יחידת לימוד בנושא "טריגונומטריה של משולש ישר זווית"

http://www.hebrewkhan.org/video/basic-trigonometry?topic=math--801--trigonometry-basics

מעט היסטוריה

הפרוש המילולי של המילה "טריגונומטריה" הוא "מדידת משולשים".

"טריגונו" – מיוונית - משולש

"מטריה"- מיוונית - מדידה

טריגונומטריה, ענף של המתמטיקה העוסק, בין היתר, בחקר משולשים ובקשר שבין הצלעות והזוויות שלהם. במשולש ישר זווית קיימת התאמה בין גודל זווית ליחסים השונים בין אורכי הצלעות של המשולש, לדוגמה היחס בין שני הניצבים או בין אחד הניצבים ליתר. התאמות אלו הן חלק ממגוון הפונקציות טריגונומטריות אשר יורחבו בהמשך הלימודים.

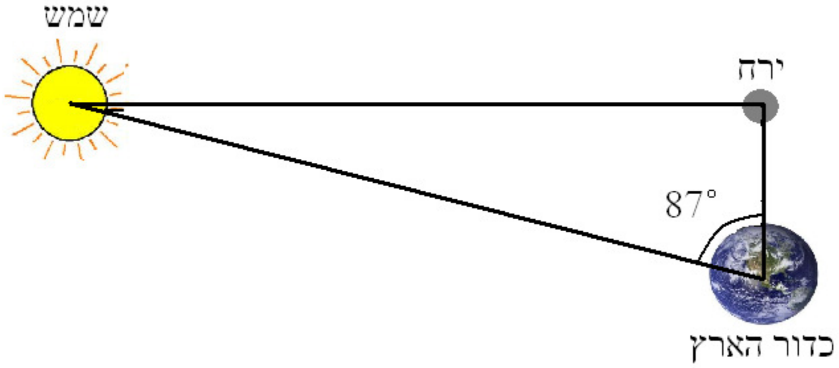
ההיסטוריה של טריגונומטריה, כמדע שחוקר יחסים בין זוויות וצלעות במשולשים ובצורות גיאומטריות אחרות, היא בת יותר מאלפיים שנה. ברוב המקרים, אי אפשר למצוא את היחסים האלה בפעולות אלגבריות רגילות, ולכן צריך היה לפתח כלי מתמטי חדש המאפשר לבצע חישובים של צלעות וזוויות בצורות גיאומטריות שונות.

ראשיתה של הטריגונומטריה במאה ה- 3 לפני הספירה כענף של הגיאומטריה. תכונות של יחסים בין חלקי משולש היו ידועות כבר במצרים העתיקה, אך הרעיון של מדידת הזוויות הומצא מאוחר יותר, על ידי היוונים הקדמונים, ולכן מקובל לראות את תחילת הטריגונומטריה בתקופה זו. זוהי תקופתו של אויקלידס, המוכר לנו, מהגיאומטריה, וארכימדס, המוכר לנו, מחוקי הפיסיקה.

היסטוריונים מניחים שטריגונומטריה נוצרה על ידי אסטרונומים קדומים, ומעט מאוחר יותר התחילו להשתמש בה גם למדידת אדמה וגם באדריכלות.

הסבר לוגי כללי של היחסים הטריגונומטריים הופיע בגיאומטריה יוונית עתיקה, אך המתמטיקאים היווניים לא התייחסו לטריגונומטריה כחלק עצמאי של המתמטיקה אלא ראו בה חלק מאסטרונומיה.

התקדמות מיוחדת של טריגונומטריה קשורה לאסטרונום אריסטרכוס מסמוס (המאה השלישית לפנה"ס). בספרו "על מרחקים של השמש והירח" הוא כתב על קביעת מרחקים בין גופים בחלל. אריסטרכוס ערך את חישוביו באמצעות יחסים של צלעות במשולש ישר זווית עם ערך ידוע של אחת הצלעות. אריסטרכוס התייחס למשולש ישר זווית שנוצר על ידי השמש, הירח וכדור הארץ (ראו איור).



הוא רצה לחשב את אורך היתר (המרחק בין כדור הארץ לשמש) באמצעות הניצב (המרחק בין כדור הארץ לירח) וערך ידוע של הזווית החדה (87°). ברור שבאמצעים גיאומטריים רגילים אין אפשרות לחשב באופן מדויק את אורך היתר. על פי אריסטרכוס, המרחק בין כדור הארץ והשמש גדול פי 20 ממרחקו של כדור הארץ מהירח. חישוביו לא היו מדוייקים רק בגלל טעות במדידת הזווית. העובדה הידועה היום היא שהשמש מרוחקת מכדור הארץ פי 400 ממרחקו של כדור הארץ מהירח. למרות הטעות, עבודתו של אריסטרכוס הייתה פורצת דרך בתחום המדע.

ההישג הבולט ביותר של המתמטיקאים היווניים היה פתרון בעיות חישוב של כל הצלעות וכל הזוויות במשולשים אם ידועים שלוש הצלעות, או אם ידועים שתי צלעות ואחת הזוויות או אם ידועים צלע אחת ושתי זוויות.

הטריגונומטריה קיבלה תנופת התפתחות במאה ה- 16 כשהספנים השתמשו במדידות הזוויות לכוכבים השונים, על מנת לקבוע מסלולי שיט.

