחות מסובכת לפי שיקול הדעת של המורה.

סוג אחד של בעיות שבהן בדרך כלל נדרשת חשיבה ברמת סינתזה הן בעיות בהן התלמיד צריך להגיע להפשטה ולסמל ואף להוכיח יחסים כלליים המובאים בדוגמאות מספריות. שלוש הדוגמאות הראשונות הן מסוג זה.

1. הבעיה

לפניך ארבעה פסוקים מספריים:

$$3 \times 1 + 1 = 2 \times 2 \quad \text{i.}$$

$$6 \times 4 + 1 = 5 \times 5 \quad \text{ii.}$$

$$\frac{7}{2} \times \frac{3}{2} + 1 = 2 \frac{1}{2} \times 2 \frac{1}{2} \quad \text{iii.}$$

$$2.1 \times 0.1 + 1 = 1.1 \times 1.1 \quad \text{iv.}$$

איזה מהפסוקים המספריים הבאים מתאים לכלל המודגם בפסוקים המספריים לעיל?



$$1 \times (-1) + 1 = 0 \times 0 \quad \text{א.}$$

$$(-5) \times 2 + 1 = (-5) \times (-3) \quad \text{ב.}$$

$$(-7) \times 5 - 1 = 6 \times (-6) \quad \text{ג.}$$

$$(-5) \times (-3) + 1 = 4 \times 4 \quad \text{ד.}$$

$$10 \times 5 - 1 = 7 \times 7 \quad \text{ה.}$$

בתהליך הפתרון של בעיה זאת, התלמיד מוכרח להגיע להפשטה של הקשר המשותף לארבע הדוגמאות הנתונות ואז להחליט באיזו מחמש התשובות הקשר הזה קיים. הואיל והפשטה כזאת אינה יכולה להתבצע בהתאם לאלגוריתם ישיר או תהליך

⁴ ר' למשל

The National Council of Teachers of Mathematics (1961): *Evaluation in mathematics: 26th yearbook*, Washington, D.C.: The Council.

אנליטי, פתרון בעיה כזאת שיד לקטגוריה של 'סינתזה'. אפשר גם לתת מסיחים אלגבריים, הנה כך.

2. הבעיה

עליך לחקור את הפסוקים המספריים הבאים:

$$i. \quad 3 \times 1 + 1 = 2 \times 2$$

$$ii. \quad 6 \times 4 + 1 = 5 \times 5$$

$$iii. \quad \frac{7}{2} \times \frac{3}{2} + 1 = 2 \frac{1}{2} \times 2 \frac{1}{2}$$

$$iv. \quad 2.1 \times 0.1 + 1 = 1.1 \times 1.1$$

באיזה מהפסוקים האלגבריים הבאים אפשר להשתמש כדי להוכיח את ההכללה האלגברית של הפסוקים המספריים הללו? לכל k ממשי:



$$א. \quad (k-1)(k+1) = k^2 - 1$$

$$ב. \quad (k-1)(2k+1) + 1 = (2k-1)k$$

$$ג. \quad (2k-2)(k+3) = (k+1)(2k+6)$$

$$ד. \quad (2k+3)k + 1 = (k+1)(2k+1)$$

ה. אף אחד מהנוכחים

בפריט זה נוצל הניסוח של "רב ברירה" כדי לעשות את הפתרון רחוק יותר (מהנתונים) מאשר היה בצורה אחרת של הצגת השאלה. התלמיד צריך קודם כל להכליל את הדוגמאות ל- $k^2 = (k+1)(k-1) + 1$ ואז עליו לעשות טרנספורמציה אלגברית ('הבנה') כדי שזאת תתאים לנוסחה א.

בעיה 3 היא בעיה מעט יותר מסובכת מאותו סוג.

3. הבעיה

חקירת הטבלה הבאה של ריבועים מוליכה לכלל מעניין:

n	1	9	2	8	3	7	4	6	5
n^2	1	81	4	64	9	49	16	36	25

על-ידי איזו עובדה מהעובדות הבאות אפשר להסביר זאת?

לכל מספר טבעי n קיים:

$$א. \quad (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$$

$$ב. \quad (n^2 - 1) = (n-1)(n+1)$$

ג. $100 - n^2 = (10 - n)(10 + n)$
 ד. $(10 - n)^2 - n^2$ מתחלק ב-10. ✓

ה. אף אחת מהאפשרויות הנ"ל אינה מתאימה.

כדי להגיע לתשובה הנכונה על התלמיד לזהות ולהיות מסוגל להסביר באופן סימבולי תכונות אחדות של התופעה המוצגת בטבלה.

- i. התופעה בנויה על קשר בין הריבוע של n לבין הריבוע של $10 - n$.
- ii. העובדה שההצגה העשרונית של שני מספרים אלה מסתיימת באותה סיפרה שקולה לעובדה שההפרש ביניהן מתחלק ב-10.
- iii. עובדה זו יש להסיק באופן אלגברי על ידי פיתוח אלגברי ופישוט של ההפרש: $(10 - n)^2 - n^2$
 כך:

$$\begin{aligned}(10 - n)^2 - n^2 &= 100 - 20n + n^2 - n^2 \\ &= 100 - 20n \\ &= 10(10 - 2n)\end{aligned}$$

והביטוי האחרון מתחלק ב-10.

כדי לבצע את הצעד האחרון על התלמיד להבין את האלגוריתם של מעבר מביטוי אלגברי אחד לביטוי אלגברי שני שקול לו ואת תכונות החילוק.

4. הבעיה

בכמה דרכים שונות אפשר לרשום את $\frac{1}{2}$ כסכום של שני שברים חיוביים שהמונה שלהם הוא 1 והמכנה הוא מספר טבעי?

- א. 0
- ב. 1
- ג. 2 ✓
- ד. 4
- ה. יותר מ-4

i. כדי לפתור את הבעיה התלמיד חייב לראות מיד צירוף אחד

לפחות המתאים לתנאי הבעיה והוא $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

ii. עתה, נוסף לכך $\frac{1}{2} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ כאשר $m \neq n$, $m, n \neq 4$. לפיכך

$m > 4$ מחייב ש: $n < 4$ (או להיפך). זהו שלב הסינתזה שהוא הכרחי לשם פתרון. אין הכרח שהתלמיד ידע לנסח זאת באופן

פורמאלי כמו כאן. עליו פשוט לראות כי אם $\frac{1}{2}$ הוא סכום של

שני שברים שאינם שווים, אזי אחד מהם חייב להיות גדול מ-

$$\frac{1}{4} \text{ והשני קטן מ-} \frac{1}{4}.$$

iii. נבדוק את האפשרויות של $m < 4$: אם $m = 3$ הרי תנאי

הבעיה יתקיימו על-ידי $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. עבור $m = 2$ או 1 התנאים

לא יכולים להתקיים על-ידי n חיובי כי $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \neq \frac{1}{2}$ או

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{n} \neq \frac{1}{2}$$

שאלה זו שונה ומעט יותר קשה משלוש הראשונות. לגבי רוב התלמידים הנתונים בבעיה זאת רחוקים יותר מהפתרון מאשר בבעיה שאת נתונה המספרים צריך להכליל. תלמידים רבים עשויים לגשת לפתרון בעיות מסוג זה על-ידי ניסוי וטעייה. כך יגיעו

אולי למקרים המוכרים $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ו- $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. אבל אז יש

למצוא הוכחה לכך שאלה הם שני המקרים היחידים. זאת יש לעשות תוך בחינה לעומק של שני המקרים המוכרים תוך התחשבות בדרישות הבעיה, ונקיטת שלבים ii, iii של ההוכחה. זהו הליך די מקובל בפתרון בעיות. על מנת להביא את התלמידים ליכולת לנקוט בהליך זה, המורה יכול לחשוף אותם למגוון דוגמאות שבהן קל ליצור מקרים פרטיים שמתאימים לפתרון הבעיה על-ידי ניסוי וטעייה ואז מגיעים באופן אינטואיטיבי לפתרון הכללי של הבעיה על-ידי בחינת החוקיות הנשקפת מהמקרים הפרטיים.

הבעיה הבאה היא דוגמא מעניינת שיכולה להיפתר באורח אינטואיטיבי אפילו ע"י תלמידים צעירים מוכשרים.

5. הבעיה

נתון ריבוע של תשע שורות ותשע עמודות. בכל משבצת רשום או 1 או (-1). נוכל לחשב את המכפלות של תשעת המספרים שבכל שורה ונסמן אותן ב- $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$. נוכל גם לחשב את המכפלות של תשעת המספרים שבכל עמודה ולסמן $b_1, b_2, \dots, b_9$. יש להוכיח כי הסכום של 18 המכפלות $a_1 + a_2 + \dots + a_9 + b_1 + b_2 + \dots + b_9$ לא יכול להיות 0.

ההוכחה נשענת על היכולת לראות: (1) שכל טבלה כזאת אפשר לקבל מטבלה דומה בה כל המספרים הם 1 וכל אחת מהמכפלות שווה 1 (והסכום הנדון הוא אז 18). (2) ששינוי מ-1 ל-(-1) (או להיפך) בטבלה הנתונה מתבטא בשינוי של ± 4 בסכום הנדון (כי כל מספר שייך גם לעמודה וגם לשורה). לפיכך הסכום הנדרש יהיה תמיד $18 \pm 4k$ וזה לעולם לא יכול להגיע לאפס עבור k טבעי. גם כאן כמו בבעיה 4, האסטרטגיה היא: כאשר נתקלים בנתונים מספריים אשר צריכים לקיים תנאים רבים, טוב לנסות קודם כל למצוא ולבדוק מקרים מספריים פשוטים אחדים העונים על התנאים ולנסות אז להגיע אל ההכללה. בעיה 5 מצביעה על כך שהאסטרטגיה הזאת יכולה להתאים אפילו לחומר די בסיסי (סכומים ומכפלות של מספרים שלמים חיוביים ושליליים).

סוג אחר של בעיות שפתרון מצריך חשיבה ברמת סינתזה הוא זה שבו נדרשת הוכחה חדשה לתלמיד התובעת לקשור יחד רעיונות שמלכתחילה הם רחוקים זה מזה. הבעיה הבאה היא דוגמא בהירה במיוחד לביצוע ברמת סינתזה, לא רק משום שלפתרונה יש להשתמש בעקרון שאינו נכלל בנתונים ואינו נרמז בהם, אלא גם משום שהיא דורשת שיטת הוכחה לא ישירה ודי מתוחכמת.

6. הבעיה

על סמך ההנחה כי $\sqrt{2}$ הוא אי-רציונאלי, ניתן להוכיח ש- $a + \sqrt{2}$ עבור a רציונאלי, חייב גם הוא להיות מספר אי-רציונאלי. על איזה משפט מהבאים צריך להסתמך לשם כך?

א. ההפרש בין שני מספרים רציונאליים הוא תמיד מספר



רציונאלי.

ב. $\sqrt{3}$ הוא גם כן מספר אי-רציונאלי.