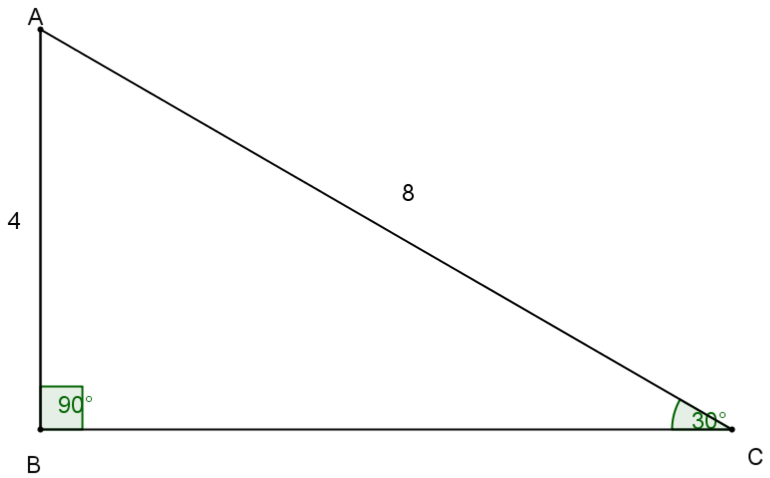
לטריגונומטריה יישומים מרובים במדעים השונים, בראש ובראשונה בפיסיקה (מכניקה, אופטיקה ועוד), בכימיה ובקריסטלוגרפיה, ובמדעים אחרים. חשיבותה מרובה במיוחד בתחום המדידות הטופוגרפיות ובימינו משתמשים בטריגונומטריה כמעט בכל תחום מדעי, בהנדסה, רפואה ובתחומים נוספים.

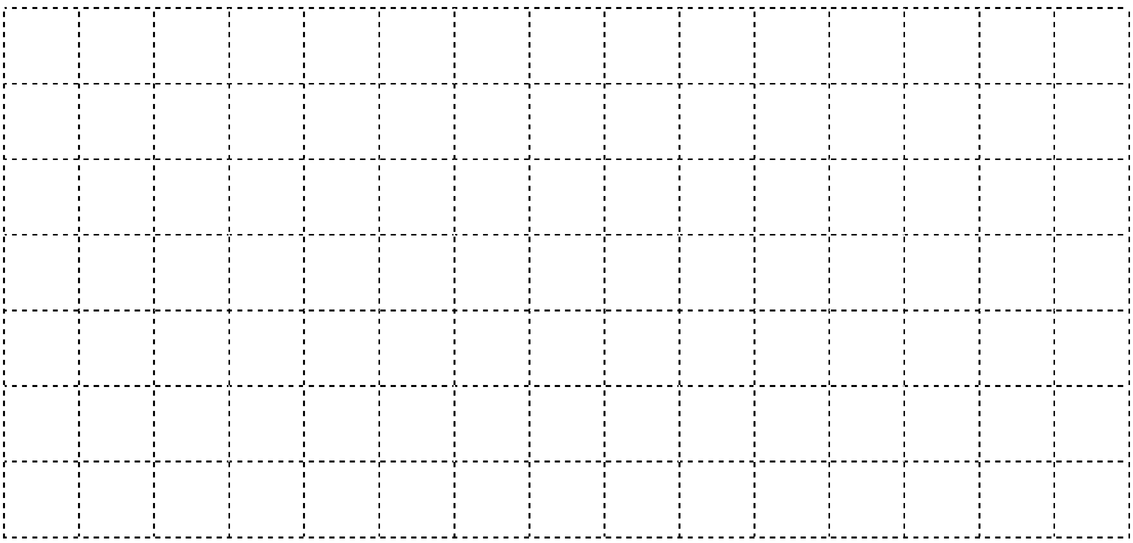
(דיון)

א. מה תוכלו לומר על כל המשולשים ישרי הזווית בעלי זווית חדה שגודלה ידוע, למשל $35°$?

1. מה ידוע על זוויות המשולשים?
2. מה ידוע על צלעות המשולשים?
3. מה ידוע על היחסים בין צלעות המשולשים?

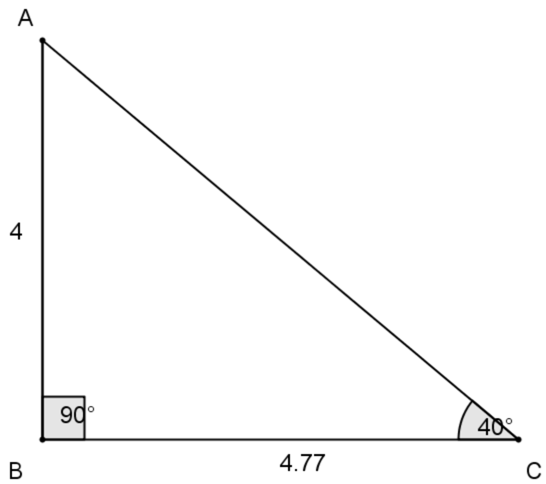
ב. שרטטו שני משולשים ישרי זווית הדומים למשולש הנתון:

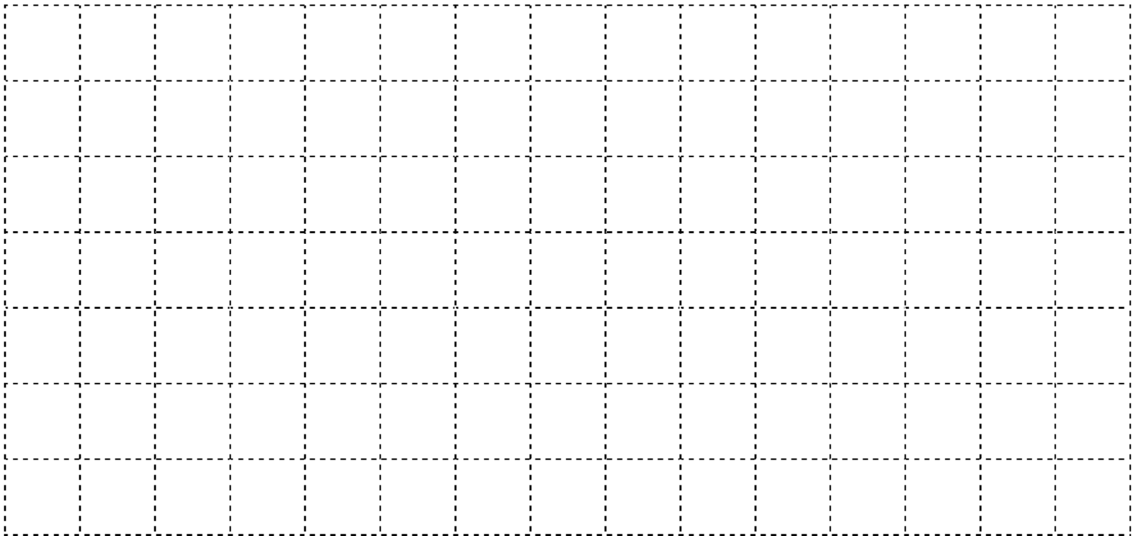




מה משותף לכל המשולשים הללו?

ג. שרטטו שני משולשים ישרי זווית הדומים למשולש הנתון:





מה משותף לכל המשולשים הללו?

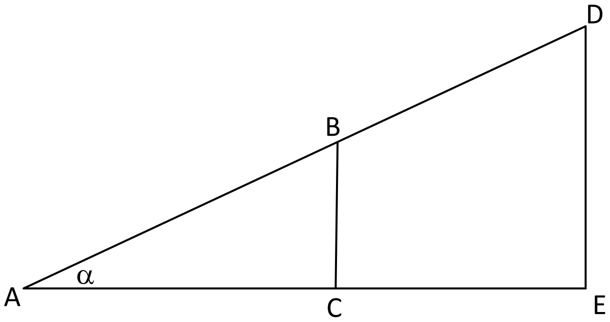
מסקנה: בכל המשולשים ישרי הזווית היחס בין הצלעות הוא קבוע כשהמשולשים הם בעלי אותה זווית כי הם משולשים דומים.

במשולש ישר זווית קיימת התאמה בין גודל הזווית לבין היחסים הטריגונומטריים:

- **<u>היחס בין הניצב שמול הזווית לבין היתר</u>**
- **<u>היחס בין הניצב שליד הזווית לבין היתר</u>**
- **<u>היחס בין הניצב שמול הזווית לבין הניצב שליד הזווית</u>**

נכון להתבונן בשלושת היחסים שבין הצלעות המתאימות לאותה הזווית. ההתאמה בין גודל הזווית לבין היחסים הטריגונומטריים היא הסיבה.

תרגול – חזרה על דמיון משולשים



1. הסתכלו בשרטוט שלפניכם:
הקטעים BC ו- DE מאונכים לקטע AE.
נוצרו כאן שני משולשים ישרי זווית
הדומים זה לזה. $\Delta ABC \sim \Delta ADE$

א. מדוע המשולשים דומים?

ב. רשמו את זוגות הזוויות השוות זו לזו.

ג. רשמו זוגות צלעות מתאימות זו לזו.

ד. נתון כי: AD = 10 ס"מ, BC = 3 ס"מ, AC = 4 ס"מ.

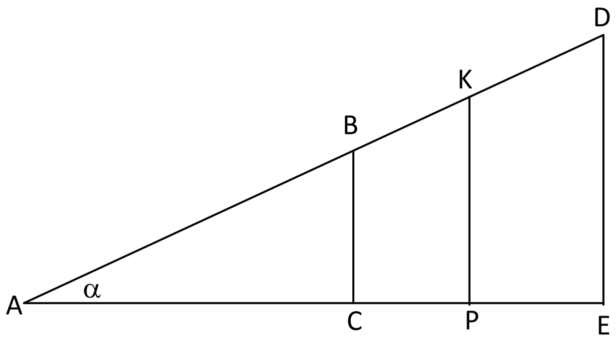
1.חשבו את אורך הקטע: AB

2. חשבו את אורכי הקטעים AE, DE

ה. חשבו את היחסים הבאים: (2) $\frac{DE}{AD}$, (1) $\frac{BC}{AB}$

הסבירו את התוצאה שקיבלתם.

2. הנתונים משאלה 1 תקפים לשאלות זו: הנקודה P, אמצע הקטע CE. נעלה אנך לצלע AE החותך את הצלע AD בנקודה K.



א. הוכיחו כי המשולש ABC והמשולש AKP הם משולשים דומים.

ב. חשבו את ארכי הקטעים AP , KP ו AK ואת היחס: (3) $\frac{KP}{AK}$

ג. האם קבלתם $\frac{KP}{AK} = \frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB}$? נמקו.

השוויון ביחסים שקבלנו נובע מגודל הזווית החדה במשולש ישר זווית, כי לכל זווית חדה במשולש ישר זווית מתאים יחס קבוע בין הניצב מול הזווית והיתר.
נהוג לסמן יחס זה ב- $\sin\alpha$ (סינוס אלפא, כאשר אלפא הוא גודל הזווית).

גודל הזווית α	$\frac{a}{c} = \sin\alpha$
$36.87°$	$\frac{3}{5} = 0.6$
$30°$	0.5
$45°$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071$
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$

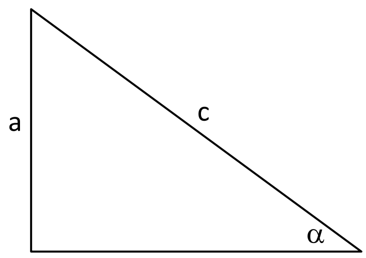
הטבלה מתארת קשר בין שני משתנים (הזווית והסינוס של הזווית). לכל ערך של הזווית אנו יכולים להתאים את הערך של סינוס הזווית. כדי לעשות זאת, נשתמש במחשבון מדעי.

במחשבון ניתן למצוא את הערך של $\sin\alpha$ עבור כל הזוויות $0° \le \alpha \le 90°$.