- ג. סכום של שני מספרים אי-רציונאליים הוא לעיתים מספר רציונאלי ולעיתים מספר אי-רציונאלי.
- ד. המכפלה של מספר רציונאלי שונה מאפס במספר אי-רציונאלי היא תמיד מספר אי-רציונאלי.
- ה. באף אחד מהקודמים לא נוכל להיעזר לשם כך.

התלמיד מוכרח לראות כי למרות שהוא נשאל על סכום, אפשר להסתייע באפשרות א' בנוגע להפרש באופן הבא :

- i. נניח כי $a + \sqrt{2}$ רציונאלי.
- ii. נתון כי a רציונאלי.
- iii. לכן לפי אפשרות א גם $(a + \sqrt{2}) - a = \sqrt{2}$ הוא רציונאלי.
- iv. אבל $\sqrt{2}$ אי-רציונאלי.
- v. על כן $a + \sqrt{2}$ הוא אי-רציונאלי.

למרות שעל התלמיד להשתמש בשורה של הנמקות, לא זוהי הסיבה לכך שבעיה זאת נכללת ברמת 'סינתזה'". הדבר החשוב הוא שההוכחה היא לגמרי חדשה עבור התלמיד. אם הוא פתר בעיה כדוגמת זאת, למשל בעיה דומה שבה מופיע $\sqrt{3}$ במקום $\sqrt{2}$, הרי שהפתרון מציג כושר ביצוע ברמת 'הבנה'.

דוגמא זו יכולה להמחיש גם כיצד על-ידי שאלות "רב-ברירה" אפשר להקל על פתרונה של בעיה קשה. הכללת האפשרות של חיסור שני מספרים רציונאליים, צריכה לקרב את התלמיד אל הפתרון. ההכרה כי צעד זה הוא המתאים להוכחה, היא עצמה ברמת 'סינתזה'.

כפי שהזכרנו קודם, למרות שכל פתרון יכול לייצג יכולת ביצוע ברמות הכרתיות שונות התלויות בניסיון הקודם של הפותר, יש גם בעיות שבהן את הפתרון אפשר להשיג בדרכים שונות המייצגות ביצוע ברמות הכרתיות שונות. למשל פתרון לבעיות מסוימות שהמתמטיקאים מכנים אותו "אלגנטי", מושג ברמת 'סינתזה', אבל אפשר להגיע אל הפתרון גם על-ידי יישום אלגוריתם ידוע. הדרך שבה בוחר התלמיד יכולה לשמש קנה-מידה לבגרותו המתמטית.

שתי הבעיות הבאות הן כאלה שיש להן פתרונות בשתי דרכים שונות, אחת ברמת 'סינתזה' ואחת ברמת 'הבנה'. הן משמשות דוגמאות להבדל בין חשיבה אלגוריתמית לבין חשיבה ברמה גבוהה יותר.

7. הבעיה

מהו הסכום של :

$$? \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + \frac{1}{8 \times 9}$$

א. $2\frac{1}{9}$

ב. $1\frac{8}{9}$

ג. $\frac{7}{9}$

ד. $\frac{8}{9}$ ✓

ה. מספר אחר

תלמיד אשר רואה בתרגיל זה פשוט סכום ארוך של שברים, יוכל להשתמש בתהליך של סכום שברים. זהו ביצוע ברמת 'הבנה'. אך תלמיד שעשה כבר עבודה בסכומים ארוכים מסוג זה, שבהם המחוברים נשמעים לכלל כלשהו, עשוי להתחיל בחיפוש חוקיות בסכומים החלקיים כמו להלן :

i. ה'סכום' של מחובר אחד : $\frac{1}{2}$

סכום שני מחוברים : $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

סכום שלושה מחוברים : $\frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$

ii. דבר זה מתחיל להראות כאילו כל סכום בסדרת הסכומים החלקיים הוא כזה שמונהו קטן באחד ממכנהו והמונה שווה למספר המחוברים. כאן על בסיס הכללה זו ועל פי התשובות שעומדות לרשותו, יכול התלמיד לנחש כי התשובה הנכונה היא

$\frac{8}{9}$ (מסיח ד). תלמיד שיודע להיעזר באינדוקציה מתמטית יוכל

להוכיח זאת כך :

iii. אנו מנסים להראות כי סכום n מחוברים הוא $\frac{n}{n+1}$. האיבר

ה- $n+1$ הוא $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ על כן סכום של $n+1$ מחוברים

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \text{ הוא:}$$

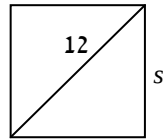
ההבדל בין שתי השיטות לפתרון של אותה בעיה ממחיש את ההבדל בין שתי רמות של חשיבה מתמטית. הראשונה האלגוריתמית, תלויה רק בהבנת החוק לחיבור מספרים רציונאליים וחוק הקיבוץ (החוק האסוציאטיבי). השלב המכריע בפתרון הוא איפוא הזיהוי של השאלה כבעיה של חיבור שברים ושימוש באלגוריתם.

לפתרון המלא בדרך האינדוקציה יש שתי תכונות העושות אותו לדוגמא לרמת 'סינתזה': (1). צרוף של עקרונות אחדים ומיומנויות: הגישה ההויריסטית אל סכום ארוך (המצריכה כמובן קודם כל לראות שיש כאן חוקיות), יכולת לזהות מצב שבו האינדוקציה המתמטית מתאימה לשם הוכחה, יכולת לבצע את האינדוקציה, יכולת לסמן באופן יעיל ונכון את הקשרים בין המונה והמכנה לבין האיבר ויכולת ביצוע פעולות אלגבריות. (2). העקרונות שיש להשתמש בהם מרוחקים מאוד מהבעיה הנתונה. התלמיד לא כוון במפורש אל שימוש ישיר באינדוקציה מתמטית בפתרון, ולא נאמר לו למצוא פתרון לשאלה פרטית זאת על-ידי הכללתה.

ללא ההוכחה המלאה, הפתרון בדרך השנייה עד שלב iii מייצג ביצוע ברמה קצת יותר נמוכה. כמו בשלוש הדוגמאות הראשונות של 'סינתזה', הצעד העיקרי הוא הפשטה מקבוצה של פסוקים מספריים. על מנת לנחש היטב את הסכום בביטחון כלשהו, על התלמיד לרכוש לו ניסיון מסוים בטיפול בסכומים חלקיים של סדרה הנשמעת לחוק כלשהו. הצגתה של השאלה בצורת "רב ברירה" מביאה שוב את הפתרון ברמה גבוהה אל תחום השגתו של התלמיד שלא למד אינדוקציה מתמטית ומחזקת את כושר הניבוי.

בבעיה האחרונה יש פער גדול בין הידע וההבנה הנדרשים לפתרון ברמה האלגוריתמית הנמוכה ואלה הנדרשים לפתרון ברמה הגבוהה. הדוגמא הבאה מצביעה באופן יותר חי על אחד המאפיינים של חשיבה ברמה גבוהה שאינה תלויה במספר העקרונות שיש להביאם לידי שימוש. זוהי היכולת לראות חומר נתון בצורה שונה מהמוצגת ישירות בנוסח הבעיה.

8. הבעיה

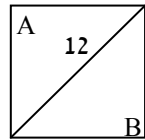


מידת האורך של האלכסון בריבוע היא 12 ס"מ. מה שטח הריבוע בסמ"ר?

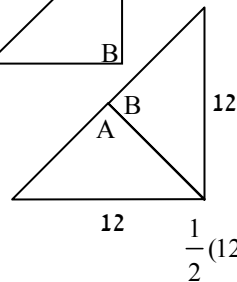
תלמיד שמבין היטב את משפט פיתגורס ואת נוסחת שטח הריבוע יוכל ליישם אותם כאן כך:

- א. ידוע לי אורך האלכסון אך עלי למצוא את אורך הצלע.
 ב. שתי צלעות סמוכות והאלכסון יוצרים משולש ישר זווית.
 ג. אוכל לרשום $s^2 + s^2 = (12)^2$ ולפתור עבור s^2 שהוא השטח.
 $s^2 = 72$

בשיטה זו, שהיא דוגמא לחשיבה אלגוריתמית ברמת 'הבנה' או 'יישום', בודאי ישתמש תלמיד שיש לו נסיון רב והבנה של משפט פיתגורס. זוהי גם הדרך הישירה לתלמיד שרוצה למצוא מיד את הפתרון המספרי. אך תלמיד שלא למד את משפט פיתגורס יצטרך לחפש אחרי סידור אחר של הנתונים. כדי להגיע לפתרון הבא, שהוא טיפוסי להבנה ברמת 'סינתזה'. התלמיד צריך לדעת, לפחות באופן אינטואיטיבי, שמידת הזווית הנוצרת על-ידי האלכסון היא 45° , ושם חותכים צורה ומסדרים את החלקים באופן אחר, השטח לא משתנה. הוא עשוי לחשוב כך:



א. נחתוך את הריבוע הנתון לאורך האלכסון



ונשים את החלקים כך:

ב. שטח המשולש הזה הוא: $\frac{1}{2}(12 \times 12) = 72$

שני הפתרונות האלה מציגים באופן בהיר את ההבדל בין יישום ישיר של אלגוריתמים המאפיין ביצוע ברמה מתמטית נמוכה לבין סידור מושלם של החלקים לפי דרישות הבעיה המאפיין את רמת הסינתזה.

5. מה יכולים המורים לעשות?

אמרנו בראשית דברינו כי אחת הסיבות החשובות להוראת מתמטיקה היא ערכיה העצמיים. כדי להשיג מטרה זאת מתוכננות רבות מתוכניות הלימודים החדשות במתמטיקה להגברת הערכתם של התלמידים למבנים מתמטיים ולהבאת תהליכים מתמטיים של ממש לכלל מימוש על-ידי הכנסה מוקדמת של סימבוליקה מדויקת והגדרות הנותנות לשיטות הייחודיות את כוחן. חלק חשוב ביותר של תהליך הלמידה הוא מגע עם שיטות שבעזרתן מפתחים את המתמטיקה, ארגונים של רעיונות מוכרים ושונים, בדרך חדשה כדי להוציא מסקנות חדשות. הדרך הטובה ביותר לבסס מגע זה ולהעמיד את התלמידים על טבעה של המתמטיקה, היא לתת לתלמידים להתמודד בעצמם עם פתרון-בעיות. לכן המורים צריכים לנסות להכשיר את תלמידיהם לחשיבה מתמטית ברמה גבוהה, אך יחד עם זה, חלק חשוב של עבודתם הוא להקנות גוף-ידע מסוים ותוך כדי כך לפתח קבוצה גדולה של פרוצדורות לפתרון בעיות.

כשאנו מלמדים את התלמיד כיצד לפתור בעיה מסוימת ואחר-כך מבקשים אותו לפתור בעצמו את אותה בעיה או להשתמש באותן שיטות כדי לפתור בעיה מקבילה, ביצועיו של התלמיד יהיו ברמת ידע, הבנה או יישום. הוראה כזאת מהווה תפקיד חשוב ובעל ערך רב וחלק ניכר מעבודתנו בביה"ס שייך לה. ברור גם לכל אדם בר-דעת שדרך הוראה שיטתית ברמה זו היא חיונית כדי שהתלמיד יפתח את יכולתו לפתור בעיות ברמה יותר גבוהה.