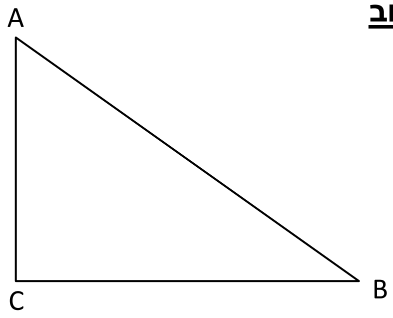
3. השלימו את הטבלה באמצעות המחשבון:

למציאת ערך הזווית
יש להקיש במחשבון
על המקש $\sin^{-1}$

גודל הזווית α	$\frac{a}{c} = \sin\alpha$		גודל הזווית α	$\frac{a}{c} = \sin\alpha$
$25°$				0
$50°$				0.25
$75°$				0.50
$80°$				0.75
$90°$				0.9



חישובי צלעות וזוויות במשולשים – בעיות חישוב



4. נתון משולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$)
אורכו של היתר 12 ס"מ וזווית B בת 40°.
חשבו את אורך הצלע AC.

הצעה לפתרון:

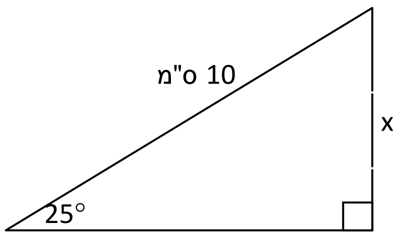
חישוב: $\sin\sphericalangle B = \frac{AC}{AB}$

ולכן: $AC = AB \cdot \sin\sphericalangle B$

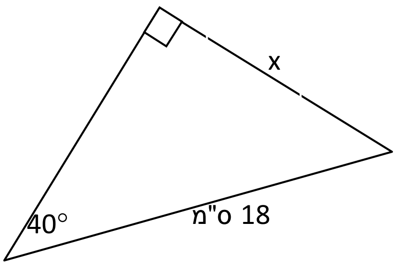
נציב את הערכים המתאימים לתוך הביטוי ונחשב בעזרת המחשבון:
$AC = 12 \cdot \sin 40^\circ =$ 7.71 ס"מ
$AC = 12 \cdot \sin 40^\circ = 7.71$

5. חשבו את אורכה של הצלע x בכל אחד מהמשולשים ישרי הזווית הבאים:

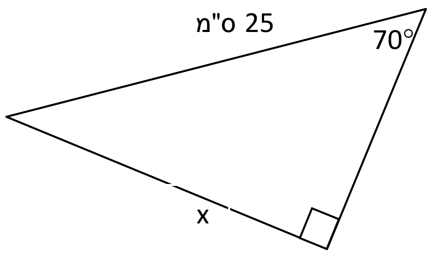
א.



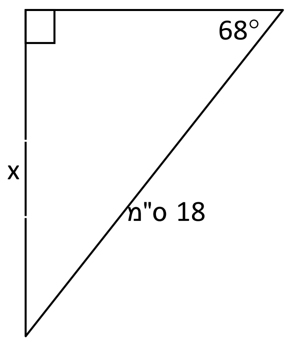
ב.



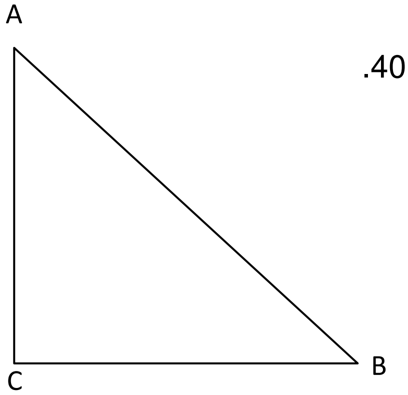
ג.



ד.



6. נתון משולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$)
אורכו של הניצב AC הוא 12 ס"מ וזווית B בת 40°.
חשבו את אורך היתר AB.



הצעה לפתרון:

חישוב: $\sin\sphericalangle B = \dfrac{AC}{AB}$

$AB \cdot \sin\sphericalangle B = AC$

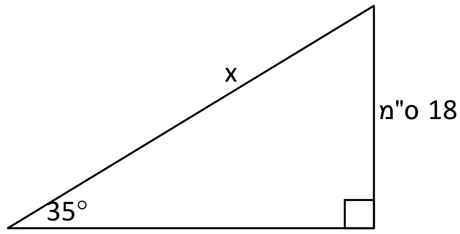
ולכן: $AB = \dfrac{AC}{\sin\sphericalangle B}$

נציב את הערכים המתאימים לתוך הביטוי ונחשב בעזרת המחשבון:

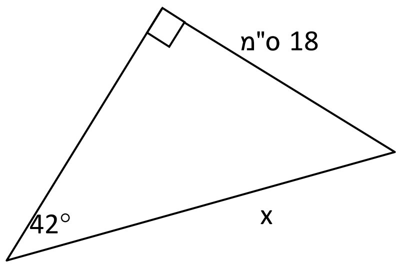
$$AB = \frac{12}{\sin 40^\circ} = 18.67$$

7. חשבו את אורכה של הצלע x בכל אחד מהמשולשים ישרי הזווית הבאים:

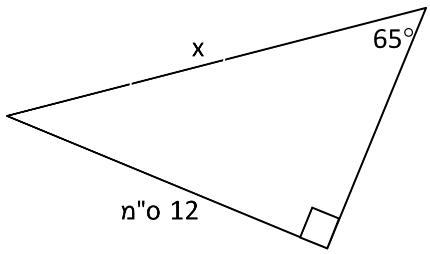
א.



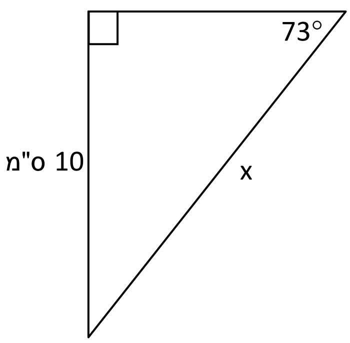
ב.



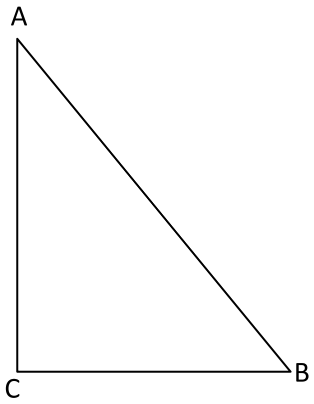
ג.



ד.



8.נתון משולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$)
אורכו של היתר AB הוא 15 ס"מ וזווית A בת 65°.
חשבו את אורך הניצב AC.



הצעה לפתרון:

בבעיה זו לא נתון לנו הניצב שמול הזווית. נשתמש, אם כך, בתכונה שסכום הזוויות במשולש הוא 180° ונחשב את גודלה של זווית B (שמול הצלע AC).

$\sphericalangle B = 180^\circ - (90^\circ + 65^\circ) = 25^\circ$ ואז נוכל להמשיך בחישוב, כמו בתרגיל 1.

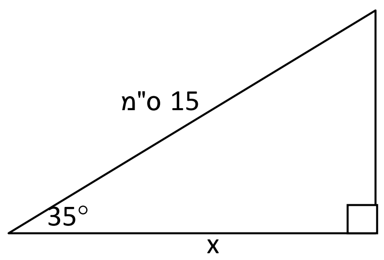
חישוב: $\sin\sphericalangle B = \dfrac{AC}{AB}$

ולכן: $AC = AB \cdot \sin\sphericalangle B$

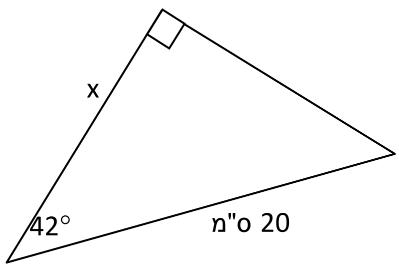
נציב את הערכים המתאימים לתוך הביטוי ונחשב בעזרת המחשבון:
$AC = 15 \cdot \sin 25^\circ = 6.34$

9.חשבו את אורכה של הצלע x בכל אחד מהמשולשים ישרי הזווית הבאים:

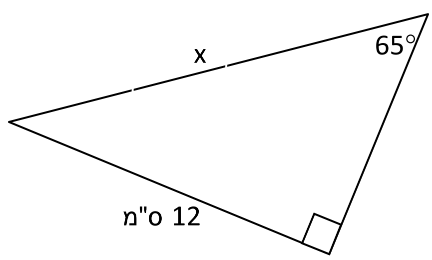
א.



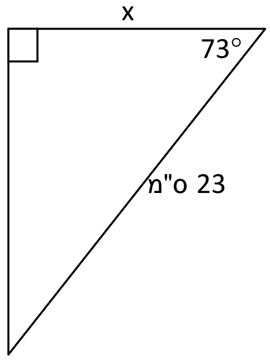
ב.



ג.



ד.



10.במשולש ישר זווית ABC נתון:

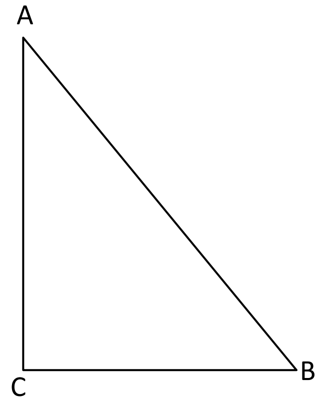
22 ס"מ = AB, $\measuredangle BAC = 35^\circ$, $\measuredangle ACB = 90^\circ$

חשבו את:

א. אורכי הניצבים CB ו- AC.

ב. שטח המשולש

ג. היקף המשולש.



11.במשולש ישר זווית ABC נתון:

15 ס"מ = BC, $\measuredangle ABC = 35^\circ$, $\measuredangle ACB = 90^\circ$

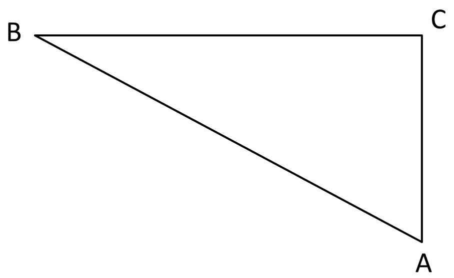
חשבו את:

א. אורך היתר AB

ב. אורך הניצב AC

ג. היקף המשולש

ד. שטח המשולש



*12.נתון משולש שווה שוקיים ABC ($AC = AB$) אורך השוק של המשולש 12 ס"מ.

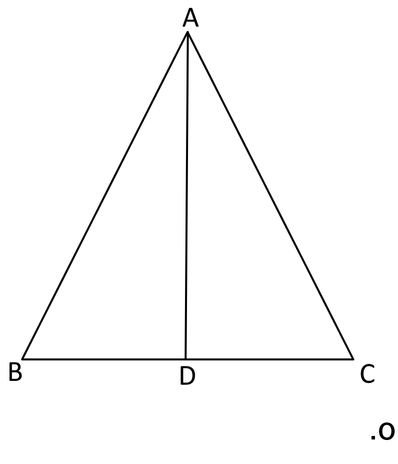
זוויות הבסיס בנות 50° כל אחת.

חשבו את:

א. גובה המשולש (AD).

ב. אורך הבסיס של המשולש (BC).