ניתוח משימות

ניתוח משימות יוכל לעזור למורה בהוראת פתרון בעיות אלגוריתמיות ובהבנת הנדרש בביצוע ברמה גבוהה יותר. מושג זה פותח על-ידי גאנייה (Gagné 1963) לשימוש בתכנון האימון במיומנות מסובכת. הדבר הבסיסי בניתוח משימות הוא שאנו יכולים לפרק משימה מסובכת לתת-משימות המרכיבות אותה, וליצור יחסים מסוימים ביניהן. אימון בביצוע של תת-המשימות מוכרח להקדים את האימון בביצוע של המשימה השלמה.

נסתייע בדוגמא שתראה כיצד ניתן ליישם פרוצדורה זו של ניתוח משימות לארגון ולתכני ההוראה כך שיושגו מטרות חינוכיות,

במיוחד במתמטיקה, בה חלק ניכר מהחומר הוא על פי טבעו מצטבר. נניח כי תוך פיתוח היחסים בין פירוק לגורמים של רב-איבר לבין פירוק לגורמים של מספרים, רוצה המורה להציג את ההוכחה לעובדה ש- $n^2 - 1, n \in I$ יכול לייצר לכל היותר מספר ראשוני אחד. לשם כך עליו לנתח את ההוכחה כדי להבטיח שתלמידיו יודעים את ההגדרות והמשפטים שבהם יש להשתמש בכל צעד. שלבי ההוכחה הם התת-משימות, והמשימה הכללית היא ארגון התוצאות של התת-משימות כך שנשיג את ההוכחה השלמה. ההיבט הקריטי של ביצוע מבחינת התלמיד אשר פעם לתמיד השתלט על תת-משימות אחדות, הוא להכיר מהי הדרך שבה יצרף אותן כדי ליצור פתרון לבעיה נתונה. הטיפוסים הבאים של אנליזה יהיו לעזר רב למורה בזיהוי התת-משימות עבור תלמידיו ובהצבעה על הצעדים שבהם הוא צופה קשיים מיוחדים במינם.

שאלה

יש להראות כי $n^2 - 1, n \in I$ אינו יכול לתת יותר ממספר ראשוני אחד.

א. כדי ש- $n^2 - 1$ יהיה ראשוני, אחד מגורמיו חייב להיות 1 או 1. (התלמיד צריך לדעת את הגדרת המספר הראשוני).

ב. $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$ (התלמיד צריך לדעת לפרק הפרש בין שני ריבועים).

$$n-1 = \pm 1 \text{ או } n+1 = \pm 1$$

$$n+1 = +1 \Rightarrow n = 0$$

$$n+1 = -1 \Rightarrow n = -2$$

$$n-1 = +1 \Rightarrow n = +2$$

$$n-1 = -1 \Rightarrow n = 0$$

(התלמיד חייב לדעת איך לפתור משוואה פשוטה בנעלם אחד עם פתרון חיובי או שלילי).

$$n = 0 \Rightarrow n^2 - 1 = -1$$

$$n = \pm 2 \Rightarrow n^2 - 1 = 3$$

(התלמיד צריך לדעת איך להציב ערך מסוים בתוך ביטוי ריבועי).

ה. 3 הוא הערך היחיד של $n^2 - 1$ שהוא ראשוני. (התלמיד צריך לדעת לזהות מספרים ראשוניים).

מדוגמא זאת עולה באופן ברור שניתוח משימות יש להחיל על חומר הוראה כדי לראות מהן המיומנויות המתמטיות שעל התלמיד לבצע בהצלחה בחומר הנתון. בבחירת דוגמאות ובניתוח שיטות הפתרון של כל קטגוריה במיון של המטרות המתמטיות שהזכרנו בפרקים הקודמים, השתמשנו בניתוח-משימות כדי להחליט מה התלמיד צריך לעשות כדי לפתור כל בעיה. רמת הביצוע הנדרשת תלויה ביחס שבין הדברים שהתלמיד צריך לעשות לבין הדברים שהוא כבר יודע לעשות. אם הוא למד כבר במפורש את השיטה הנדרשת לפתרון בעיה, רמת הביצוע שלו תהיה בדרגה שקראנו לה: 'חשיבה אלגוריתמית'. אם פתרון מוצלח תלוי במבט חדש כלשהו או בצירוף חדש של מרכיבים מחומר ידוע, אז הוא בדרגה גבוהה יותר - אנליזה או סינתזה.

העובדה שאנו יכולים לפרק פתרון של בעיה נתונה אפילו מסובכת, לסדרה של תת-משימות, אומרת ששיטת הפתרון ניתנת להוראה מפורשת ועל ידי כך נעשה התלמיד מסוגל לפתור בעיות מקבילות באופן אלגוריתמי. חשיבה מתמטית בדרג יותר גבוהה, היא לא אלגוריתמית, היא תלויה ביכולתו של התלמיד להשתמש בחומר שלמד בדרכים חדשות לו. לכן הבעיה בהוראה החותרת לחשיבה בדרג גבוהה היא איך להעלות את יכולתו של התלמיד לראות את החומר במבט חדש ולאחר דרכים המתאימות ביותר לחקירה. עלינו להדגיש שוב שעדיין פתוחה השאלה באיזו מידה הצגת שיטות פתרון (אלגוריתמים) לבעיות ברמה גבוהה גוררת את היכולת לפתור בעיות חדשות שאינן שייכות ישירות לשיטת הפתרון שפותחה.

אין שיטה בדוקה

צינו כבר כי אין שיטה מקובלת אחת לפיתוח יכולת הפתרון של בעיות ברמות אנליזה וסינתזה. חשיבה מתמטית בדרג גבוהה תלויה בקליטת גוף-הידע בצורה מאוד משמעותית, וביכולת של התלמיד לצרף יחד מושגים שהם למראית-עין חסרי כל קשר ולראות את הדרך לפתרון בעיה או להכללה של רעיון בדרך שלא נסללה לפניו. נראה שפתרון מקורי שכזה, נעור תוך כדי התבוננות והתעמקות ביחסים בין דברים שונים בתכלית. לא ידוע די על התנאים אשר מביאים לכך.

מאידך, בניתוח פתרון בעיות בדרך גבוהה, אנו יכולים לזהות מיומנויות בסיסיות הנכנסות למסגרת של ביצוע מתמטי ברמה גבוהה. אפשר להניח שאם המורה יפריד מיומנויות אלה ויביא בפני

תלמידיו דוגמאות לפתרון בעיות ברמת אנליזה וסינתזה הוא יוכל לעזור ביצירת חשיבה ברמה גבוהה אצל תלמידיו. הוראה שכזאת כפי הנראה איננה תנאי מספיק ליצירת חשיבה כזאת אך יתכן מאוד שהיא תנאי הכרחי לכך.

צורך במודעות של המורה למרחב המלא של יכולות ביצוע

חשיבה יצירתית בכיתה הלומדת מתמטיקה מתחילה באחריותו ובשליטתו של המורה עצמו על כל התחום של ביצוע במתמטיקה. בסעיפים 3 ו-4 ניסינו לעורר מודעות לכך.

הבנה טובה היא הכרחית

מנקודת ראותו של התלמיד, הכנה בסיסית לחשיבה ברמה גבוהה היא הבנה טובה של מושגים ופעולות מתמטיים. הבה נסקור מחדש דוגמאות אחדות של הצורך בהעמקת ההבנה. אף תלמיד לא יוכל להצליח במשימה:

יש למצוא את מספר האפסים בהם מסתיים המספר $100!$

$$(100! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 99 \times 100)$$

אם הבנתו בלוח הכפל אינה מגעת לידי ניסוח כללים לקבלת אפס בסוף מספר. אף תלמיד אינו יכול לגלות את קיומו או אי-קיומו של חוק הקיבוץ על פעולת מציאת הממוצע האריתמטי בתחום הרציונאליים, מבלי שיש לו הבנה שלמה של הפעולה למציאת ממוצע אריתמטי ושל תכונת הקיבוציות. בכתה א' כשרושמים $2+3=5$ יכולה להתעורר שאלה האם $5=2+3$ הוא גם כן פסוק

אמת? כשרושמים $\frac{a+b}{c}$ בצורת $\frac{1}{c}(a+b)$ סומכים על ידיעתו של

התלמיד את הקשר שבין ההפכי לכפל לבין החילוק. הדגשת היחסים בין פירוק לגורמים של ביטוי אלגברי לבין יצירת מספרים ראשוניים, דורשת הבנה של פעולת הפירוק האלגברי לגורמים כמו גם של מושג המספר הראשוני. הדגשת ההבדל בין סיפרה לבין מספר צריכה להבהיר שכשרושמים את המספר 7 לפי בסיס חמש כ-12 אין זה הופך אותו למספר זוגי.

הבנה טובה של מושג או פעולה, משמעותה גם שקבוצת הדוגמאות שבה יכול התלמיד להשתמש או שאותה יכול התלמיד לזהות, איננה צרה מדי. לפיכך המורה יכול לחזק הבנה טובה של מושג מתמטי או פעולה חדשה על-ידי הצגתם, כשאפשר, ביותר

מדרך אחת, על-ידי קשירתם לסיטואציות רבות ועל-ידי קריאה לתלמידים לזהותם ביישומים שונים בפרקים שונים.

ראוי להשתמש במודלים אחדים

דרך חשובה להעמקת ההבנה היא להצביע על מודל אשר מגשים מבנה מסוים באופן מציאותי. למשל, הטלה אורתוגונאלית אפשר ללמד כטרנספורמציה גיאומטרית אבסטרקטית, אבל הבנתו של התלמיד תועמק לאין שיעור אם נצביע על כך שאפשר לראות הטלה אורתוגונאלית כצללים של גוף כשהשמש נמצאת בדיוק בניצב מעל לראש. התלמיד ישיג אולי הבנה עמוקה יותר של מערכת אקסיומות בגיאומטריה אם נציב בפניו מודל של גיאומטריה סופית שבה תחנות אוטובוס, תלמידים או ספרים מסמנים נקודות, ומסלולים, וועדות או ספריות מייצגים ישרים. הסימטריה של צורה גיאומטרית תיקלט על-ידי מספר רב יותר של תלמידים אם ניגש אליה גם מנקודת ראות של מספר הדרכים שאפשר לארוז אותה בקופסה מתאימה.

על פי עצם טבעה, המתמטיקה היא תורת היחסים. יחסים אלה הם מופשטים ונעשים בלתי תלויים בטבעם של האלמנטים שביניהם נוצרו היחסים. אין ספק שההבנה של יחסים מתמטיים גדלה על-ידי הצבעה על קיומם במספר עשיר ומגוון של מודלים הלקוחים מתוך הסביבה.

המורה צריך לעסוק בחיפוש מתמיד אחר דרכים להעשרת ההצגה החזותית והראיה התמונתית בכל נושא בו הוא עוסק. אין זה די לומר כי עקום שיש לו נקודת תפנית חדה אין לו נגזרת יחידה בנקודה זאת. התלמידים יתבקשו לשרטט את הגרף של $y = |x|$ ו-

$y = x^2 - |x|$ ולבדוק את קיומה של נגזרת ב- $x = 0$. כשעוסקים בפונקציה $y = ax$ יש לציין כי $a > 0$ הוא אופרטור 'מותח' או מכווץ, ו- $a < 0$ הוא אופרטור שגם מסובב. דבר זה מקל על הלימוד. נראה שיש לתלמידים סיכוי יותר גדול לפתור שאלות ברמה גבוהה אם הם מכירים דרכים אחדות של חשיבה אודות האלמנטים של בעיה זו.

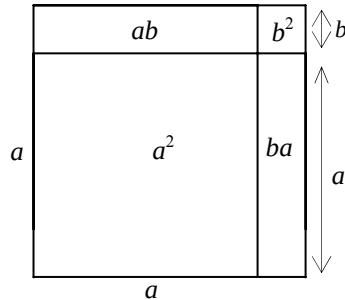
נקודה חשובה כאן היא להביא את התלמידים לחיפוש מודלים רלבנטיים ויישומים. בתחום השימושים, הדרך הרגילה היא להציג בפני התלמידים בעיית-סיפור ולבקש לתרגם את הסיפור למודל מתמטי, משוואה, סדרה וכד'. אם אנו מציגים בפני התלמיד מודל מתמטי בשטח מסוים ומבקשים ממנו לבוא עם מודל מן המציאות

או מודל בשטח אחר שאליו אפשר ליישם את המודל המתמטי, אנו בוודאי עוברים מעבר ל'יישום' לקטגוריה 'אנליזה' או 'סינתזה'. בד בבד תוך כדי חיפוש אחרי מודלים רבים, גדל העושר של התלמיד במודלים בהם הוא יכול להשתמש בעתיד על סמך ניסיונו הקודם.

דרך ידועה ורבת עצמה במתמטיקה היא הצגת בעיות בדרכים שונות. ריבוי דרכי ייצוג נכלל פעם בתכנית ההוראה של

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. הנושא נלמד על-ידי חלוקה של ריבוע

שצלעו $a+b$ לארבעה חלקים כפי שנראה בשרטוט. דרך זאת היא חלק מהמורשת היוונית אשר נתנה למשפטים האלגבריים לבוש



גיאומטרי. בגישה האכסיומטית והמבנית לאלגברה, משתמשים בחוק הפילוג להוכחת הזהות לעיל. אך הבנתו של התלמיד עשויה להעמיק אם נציג בפניו גם את המודל הגיאומטרי.

באופן דומה את המשפט שהמוצא האריתמטי של שני מספרים חיוביים אינו קטן יותר מהמוצא הגיאומטרי שלהם, מוכיחים בדרך כלל באופן אלגברי כך:

$$(a-b)^2 \geq 0$$

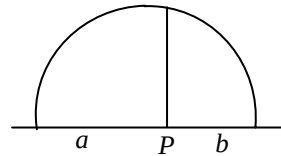
$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$$

עתה מציבים $\sqrt{a}$ במקום a ו- $\sqrt{b}$ במקום b ומקבלים

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

את אותו משפט אפשר לקשור לעובדות גיאומטריות. אם בונים



חצי מעגל על קטע שאורכו $a+b$ ובונים חצי מיתר ניצב לקטע זה בנקודה P (ר' שרטוט) אז מידתו של חצי המיתר הזה היא הממוצע הגיאומטרי של a ו- b והיא לעולם לא

גדולה מהרדיוס שהוא הממוצע החשבוני שלהם. יש מספר עצום של בעיות שהן קשות מאוד לפתרון בהצגה אחת והן נעשות ברורות לגמרי כשמציגים אותן בדרך אחרת. הוכחת משפט דזארג על הקווים המחברים את הקדקודים המתאימים של שני משולשים היא מאוד מסובכת במישור האוקלידי אך נעשית בהירה כשמתבוננים בקונפיגורציה המישורית כהטלה ממרחב תלת-מימדי. הבעיה המפורסמת של גשרי קניגסברג נעשית הרבה יותר קרובה לפתרון כשמתבוננים בה כבעיה של שרטוט קוים במישור במשיכת קולמוס אחת. יש להפנות את תשומת לבם של התלמידים לכך שלבעיה אחת ניתן לתת "לבוש" שונה ולעיתים הלבוש החדש מקל מאוד על מציאת הפתרון.

יש לחשוף את התלמידים לרמות הגבוהות

נוסף להבנת המושגים המתמטיים, התלמידים צריכים להיות מודעים לגישות אפשריות לפתרון בעיות ברמה גבוהה יותר. בניית פתרון בעיות בפרק הקודם הראינו צורת הוכחה, שיטת תקיפת בעיה, ועקרון כללי שמשתמשים בו בפתרון מסוים. היכולת של תלמיד להשתמש בגישות אלה במקרה מסוים שלפניו, לא תמיד תהפוך אותן לחלק אינטגרלי של כושר הביצוע של כל תלמיד, אך כולם חייבים להיחשף לבעיות כאלה.

לעיתים העיקרון שמשתמשים בו לפתרון בעיה ברמה גבוהה לקוח פשוט מניסיון החיים היום-יומי. עקרון אחד כזה ידוע בשם 'עקרון האריזה' או 'עקרון שובך היונים': אם יש לשים m עצמים ב- n תיבות ו- $m > n$ אז לפחות אחת מהן מכילה יותר מעצם אחד. עקרון זה מנוצל כהוכחה שההצגה העשרונית של מספר רציונאלי

$\frac{a}{b}$ (שלמים a, b $b \neq 0$) היא שבר עשרוני סופי או מחזורי. ההוכחה

נשענת על העובדה שבחילוק של a ב- b , בשיטה המוכרת בשם חילוק ארוך, יש מספר סופי של שאריות שונות $(0, 1, 2, 3, \dots, b-1)$. לכן, אחרי מספר מסוים של צעדים השארית היא או אפס או שארית שכבר הופיעה קודם לכן. במקרה הראשון מתקבל שבר עשרוני סופי (אפשר להתייחס אליו כאל שבר עשרוני אינסופי מחזורי בעל מחזור אפס). במקרה השני המנה היא שבר עשרוני מחזורי כי סדרת הספרות (המחזור) המתקבלת כאשר השארית הופיעה בפעם הראשונה חוזרת על עצמה שוב. אותו עקרון יכול לשמש להוכחת הטענה שבהינתן שלושה מספרים שלמים כלשהם a ,

b, c שאף אחד מהם לא מתחלק ב-3, המכפלה של שלושת ההפרשים: $P=(a-b)(b-c)(c-a)$ מתחלקת ב-6. המפתח לפיתוח יכולת התמודדות עם בעיות ברמה גבוהה הוא החשיפה לבעיות בכל הדרגות הן בהוראה והן בבחינה. יש דרכים רבות להבטיח חשיפה כזאת. אולי המקובלת ביותר היא לעבור על הפתרון צעד אחרי צעד ולהדגיש את הסיבה לכל צעד. חשיפה מסוג זה עשויה לעזור לתלמידים לדעת איזה דברים נחוצים להם כשהם מתבקשים להוכיח משהו חדש או להסיק מסקנות.

יש להדגיש אסטרטגיות בנות הכללה

תוך הסברת פתרון של בעיה ברמה גבוהה הקשורה לנושא הנלמד, המורה ידגיש את ההיבטים של פתרון זה אשר אפשר לנצל במצבים כלליים יותר. זה כולל למשל בנייה של הוכחה העוברת דרך חקירת מקרים פרטיים (ר' למשל בעיית 'סינתזה' מס' 4); הסקה של תכונה של כל המספרים המספקים תנאי מילולי מסוים על ידי יצירת ביטוי כללי למספרים אלה (ר' בעיית 'אנליזה' מס' 2); שימוש בהוכחה על דרך השלילה או על-ידי דוגמא נגדית ועוד. יש במתמטיקה שאיפה לשכלול הפתרון, קיצורו, ייפוי. שאיפה זו מקומה ברמת תחכום מסוימת. אך על כל פנים יש תמיד לנצל עקרונות שאפשר לצפות מהתלמיד שינצל בהמשך ואינם ספציפיים למקרה מסוים. למשל, בדרך כלל אנו מלמדים לפתור את המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ דרך ההשלמה לריבוע שלם. זהו עקרון שאי אפשר לנצל אחר כך במשוואה ממעלה יותר גבוהה. במקום זה עדיף להציב $x = y + t$ ולבחור את t כך שהאיבר bx יתאפס. אפשר בנקל להסביר זאת כטרנספורמציה של הזזה, כך ש- t הנבחר שם את הפרבולה כך שאפשר לחשב את שורשי המשוואה על-ידי הוצאת שורש ריבועי. בגישה זו אנו משתמשים גם לפתרון משוואות מסדר יותר גבוה. למשל מסדר 3 שם על-ידי הבחירה המתאימה מתאפס האיבר המכיל x^2 .

כדי לפתור בעיות ברמה גבוהה על התלמידים לדעת ולהיות מסוגלים להשתמש באסטרטגיות לתקיפת בעיה שפתרונה איננו אלגוריתמי. הפתרון לרוב בעיות ה'אנליזה' מתפתח משאלתו של התלמיד: 'מה ידוע לי' ובהמשך שימוש בהבנת נתוני הבעיה. ג'ורג (פול)יה בספרו "כיצד פותרין" (Polya, 1945) נותן מערכת עשירה

יותר של שאלות עצמיות של פותר בעיות⁵. הקורא ימצא בספר זה מקור להצגת בעיות ודרכי פתרון.

יש ללמד פרוצדורות ולא נוסחאות

אחד ההיבטים של הדגשת אסטרטגיות בנות הכללה הוא להדגיש את הדרך שהובילה לפתרון, יותר מאשר את התוצר הסופי שלו - את הנוסחה. בעיית הריבוע - בפרק 'סינתזה' תיפתר ביתר קלות על-ידי תלמיד שמצא שטח של צורה אי-רגולארית על-ידי הפרדתה לחלקים מוכרים לו וארגונם מחדש, מאשר על-ידי תלמיד שניתנה לו פשוט רשימת נוסחאות לחישוב שטחים. באופן דומה בחישוב המחלק המשותף המכסימלי, חשוב האלגוריתם של אוקלידס לא פחות מהמושג עצמו, מפני שתהליך זה יוכלל אחר-כך בפתרון משוואת דיופנטיות, פריקות חד ערכי ועוד. בעיות מיוחדות ראוי לפתור באמצעות אנלוגיה לבעיות שנפתרו כבר או באמצעות דרכים בהן הושגו פתרונות קודמים. מנקודת ראות זו, הגישה לחתכי החרוט באמצעות מוקד ומדריך עדיפה על הגישה באמצעות סכומים והפרשים של רדיוסים. מפני שבגישה הראשונה העקרון של היחס בין המרחק למוקד ולמדריך מייצר את כל המשוואות דרך שאלות מתאימות על היחס האמור.