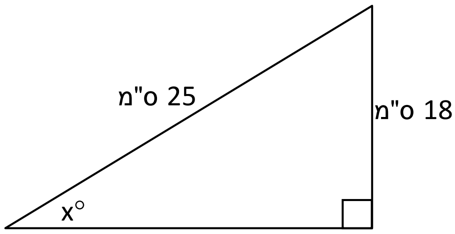
ג. שטח המשולש ABC



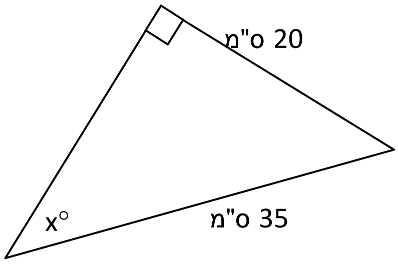
<u>הדרכה</u>: במשולש שווה שוקיים הגובה לבסיס הוא גם תיכון לבסיס.

13.חשבו את גודל הזווית המסומנת ב- x בכל אחד מהמשולשים הבאים[1]:

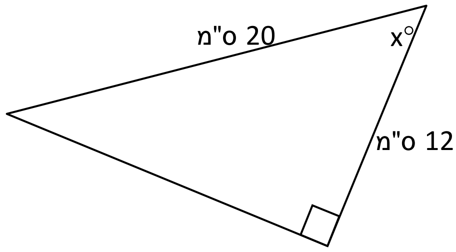
א.



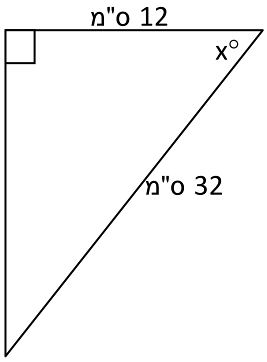
ב.



ג.*

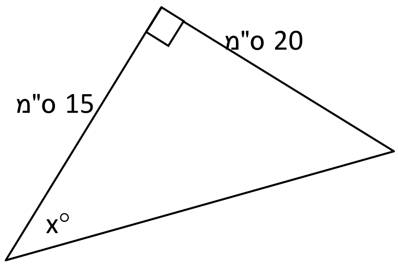


ד.*

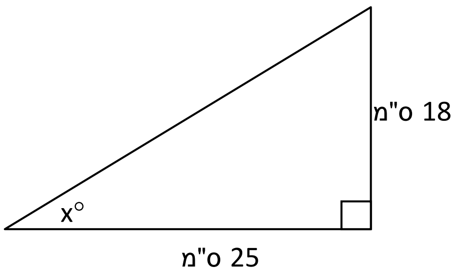


14.חשבו את גודל הזווית המסומנת ב- x במשולשים הבאים: (היעזרו במשפט פיתגורס)

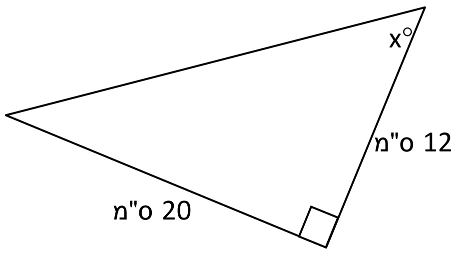
א.



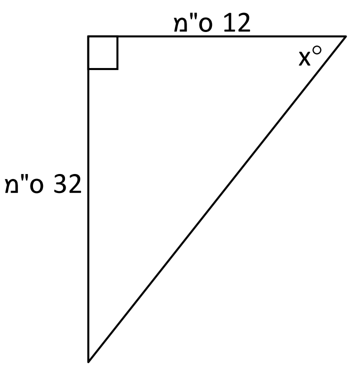
ב.



ג.

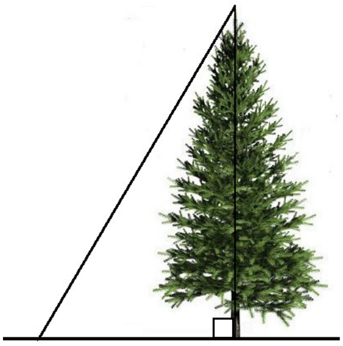


ד.



[1] לפי הצורך ניתן להיעזר במשפט פיתגורס או בסכום זוויות במשולש

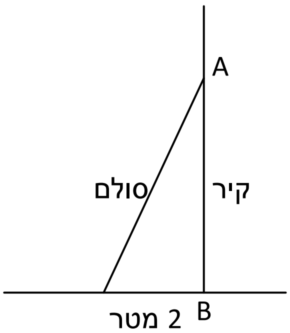
15.מהצמרת של עץ בגובה 12 מטר מתחו חבל עד לקרקע באורך 15 מטרים וקבעו אותו בעזרת יתד באדמה.



א. באיזה מרחק מהעץ קבעו את היתד?

ב. מהי הזווית שבין הקרקע לחבל?

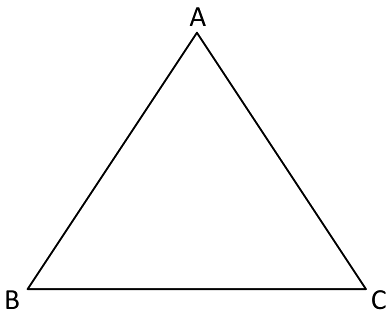
16.סולם באורך 8 מטרים נשען על קיר (ראו איור). המרחק בין הקיר לסולם הוא 2 מטרים.



א. לאיזה גובה הגיע הסולם (מה אורך AB)?

ב. מהי הזווית שנוצרה בין הסולם לבין הקיר?

*17.במשולש שווה צלעות ABC אורך התיכון הוא 8 ס"מ.



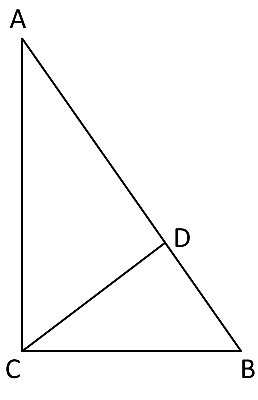
א. חשבו את אורך הצלע של המשולש

ב. חשבו את היקף המשולש

ג. מהו אורך הגובה של המשולש? נמקו.