הוראה באמצעות פתרון בעיות

לצד הצגת פתרון של בעיות בפני התלמידים והצגת טיפוס אסטרטגיות של חשיבה, על המורה לעשות את פתרון הבעיות לחלק אינטגרלי של הוראת המתמטיקה ולהשתמש בו לכל אורך הדרך של פיתוח נושאים חדשים. מושגים ופעולות חדשות אפשר לפתח כפתרון לשאלה המבוססת על חומר ידוע. המורה יהפוך את הדבר להרגל לעורר בעיה המובילה הלאה, מיד עם תום העבודה על כל שאלה. גישה זאת תדגיש את ההמשכיות של המתמטיקה ותוביל לרעיון הבסיסי שחלק גדול מהידע נוצר תוך ניסיון לפתור בעיות. גורם חשוב בגישה זאת הוא פיתוח רצונו של התלמיד לשאול את עצמו שאלות. רצון זה אפשר לפתח גם אם אין כל דרך לתת תשובה מיידית לשאלותיו, בגלל חוסר זמן או חוסר ידע מספיק. כך בכל נושא הנלמד בביה"ס השאלה הסטנדרטית תהיה - "איזה שאלות נוכל להציג לעצמנו כאן?" טבען של שאלות אלו מראה

⁵ הערת המתרגמת: הספר יצא בתרגום לעברית בהוצאת "אוצר המורה" תשי"ט.

באופן ברור את עומק ההבנה וכושר ההכללה שאליו הגיע התלמיד. השאלה העיקרית צריכה תמיד להיות: "מה נוכל עוד להוציא מכאן?". תלמיד שלמד על מספרים זוגיים ומספרים אי-זוגיים יוכל לשאול על זוגיות או אי-זוגיות של סכומים, הפרשים וכד'. תלמיד שלמד מהו מספר ראשוני יוכל לשאול על מספרם של הראשוניים, תחומים שבהם אין אף מספר ראשוני וכד'. תלמיד שלמד על ריבועים של שלמים יוכל לשאול על דרכים ליצירתם, על סדרות של ריבועים, הצגתם העשרונית וכו'. השאלות שתלמיד שואל, יכולות להוביל לחקירה רחבת יריעה של כל נושא. כשילמד על הפונקציה $y = ax + b$ והצגתה הגראפית ישאל: מה קורה ל- y כש- a שואף לאפס? כש- a שואף לאינסוף? כש- a משתנה ממספר שלילי לחיובי? איך הקטע בין 0 ל- x משתנה אם a הוא שבר בין 0 ל-1? אם a גדול מ-1? וכד'.

בדיון העכשווי על יתרונותיה של שיטת הגילוי, נראה שנשכח גורם אחד חשוב – התלמיד השואל שאלות שאת התשובות עליהן יש לגלות. בתהליך זה של החיפוש אחר שאלות רלבנטיות ויצירתיות, על התלמיד לסרוק, לשחזר, ולהשליך על הנושא שבדיון את הייצוגים של כל הידע שצבר עד כה. כפי שראינו, פעילויות אלו של שחזור והשלכה הן ביסוד התהליכים של אנליזה-סינתזה. ובכן, חלק חשוב של עבודת המורה צריך להיות הובלת התלמידים אל השאלות המתאימות. אפילו אם הוא נותן את התשובה בעצמו, יכול הוא לעשות זאת כך שזה יהיה כדרך לפתרון בעיה. מורה המציג נושא מסוים יכול בכל רגע לשאול מה יהיה הצעד הבא. ואפילו אם הוא עונה על כך בעצמו, אם הוא משתמש במידה מתאימה של גודל הצעד, המעבר, הרי חלק גדול והולך של התלמידים יעקבו אחריו ולפחות באופן אינטואיטיבי יגלו את הצעד הבא. במקרים רבים של הרצאה יכול לקרות שחלק לא מבוטל של המאזינים נמצא צעד אחד לפני המרצה, "מגלים" מה הוא עומד לעשות ולומר.

פתרון שאלות ברמה גבוהה איננו, אם כן, רק עניין של בילוי לתלמיד המעוניין, אלא זהו היבט מאוד חשוב של כל חלק של ידע ועל כן זהו חלק מהותי של תכנית הלימודים. בכל תחום הוראה, על המורה לעמוד על המשמר ולתור אחרי שאלות שיסיעו לתלמידיו לחדור לשכבות עמוקות יותר של החומר ולהשליך מהן לפיתוחים נוספים. אפילו כשהמורה יודע כי השאלות שמצא אותן חשובות לעתיד התפתחותם של התלמידים אינן כרגע בגדר יכולתם, תהיה בכך תועלת מרובה אם יציג את הפתרון צעד-אחר-צעד כפי שנזכר

לעיל. אז יוכל המורה לצפות לקבלת ביצועים רבים יותר ברמות הגבוהות יותר.

הערכת ההישגים של התלמידים

הזכרנו את הקשר שבין לימוד לבין כושר ביצוע. הדרך היחידה שאנו יכולים למדוד האם תלמיד למד משהו, היא על-ידי בדיקה האם הוא יכול לעשות כעת משהו שלא יכול היה לעשותו קודם לכן. על כן המורה יוכל להעריך את הישגי תלמידיו על-ידי בחינה קפדנית עם תום הוראת הנושא. אחת המטרות שלנו בפרקים הקודמים על מטרות חינוכיות היתה לסייע למורה לנסח את מטרותיו במונחים של התנהגויות ביצוע מוגדרות אותן הוא מצפה מתלמידיו לרכוש תוך לימוד הנושא ואז לנסח פריטי מבחן שימדדו את מידת השגתן של יכולות הביצוע הללו.

אם נניח שפתרון בעיות ברמות הגבוהות היא אחת ממטרותיה של הוראה המתמטיקה, אזי כדי לבחון את מידת השגתה יש לבקש מהתלמידים לפתור בעיות ברמת אנליזה-סינתזה. קרוב לודאי שלא כל התלמידים יגיעו לרמה זו. יחד עם זאת יש תלמידים שבוודאי יגיעו לכך ומאמצינו צריכים להיות מכוונים להגדלת מספרם בגבולות הגיל והכושר.

בדרך כלל אנו בוחנים בתנאים של זמן מוגבל ומשימה מוגדרת. בהשגחה מתמדת על שני אלה לא תמיד אפשר לדרוש מהתלמיד המסוגל לכך, להוציא לפועל פתרון בעיות ברמת אנליזה או סינתזה. המתמטיקאים הצרפתיים המהוללים פואנקרה והאדאמר (1945) ציינו כי פתרון בעיות המצריכות המצאה של ממש, עולה לפעמים כהברקה פתאומית אחרי תקופה ארוכה של "עיכול" הכרתי ולעיתים גם תת-הכרתי.

על כן שלב גבוה זה ייבדק על-ידי מתן בעיות לפתרון בעבודת בית לתקופה יותר ממושכת מהקצובה בשעת מבחן בכיתה. ובכל מקרה, גם אם משלבים במבחן בעיות הדורשות חשיבה ברמה גבוהה, הבדיקה בכיתה בלבד לא יכולה לשמש כמודד יחיד ליכולת אנליזה וסינתזה.

ניסויים בדרכי טיפוח חשיבה ברמה גבוהה

אי אפשר לצפות מאף אחת מההצעות שהבאנו לטיפוח חשיבה ברמה גבוהה שתהיה מספיקה כשלעצמה כדי להשיג זאת. תלמידים עלולים שלא להיות מוכנים לעשות במושג חדש שזה עתה נלמד,

שימוש ברמה גבוהה. תפקידו של המורה הוא להניח את היסוד לעבודת יצירה במועד מאוחר יותר על ידי הבהרת המושג מלכתחילה.

בעיות ברמה גבוהה הן על פי ההגדרה לא-אלגוריתמיות. הוראה המתרכזת יותר מדי בפתרון של סוג מיוחד של בעיות, מכשילה את המטרה של פיתוח חשיבה ברמה גבוהה בשטחים אחדים. הורדת פתרון של בעיות כאלה לרמה של אלגוריתם, תעשיר אולי את ניסיונו של התלמיד, אך למקוריות בפתרון בעיות, צריך התלמיד אופק רחב ואוסף מגוון של פתרונות של טיפוסים בעיות שונים. מטרתם של כל תהליכי ההוראה שעליהם הצבענו היא לטפח את היכולת הכללית של חשיבה ברמה גבוהה במתמטיקה. יחד עם זאת, כפי שצינו בפתיחה, אלו הן הצעות ולא תכתיבים. אנו מעודדים עבודה עצמאית של המורה בדרכים אלו ואחרות, שיביאו לשיפור היכולת של תלמידיהם בפתרון בעיות.

רשימת מקורות

BLOOM, B. S., et al. *Taxonomy of educational objectives: Handbook 1: Cognitive domain*. New York: McKay, 1956.

BRUNER, J. S. Learning and thinking. *Harvard Educational Review*, 1959, 29, 184-192. CAMBRIDGE CONFERENCE ON

SCHOOL MATHEMATICS. *Goals for school mathematics: The report of the Cambridge Conference on school mathematics*. Boston: Houghton Mifflin, 1963.

GAGNE, R. M. Educational objectives and human performance. In J. D. Krumboltz (Ed.), *Learning and the educational process*. Chicago: Rand McNally, 1965. pp. 1-24.

HADAMARD, J. S. *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1945. (Also, New York: Dover Publications, 1954).

THE NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Evaluation in mathematics: Twenty-sixth yearbook*. Washington, D.C.: The Council, 1961.

POLYA, G. *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1945.

WHEELER, D. So what? In F. W. Land (Ed.), *New approaches to mathematics teaching*. London: Macmillan, 1963. pp. 139-145.

הצעות לקריאה נוספת

EVES, H., & STARKE, E. P. (Eds.) The Otto Dunkel memorial problem book. *American Mathematical Monthly*, 1957, 64 (7), Part 2, 1-89 (Suppl.).

GRAHAM, L. A. *Ingenious mathematical problems and methods*. New York: Dover Publications, 1959.

POLYA, G. *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: Wiley, 1962-65. 2 vols.

SALKIND, CHARLES T. (Ed.) *The contest problem book: Problems from the annual high school contests of the Mathematical Association of America*. New Mathematics Library, vol. 5 New York: Random House, 1961.

YAGLOM, A. M., & YAGLOM, I. M. *Challenging mathematical problems with elementary solutions*. Vol. I: *Combinatorial analysis and probability theory*. San Francisco: Holden-Day, 1964.

נספח: בעיות נוספות⁶

בנספח זה כלולות דוגמאות נוספות של בעיות לכיתות היסוד, לחטיבת הביניים ולחטיבה העליונה, שפתרונותיהן דורשים ביצועים ברמה של אנליזה וסינתזה. ההנחה היא שדוגמאות דומות לא נפתרו קודם לכן.

א. לכיתות היסוד (א-ו)

1. נניח כי m ו- n מייצגים שני מספרים טבעיים. איזה ממשפטי התנאי הבאים איננו נכון?

(1) אם m ו- n שניהם זוגיים, אז אפשר תמיד לבטא את $\frac{m}{n}$

באמצעות מכנה קטן מ- n .

(2) אם m ו- n שניהם אי-זוגיים, אז לפעמים אפשר לבטא

את $\frac{m}{n}$ באמצעות מכנה קטן מ- n .

(3) אם $\frac{m}{n} = \frac{3}{1}$, אז m מתחלק ב- n .

(4) אם $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$ אז $m = 2$ ו- $n = 3$. ✓

(5) אם מספר ראשוני גדול מאחד, הוא גורם של m וגם של n ,

אז אפשר תמיד לבטא את $\frac{m}{n}$ בעזרת מכנה קטן מ- n .

2. תהי S קבוצת המספרים הטבעיים האי-זוגיים. איזו מהפעולות הבאות, כשהיא מופעלת על כל זוג איברים מהקבוצה S , נותנת אך ורק איברים השייכים לקבוצה S ?

⁶ תרגום הנספח נעשה על ידי גב' בתיה עמית, בתקופת השבתון שלה במרכז הארצי "קשר חס". המתרגמת מודה לגב' בתיה עמית על עזרתה בתרגום הנספח.

- (א) חיבור.
 (ב) כפל.
 (ג) חילוק.
 (ד) מציאת הגורם המשותף הגדול ביותר.

התשובה הנכונה היא :

- (1) (א) ו-(ב) בלבד.
 (2) (ב) ו-(ד) בלבד.
 (3) (א) (ב) ו-(ג) בלבד.
 ✓ (4) (ב) (ג) ו-(ד) בלבד.
 (5) (א) (ב) ו-(ד) בלבד.

3. יש לבחון את הפסוקים הבאים ולגלות את התבנית המשותפת להם :

$$1+2=\frac{2 \times 3}{2}=3 \quad (\text{א})$$

$$1+2+3=\frac{3 \times 4}{2}=6 \quad (\text{ב})$$

$$1+2+3+4=\frac{4 \times 5}{2}=10 \quad (\text{ג})$$

$$1+2+3+4+5=\frac{5 \times 6}{2}=15 \quad (\text{ד})$$

על פי תבנית זו סכום כל המספרים השלמים בין 20 ל-39 (כולל 20 ו-39) הוא :

- (1) 190
 (2) 390
 (3) 570
 ✓ (4) 590
 (5) 780

4. איזה מהבאים איננו נכון.
ניתן לשרטט שלושה קווים ישרים במישור כך ש:
- (1) אין ביניהם נקודת חיתוך.
 - (2) קיימת ביניהם נקודת חיתוך אחת.
 - (3) קיימות ביניהם שתי נקודות חיתוך.
 - (4) קיימות ביניהם שלוש נקודות חיתוך.
 - (5) קיימות ביניהם ארבע נקודות חיתוך. ✓

5. בשידה של תומר יש שתיים-עשרה גרביים, ארבע בצבע כחול ושמונה בצבע חום. אם החדר חשוך ותומר אינו יכול לראות, מהו המספר הקטן ביותר של גרביים שעליו לשלוף כדי להבטיח שבחר זוג גרביים באותו צבע?

(1) 2

✓ (2) 3

(3) 5

(4) 6

(5) 7

6. יש לבחון את הפסוקים הבאים:

$$(א) \quad 8(1 \times 1) = 8 \cdot 1^2$$

$$(ב) \quad 8(3 \times 3) = 8 \times 3^2$$

$$(ג) \quad 8\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = 8 \cdot (0.5)^2$$

$$(ד) \quad 8\left(1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2}\right) = 8 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

איזה מהבאים מבטא נכונה את התבנית הכללית שממנה נגזרו הפסוקים הללו?

$$(1) \quad n(1 \times 1) = n \times 1^2 \quad ; \quad n \text{ מספר שלם.}$$

$$(2) \quad 8(n \times n) = 8 \times n^2 \quad ; \quad n \text{ מספר רציונאלי.} \quad \checkmark$$

$$(3) \quad a(n \times n) = a \times n^2 \quad ; \quad a \text{ ו-} n \text{ מספרים טבעיים.}$$

$$(4) \quad n(2 \times 2) = n \times 2^2 \quad ; \quad n \text{ מספר שלם.}$$

$$(5) \quad 8(5 \times 5) = 8 \times 5^2$$

7. שרון חושבת על שני מספרים טבעיים. האחד קטן מ-8 והשני קטן מ-9.

איזה מהמשפטים הבאים איננו נכון?

- (1) סכום שני המספרים אינו גדול מ-15.
- (2) הפרש שני המספרים אינו גדול מ-7.
- (3) מכפלת שני המספרים היא בין 2 ל-56. ✓
- (4) סכום שני המספרים אינו קטן מ-2.
- (5) מכפלת שני המספרים אינה קטנה מ-1.

8. כל התלמידים בכתה מסוימת משחקים שחמט או דמקה, מהם 14 תלמידים משחקים שחמט, 16 תלמידים משחקים דמקה, 10 תלמידים משחקים את שני המשחקים. כמה תלמידים בכתה?

- (1) 36
- (2) 40
- (3) 20 ✓
- (4) 18
- (5) 12

9. המספר הגדול ביותר שאפשר לרשום כסכום של שני שברים שונים, שלשניהם מונה 1 ומכנה שהוא מספר שלם כלשהו הוא:

- (1) 2
- (2) 1
- (3) $1\frac{1}{2}$ ✓
- (4) $\frac{1}{2}$
- (5) $\frac{1}{4}$

10. יש לבחון את סידור המספרים הבא :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & 1 & & 1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
 \end{array}$$

אם ממשיכים את השורות הבאות באותה מתכונת, מה יהיה המספר השני בשורה ה-15?

- (1) 1
(2) 15
(3) 14 ✓
(4) 16
(5) 60

11. נתונה המשוואה: $2(x+3) = 2x+6$, כאשר x מספר שלם.

איזה מהמשפטים הבאים הוא נכון?

- (1) משוואה זו נכונה רק עבור $x = 1$.
(2) משוואה זו אף פעם לא נכונה.
(3) המשוואה נכונה לכל מספר שלם. ✓
(4) משוואה זו נכונה רק עבור $x < 10$.
(5) משוואה זו נכונה רק עבור $x > 10$.

12. עליך להתייחס לפסוקים הבאים :

(א) $4 \times 2 + 4 \times 3 = 4 \times 5$

(ב) $7 \times 3 + 7 \times 5 = 7 \times 8$

(ג) $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$

(ד) $1.2 \times 0.3 + 1.2 \times 0.6 = 1.2 \times 0.9$

איזה מבין הבאים מתאים לתבנית המשותפת לפסוקים הללו :

$$4 + 4 + 4 = 3 \times 4 \quad (1)$$

$$\frac{3}{4} \times 1 + \frac{3}{8} \times 2 = \frac{3}{4} \times 2 \quad (2)$$

$$4 \times 1 + 2 \times 3 = 5 \times 2 \quad (3)$$

$$\checkmark \quad 12 \times 8 + 12 \times 12 = 12 \times 20 \quad (4)$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 \quad (5)$$

13. עליך להתייחס לפסוקים המספריים הבאים ולגלות את

התבנית המשותפת להם :

$$1 + 3 = 4 \quad (א)$$

$$1 + 3 + 5 = 9 \quad (ב)$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 \quad (ג)$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 \quad (ד)$$

כמה מספרים אי-זוגיים נדרשים על-מנת לקבל 144 כסכום, לפי התבנית הזאת?

$$9 \quad (1)$$

$$10 \quad (2)$$

$$11 \quad (3)$$

$$\checkmark \quad 12 \quad (4)$$

$$13 \quad (5)$$

14. בקניית מוצר מסוים, קיבלת הנחה של 20%, ואחר-כך קיבלת

הנחה נוספת של 15% על המחיר החדש. מהי ההנחה הכוללת שקיבלת, באחוזים?

$$35 \quad (1)$$

$$17\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$30 \quad (3)$$

$$40 \quad (4)$$

$$\checkmark \quad 32 \quad (5)$$

15. שתי כיתות מקבילות למדו חשבון עם המורה עמיר, באחת 24 תלמידים ובשנייה 16 תלמידים, בכתה הגדולה היה ממוצע הציונים בסוף השנה 60 ; בכתה השנייה היה ממוצע הציונים - 70 ; אפיק מנסה לקבוע את ממוצע הציונים של כל 40 התלמידים בשתי הכתות. מהי התוצאה?

(1) 66

(2) 65

✓ (3) 64

(4) 63

(5) 62

16. בכיתה של קיטי הצליחו במבחן 76% מכלל התלמידים. 80% מהבנים ו-70% מהבנות הצליחו במבחן. מהו אחוז הבנים באותה כיתה?

(1) 40

(2) 45

(3) 50

✓ (4) 60

17. המספר אחת-עשרה נרשם בבסיס שבע כך: $14_{שבע}$.

איזה משפט או משפטים מהבאים נכון ואיזה לא?

(א) $14_{שבע}$ הוא מספר זוגי כי ספרת האחדות שלו היא 4.

(ב) $14_{שבע}$ איננו מספר ראשוני כי ארבע עשרה מתחלק ב-

שבע.

(ג) $14_{שבע}$ מתחלק ב-אחת עשרה כי אחת עשרה מתחלק ב-

אחת עשרה.

התשובה הנכונה היא :

(1) (א) (ב) ו- (ג) נכונים.

(2) (א) ו- (ב) נכונים ו- (ג) לא נכון.

(3) (א) (ב) ו- (ג) לא נכונים.

(4) (א) ו- (ג) לא נכונים, (ב) נכון.

✓ (5) (א) ו- (ב) לא נכונים, (ג) נכון.

18. סער בחר מספר הקטן מ-500. עליך לגלות את המספר. מותר לך לשאול את סער רק שאלות שהתשובה עליהן יכולה להיות כן או לא. מהו המספר הקטן ביותר של שאלות, שהכרחי לשאול, כדי לגלות את המספר שסער בחר בו?

(1) 5

(2) 7

✓ (ג) 9

(ד) 10

(ה) 12

19. לפניך ארבעה פסוקים מספריים :

(א) $2 \times 3 = 4 + 2$

(ב) $4 \times 5 = 16 + 4$

(ג) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{9} + \frac{2}{3}$

(ד) $0.2 \times 1.2 = 0.04 + 0.2$

איזה מהבאים מתאים לתבנית המשותפת לפסוקים הנ"ל?