ד. חשבו את שטח המשולש.

*18.במשולש ישר זווית ABC ($\measuredangle ACB = 90^\circ$)
CD הוא הגובה ליתר.
נתון: $CD = 25$ ס"מ ו- $CB = 30$ ס"מ.

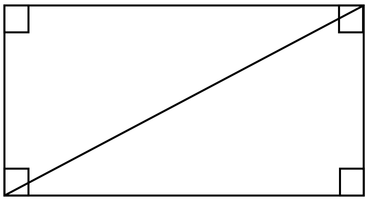


א. חשבו את הזווית $\measuredangle DBC$

ב. חשבו את אורך הניצב AC

ג. חשבו את שטח המשולש ABC

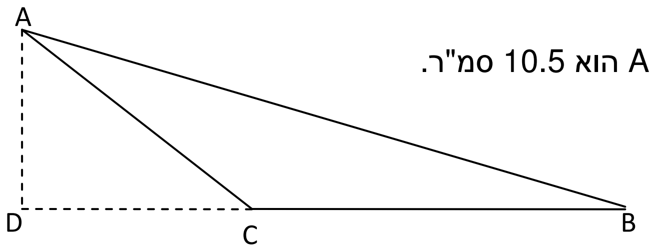
ד. חשבו את אורך היתר AB.



19.במלבן אורכי הצלעות הן 12 ס"מ ו- 8 ס"מ.

א. חשבו את אורך האלכסון של המלבן.

ב. חשבו את הזוויות שהאלכסון יוצר עם הצלעות של המלבן.



*20.שטחו של משולש קהה-זווית ABC הוא 10.5 סמ"ר.
נתון: 7 ס"מ = BC 5 ס"מ = AC.

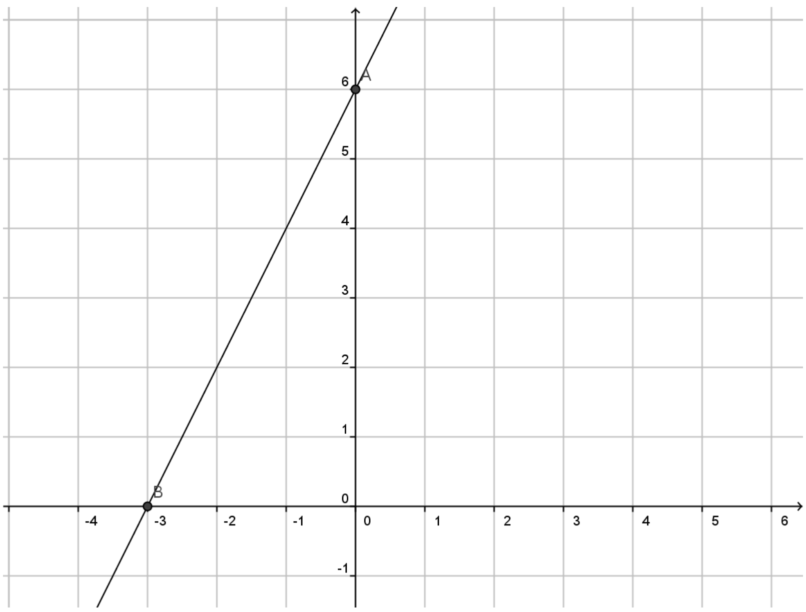
א. חשבו את הגובה ל- BC

ב. חשבו את גודלה של זווית ∢ACB

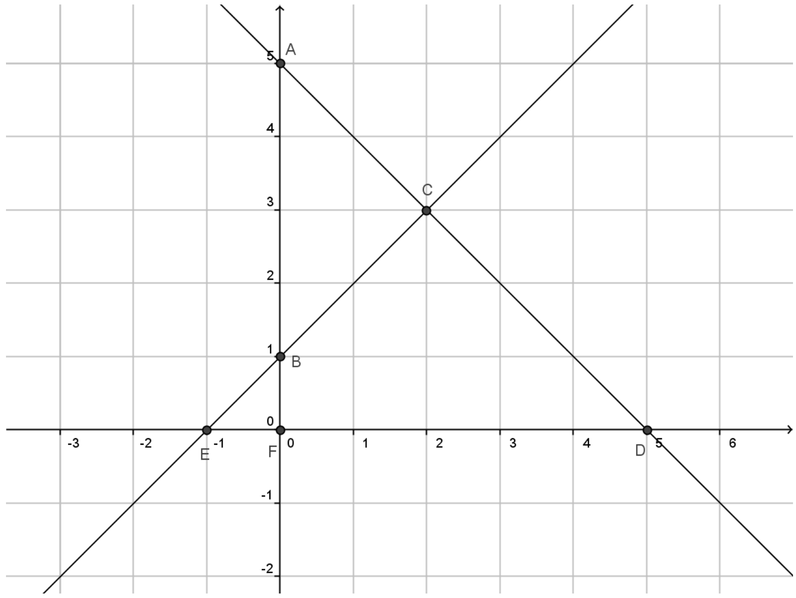
21.נתון הישר y = 2x + 6. A ו- B הן נקודות החיתוך של הישר עם הצירים.

א. מה אורכו של הקטע AB?

ב. מה גודלה של הזווית בין הישר ובין הכיוון החיובי של ציר ה- x (∢ABO)



22. נתונים הישרים: $y = -x + 5$ ו- $y = x + 1$. הישרים מאונכים זה לזה.

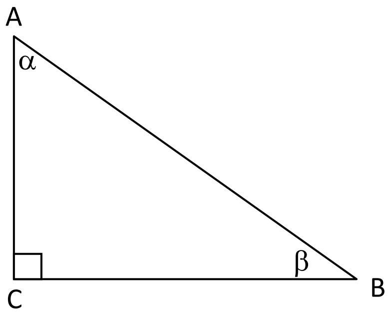


א. רשמו את כל המשולשים הדומים שנוצרו בעזרת הישרים במערכת הצירים. נמקו את תשובתכם.