(1) $(-2) \times (-1) = 3 - 1$

✓ (2) $(-2) \times (-1) = 4 - 2$

(3) $(-2) \times (-1) = 2 - 0$

(4) $(-2) \times (-1) = -2 - (-4)$

(5) $(-2) \times (-1) = -4 - (-6)$

20. איזה מהמשפטים הבאים טוען דבר אמת על המכפלה של המחלק המשותף הגדול ביותר והכפולה המשותפת הקטנה ביותר של שני שלמים חיוביים?

(1) המכפלה אף פעם לא שווה למכפלת שני המספרים.

(2) המכפלה תמיד קטנה או שווה למכפלת שני המספרים.

(3) המכפלה תמיד גדולה או שווה למכפלת שני המספרים.

(4) המכפלה לעיתים קטן מהמכפלה של שני המספרים ולעיתים גדול ממנה.

✓ (5) המכפלה תמיד שווה למכפלת שני המספרים.

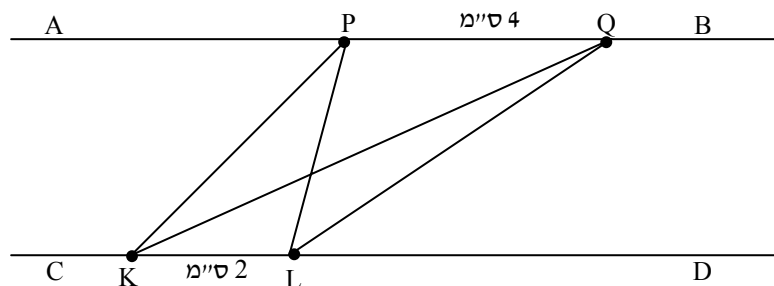
21. יונתן ושובל הם אח ואחות. הם קיבלו מהדוד שלהם שי כספי בדולרים, השווה בערכו למכפלת גיליהם (בשנים שלמות). אם יודעים רק את מספר הדולרים שקיבלו:
- (1) אפשר תמיד למצוא את גיליהם.
 - (2) אי אפשר למצוא את גיליהם מבלי לדעת את גילו של אחד מהם.
 - (3) אפשר למצוא את גיליהם, אם רק גילו של הצעיר הוא יותר משנה אחת.
 - (4) אפשר למצוא את גיליהם אם רק יודעים גם שגילו של המבוגר מביניהם הוא פחות מ-20 שנה.
 - (5) אפשר למצוא את גיליהם אם רק יודעים גם שגילו של המבוגר ביניהם הוא פחות מ-10 שנים ושל הצעיר יותר מ-5 שנים. ✓

22. נתון שבר בעל הצורה $\frac{xb+c}{x}$ כאשר b ו- c שלמים חיוביים ו- $x > 1$.

פלג צמצם ב- x את המונה והמכנה, וקיבל את התשובה $b+c$. מה דעתך על המהלך הזה?

- (1) הוא תמיד נכון.
- (2) הוא לפעמים אינו נכון ולפעמים נכון.
- (3) הוא לא נכון כי הוא מפר את חוק החילוף.
- (4) הוא לא נכון כי הוא מפר את חוק הקיבוץ.
- (5) הוא לא נכון כי הוא מפר את חוק הפילוג. ✓

23. בשרטוט הנתון, ישר AB מקביל לישר CD, $KL = 2$ ס"מ ו- $PQ = 4$ ס"מ.



- איזה מהמשפטים הבאים נכון עבור המשולשים PKL ו-QKL?
- (1) שטח המשולש PKL תמיד גדול משטח המשולש QKL.
 - (2) שטח המשולש PKL תמיד קטן משטח המשולש QKL.
 - (3) שטח המשולש PKL לפעמים גדול ולפעמים קטן משטח המשולש QKL.
 - ✓ (4) שטח המשולש PKL תמיד שווה לשטח המשולש QKL.
 - (5) שטח המשולש PKL שווה בדיוק לפעמים שטח המשולש QKL.

24. מהי הטעות בהוכחה הבאה :

- 10 אג' = 0.10 ₪
- 10 אג' = 0.10 ₪
- נכפול מספרים שווים במספרים שווים ונקבל :
- 10^2 אג' = 0.01 ₪, היינו
- 1 ₪ = 1 אג'
- הטעות היא :
- (1) 0.10 ₪ אינו שווה ל- 10 אג'.
- (2) 10^2 אג' אינו שווה ל- 1.00 ₪.
- (3) אין לכפול אגפים שווים במשוואה אחת באגפים שווים במשוואה אחרת.
- ✓ (4) בכפל אגפים שווים יש לשים לב ליחידות.
- (5) קיימת שגיאת חישוב בביצוע חישוב המכפלה של המספרים.

25. עבור איזה בסיס ספירה יהיה הפסוק $13 \times 13 = 202$ נכון (בהנחה שהבסיס הוא שלם וחיובי) ?

- ✓ (1) אין בסיס כזה
- (2) הבסיס קטן מ-5.
- (3) הבסיס בין 5 ל-10.
- (4) הבסיס חייב להיות בין 10 ל-20.
- (5) יש יותר מבסיס אחד שכזה.

ב. לכיתות התיכוניות (ז-י"ב)

26. אם במשוואה $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ נציב מספרים ממשיים עבור

x ו- y נקבל פסוקים שהם :

(1) חסרי משמעות אלא אם כן $2 \times y$ מתווסף לאגף ימין.

(2) שקריים לכל x ו- y .

(3) שקריים לכל x ו- y פרט לזוג אחר.

(4) אמיתיים ליותר מזוג אחד של x ו- y .⁷ ✓

(5) אמיתיים רק אם ל- x ו- y אותו הערך המוחלט אך סימנים נגדיים.

27. נתון : $3x + 4y + 3z = 20$ ו- $y = 2$. בעזרת נתונים אלה בלבד,

ניתן לחשב את הערך המספרי של :

(1) x

(2) $x - y - z$

(3) $x \cdot y$

(4) $\frac{x}{y}$

✓ (5) $x + y + z$

28. ארבעת הפסוקים המתמטיים הבאים יוצרים הוכחה של

משפט המתייחס לשני מספרים ממשיים כלשהם a ו- b .

הפסוקים אינם נתונים כאן לפי סדר הופעתם, בהכרח.

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab \quad (\text{א})$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \quad (\text{ב})$$

$$(a - b)^2 \geq 0 \quad (\text{ג})$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (\text{ד})$$

⁷ הערת המתרגמת : השוויון נכון לשלושת הזוגות הבאים : $x=1, y=0$; $x=0, y=1$;

$x=0, y=0$; $y=0$.

כדי ליצור הוכחה, הסדר הנכון צריך להיות:

- (1) א, ד, ג, ב
- (2) א, ב, ג, ד
- (3) א, ד, ג, ב
- ✓ (4) א, ד, ב, ג
- (5) ד, ג, א, ב

29. נתון כי $p = a^2 - b^2$ כאשר a, p ו- b מספרים טבעיים ו- p מספר ראשוני. אם $a = 106$, אז b חייב להיות:

- (1) 65
- (2) 75
- (3) 85
- (4) 95
- ✓ (5) 105

30. קבוצת כל השלמים עם פעולת החיבור היא סגורה חילופית, קיבוצית, יש לה איבר נייטרלי ולכל איבר שלה קיים איבר הפכי. לכן, כל תת-קבוצה של הקבוצה הנזכרת עם אותה הפעולה, חייבת להיות גם היא:

- (1) סגורה.
- 8 ✓ (2) חילופית.
- (3) כוללת איבר נייטרלי.
- (4) כוללת איבר הפכי לכל איבר.
- (5) כולל לפחות שלם שלילי אחד.

⁸ הערת המתרגמת: למשל תת-הקבוצה של השלמים החיוביים המשאירים שארית 2 בחילוק ב-5 איננה סגורה, איננה מכילה את 1 כאיבר נייטרלי, איננה מכילה הופכיים ואיננה מכילה אף מספר שלילי, אבל היא חילופית בהכרח.

31. כל מספר טבעי n , שייצוגו העשרוני הוא בעל שלוש ספרות ניתן לביטוי על-ידי המשוואה הבאה: $n = 100a + 10b + c$, כאשר

$$a = 1, \dots, 9;$$

$$b = 0, 1, \dots, 9;$$

$$c = 0, 1, \dots, 9;$$

$$n = 99a + 11b + a - b + c \quad \text{משוואה זו שקולה ל:}$$

נוכל להשתמש בשקילות זו להפקת חוק עבור:

(1) כפל קל יותר עבור מספרים אלה..

(2) התחלקות מספרים כאלה ב-11. ⁹✓

(3) גלוי אילו מבין המספרים האלה הוא מספר ראשוני.

(4) התחלקות של מספרים אלה ב- $a - b + c$

(5) אף אחד מהנ"ל

32. במערך ריבועי של צדפים יש n^2 צדפים. מורידים 2 שורות שלמות ומהצדפים הנותרים מורידים עוד 8 צדפים. את יתרת הצדפים מסדרים מחדש במערך מלבני שמספר השורות בו גדול ממספר הצדפים בכל שורה. מהו ההפרש בין מספר השורות במערך המלבני לבין מספר הצדפים בכל שורה במערך זה?

(1) 2

(2) 4

✓ (3) 6

(4) 8

(5) ההפרש אינו ניתן לחישוב מהמידע הנתון.

33. כדי לגלות את מספר הערכים השלמים שניתן להציב במקום x

בביטוי: $\frac{8x+3}{2x-1}$ כך שהתוצאה תהיה מספר שלם, הצעד

הראשון יכול להיות חילוק של $(8x+3)$ ב- $(2x-1)$. הצעד הבא חייב להיות:

⁹ הערת המתרגמת: התחלקות של מספר תלת ספרתי ב-11 נקבעת על פי התחלקותו של הסכום $a-b+c$ ב-11, היינו אם סכום הספרות ה"קיצוניות" שווה לספרה האמצעית, אז המספר מתחלק ב-11. למשל 297 מתחלק ב-11.

- (1) עוד חילוק של שני פולינומים.
 (2) חילוק של מספר בפולינום.
 (3) חילוק של פולינום במספר.
 (4) פתרון של קבוצת משוואות ממעלה ראשונה. ¹⁰ ✓
 (5) פתרון משוואה ריבועית.

34. לפניך ארבעה פסוקים מספריים :

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad (\text{א})$$

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12} \quad (\text{ב})$$

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{20} \quad (\text{ג})$$

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{5} = \frac{1}{30} \quad (\text{ד})$$

כדי להוכיח את התבנית המסתמנת מהפסוקים הללו, ניתן להשתמש בעובדה כי לכל מספר טבעי n :

$$n - (n-1) = 1 \quad (1)$$

$$(n+2)^2 - n(n+4) - 3 = 1 \quad (2)$$

$$\checkmark \quad n^2 - (n+1)(n-1) = 1 \quad (3)$$

$$\frac{n^2 + n}{n(n+1)} = 1 \quad (4)$$

(5) אף אחד מהנ"ל אינו יכול לשמש להוכחת התבנית.

¹⁰ הערת המתרגמת : בצעד הבא יש לבצע חילוק של 7 ב- $2x - 1$. מנת החילוק

תייצג מספר שלם n אם ורק אם $\frac{7}{2x-1} = \pm n$ ומכאן נובע:

$$. n = \pm 7; n = \pm 1$$

35. נתייחס למשפט הבא :

אם ניתן להציג מספר טבעי p כסכום הריבועים של שני מספרים טבעיים, אז גם את $2p$ ניתן להציג כסכום הריבועים של שני מספרים טבעיים.
משפט זה אפשר להסיק מאחד או יותר מהבאים :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (\text{א})$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (\text{ב})$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad (\text{ג})$$

$$a^2 + ab = a(a+b) \quad (\text{ד})$$

התשובה הנכונה היא :

✓¹¹

(1) (א) ו-(ב) בלבד

(2) (ב) ו-(ג) בלבד

(3) (ג) ו-(ד) בלבד

(4) (ג) בלבד

(5) (ד) בלבד

36. נתונים זוגות סדורים של מספרים רציונאליים שסכומם שווה למנת האחד בשני. בכל הזוגות האלה :

(1) המחלק (המספר השני בזוג) לא יכול להיות מספר שלילי
(2) המחולק (המספר הראשון בזוג) לא יכול להיות מספר שלילי

(3) אם המחלק (המספר השני בזוג) גדול מ-1 אז המחולק חייב להיות שלילי. ✓

(4) הסכום של שני בני-זוג לא יכול להיות פחות מ-1.

(5) המחולק (המספר הראשון בזוג) לא יכול להיות שלם.

37. גדעון הוכיח כי כל נקודה על חוצה הזווית נמצאת במרחקים שווים משוקי הזווית. על סמך זה הסיק גדעון כי בהינתן נקודה שמרחקה משוקי הזווית שווים, הנקודה נמצאת על חוצה הזווית של הזווית הנתונה. מה דעתך על המסקנה הזאת?

¹¹ הערת המתרגמת: $2p = 2(a^2 + b^2) = 2a^2 + 2b^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2$

- (1) מסקנתו של גדעון נכונה.
- (2) מסקנתו שגויה כי הנקודה יכולה להיות מחוץ לזווית.
- (3) מסקנתו שגויה כי הנקודה יכולה להיות על אחד משוקי הזווית.
- (4) מסקנתו שגויה כי הנקודה יכולה להיות בקודקוד הזווית.
- (5) יש שגיאה אחרת. ¹²✓

38. נורית פיתחה את הטיעון הבא :

- (א) כל מספר שלם המתחלק במספר טבעי n , ללא שארית, אפשר לרשום כ- nt כאשר t שלם
 - (ב) $3t$ מייצג שלם המתחלק ב-3
 - $7t$ מייצג שלם המתחלק ב-7
 - (ג) $3t + 7t = 10t$
- ולכן : סכום שני שלמים, שהאחד מתחלק ב-3 והשני מתחלק ב-7, תמיד מתחלק ב-10.
מה דעתך על הטיעון הזה?

- (1) נורית צודקת
נורית טועה
- (2) הטעות היא בשלב (א).
- (3) הטעות היא בשלב (ב).
- (4) הטעות היא במעבר משלב (ב) לשלב (ג). ¹³✓
- (5) הטעות במעבר משלב (ג) למסקנה.

39. יורם חקר את הביטוי $p^2 - 1$. הוא הציב במקום p את כל המספרים הראשוניים בין 5 ל-211 כולל, ומצא שכל המספרים שהתקבלו התחלקו ב-24. על בסיס תוצאות אילו, הצהיר יורם שהוא הוכיח כי :
לכל מספר ראשוני $p \geq 5$, $p^2 - 1$ מתחלק ב-24.

¹² הערת המתרגמת: ארנון הסיק את המשפט ההפוך מתוך המשפט הישר, במקום להוכיח כל אחד מהם באופן בלתי תלוי בשני.

¹³ הערת המתרגמת: יש לשים לב לכך שהסכום $10t$ מניח כי מדובר בהכרח באותו ערך של t . ולכן במקרה כזה הסכום מתחלק ב-10, אבל כאשר לוקחים שתי כפולות שונות של 3 ו-7 סכומן לא בהכרח מתחלק ב-10.

(1) יורם צדק

המסקנה של יורם מוטעית כי :

(2) הוא הניח ש-211 מספר ראשוני.

(3) הוא טעה בחישובים.

✓ (4) הוא לא הוכיח את המשפט.

(5) המשפט אינו נכון .

40. נתון $\frac{a}{b} > 0$ כאשר $b \neq 0$, תלמיד הסיק מכאן ש- $ab > 0$.

מה דעתך?

✓ (1) המסקנה תמיד נכונה.

(2) המסקנה נכונה רק עבור $a > b$.(3) המסקנה נכונה רק עבור $b > a$.(4) המסקנה נכונה רק עבור $a > 0$.(5) ישנם אילוצים אחרים עבור הערך של a או b .41. בהינתן $bx - y = x - by$ הסיק גור כי b חייב להיות שווה ל-

1.

באילו תנאים מסקנתו של גור נכונה?

✓ (1) המסקנה נכונה לכל ערך של x ו- y .(2) המסקנה נכונה רק אם x ו- y הם מספרים שונים.(3) המסקנה נכונה רק אם x ו- y יש ערכים מסוימים.(4) המסקנה נכונה רק אם x ו- y שלמים.(5) יש אילוץ אחר לערכי x ו- y .42. בפתרון המשוואה $\left(2x - 3\frac{1}{2}\right)^2 = (2x - 1)^2$

מיכאל בחר במהלך הבא:

צעד א: הוצאת השורש הריבועי משני הצדדים נותנת

$$2x - 3\frac{1}{2} = 2x - 1$$

צעד ב: חיסור $2x$ משני הצדדים, נותן: $-3\frac{1}{2} = -1$.

מסקנה: קבוצת הפתרונות ריקה.

מה דעתך על המסקנה מהמהלך הזה?

- (1) המסקנה נכונה.
- (2) המסקנה שגויה כי אסור להוציא שורש ריבועי משני צידי המשוואה. ¹⁴✓
- (3) המסקנה שגויה כי הדרך היחידה לפתור משוואה כזאת היא ע"י פתיחת סוגריים כצעד ראשון.
- (4) המסקנה שגויה כי שני צידי המשוואה אינם שקולים.
- (5) יש מקור אחר לטעות במסקנה זו.

$$43. \text{ מאיה פתרה את המשוואה } \frac{1}{x-5} = \frac{5}{12x-60}$$

צעד א : היא הוציאה גורם משותף במכנה בצד ימין של

$$\text{המשוואה וקבלה : } \frac{1}{x-5} = \frac{5}{12(x-5)}$$

צעד ב : היא כפלה את שני הצדדים ב- $(x-5)$ וקבלה $1 = \frac{5}{12}$

מסקנה : קבוצת הפתרונות היא הקבוצה הריקה

- (1) המסקנה נכונה ¹⁵✓
- (2) המסקנה שגויה כי איננו יכולים לכפול את שני הצדדים ב- $(x-5)$
- (3) המסקנה שגויה כי תהליך אחר יביא למסקנה שונה מזו שקבלנו
- (4) המסקנה שגויה כי אם 'נכפול בהצלבה' במכנה המשותף נקבל פתרון אחר
- (5) קיימת סיבה אחרת לפתרון השגוי

¹⁴ הערת המתרגמת : בצעד א לא נלקחה בחשבון העובדה שיש שני ערכים נגדיים זה לזה, שריבועיהם שווים. היה נכון לרשום בו :

$$\pm(2x-3\frac{1}{2}) = \pm(2x-1)$$

¹⁵ הערת המתרגמת : המסקנה נכונה כי ברגע שרושמים במכנה $x-5$ ברור שהביטוי הזה איננו אפס כלומר x לא יכול להיות שווה 5 .

44. P הוא מכפלה של ארבעה שלמים עוקבים. השלם הגדול ביותר שתמיד מחלק את P (ללא שארית) הוא :

(1) 1

(2) 6

(3) 12

✓ (4) 24

(5) 36

45. נתונה טבלה בת שלוש שורות ושלוש עמודות ובה מספרים. כל מספר הוא 0 או 1 (בסידור כלשהו).

יהי a_1 הסכום של המספרים בשורה הראשונה ;

a_2 הסכום של המספרים בשורה השנייה ;

a_3 הסכום של המספרים בשורה השלישית.

בדומה, סכום המספרים בשלוש העמודות יהיה b_1, b_2, b_3 .

מה אפשר לומר על הסכום : $S = a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3$?

(1) הוא אף פעם לא זוגי.

(2) הוא אף פעם לא אי-זוגי.

✓ (3) הוא יכול להיות כל מספר בין 0 ל-18 כולל.

(4) הוא חייב להתחלק ב-4.

(5) הוא אף פעם לא מספר ראשוני.

46. נתון משולש שווה שוקיים ABC בו $AB = AC$. במשולש זה

משורטט משולש שווה צלעות DEF כך ש- D היא על הצלע AB ;

E היא על הצלע AC ; F היא על הצלע BC .

אם נסמן זווית BFD ב- α

זווית ADE ב- β

זווית FEC ב- γ

איזה מהבאים נכון :

(1) $\alpha - \gamma = 2\beta$

(2) $\alpha + \gamma = 2\beta$

(3) $\beta - \gamma = 2\alpha$

✓ (4) $\beta + \gamma = 2\alpha$

(5) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

47. נתון מישור עם מערכת צירים אורתוגונאלית (אנכית). כל

נקודה במישור מסומנת בזוג סדור של מספרים (x, y) . נגדיר

'מרחק' בין 2 נקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) כ-

$$|x_1 + x_2| + |y_1 + y_2|$$

בהתאם להגדרה החדשה שלנו של מרחק, מהי הצורה של כל

הנקודות במישור שמרחקן מהנקודה $(0, 0)$ קבוע?

(1) מעגל.

✓

(2) ריבוע.

(3) משולש שווה צלעות.

(4) אליפסה.

(5) צורה אחרת כלשהי.

48. זוג המספרים $(2, 2)$ הוא בעל התכונה: $2 + 2 = 2 \times 2$

איזה פסוק מהבאים נכון?

(1) זהו הזוג היחיד של מספרים ממשיים שונים מאפס בעל

✓

תכונה זו.

(2) יש רק עוד זוג אחד של מספרים ממשיים השונים מאפס שיש לו אותה תכונה.

(3) בכל שאר הזוגות של מספרים ממשיים שונים מאפס בעלי התכונה הזאת, לפחות אחד המספרים הוא שלילי.

(4) בכל שאר הזוגות של מספרים ממשיים שונים מאפס בעלי התכונה הזאת שניהם חיוביים או שאחד חיובי והשני שלילי.

(5) בכל שאר זוגות המספרים הממשיים השונים מאפס בעלי התכונה הזאת, מספר אחד חייב להיות בין 0 ל-1.