ב. חשבו את אורכי הקטעים BC ו- CD.

קוסינוס הזווית

במשולש ישר הזווית ABC הגדרנו את סינוס הזווית כיחס בין הניצב שמול הזווית לבין היתר.



$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$

$$\sin\beta = \frac{AC}{AB}$$

קוסינוס הזווית הוא היחס בין הניצב שליד הזווית לבין היתר.

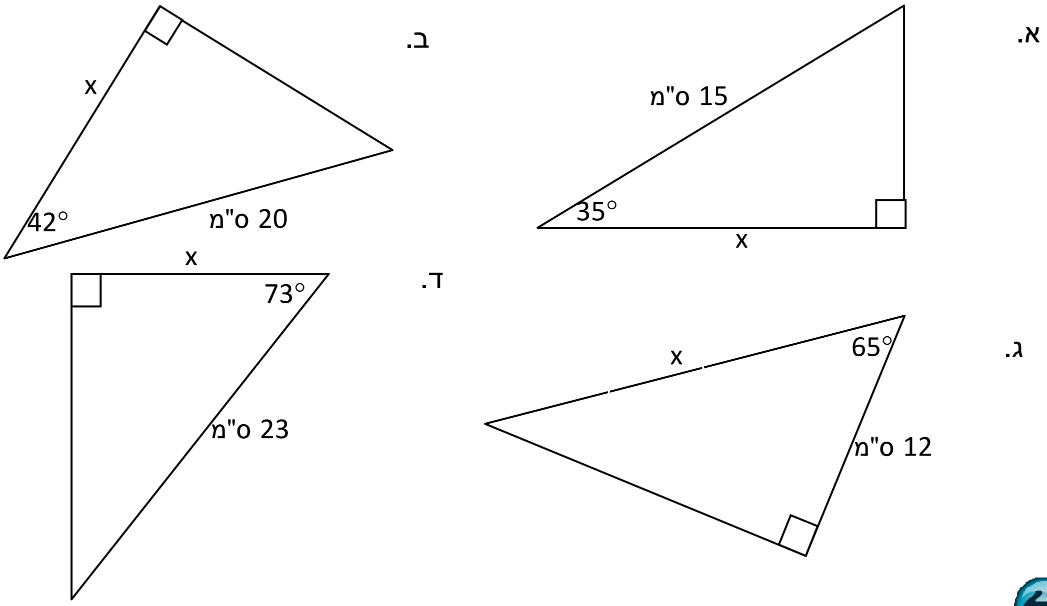
$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos\beta = \frac{BC}{AB}$$

בכל משולש ישר זווית נוכל להשתמש גם בסינוס הזווית וגם בקוסינוס הזווית לפי הצורך.

לפניכם תרגיל 9 אותו פתרתם בעזרת סינוס הזווית, כעת נפתור תרגיל זה באמצעות קוסינוס הזווית.

23. חשבו את אורכה של הצלע x בכל אחד מהמשולשים ישרי הזווית הבאים:



הצעה לפתרון סעיף א':

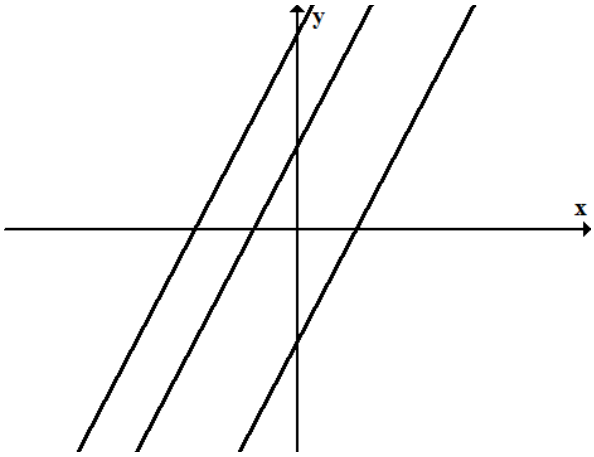
$$\cos 35° = \frac{x}{15}$$
$$x = 15 \cdot \cos 35° = 12.29$$

בשאלה זו השימוש בקוסינוס הזווית הוא יותר פשוט מאשר שימוש בסינוס הזווית.
פתרו את יתר הסעיפים של שאלה זו באמצעות קוסינוס הזווית.

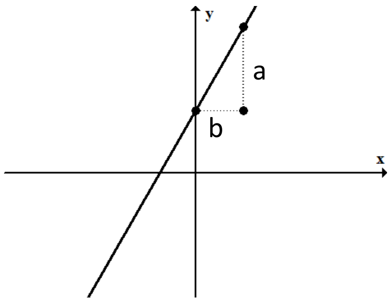
(דיון) **טנגנס הזווית**

.24

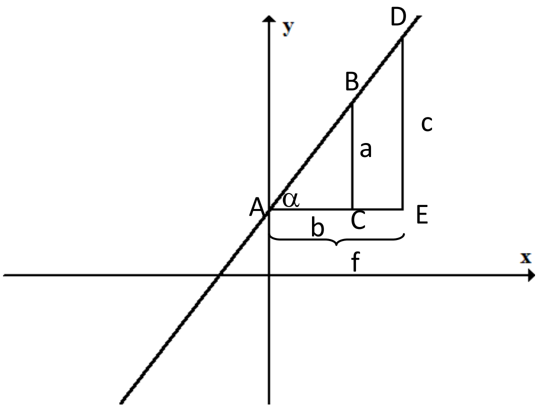
א. לפניכם מספר גרפים של פונקציות קוויות המקבילים זה לזה.
1. מה משותף לכל הגרפים?
2. מה תוכלו לומר על הזווית בין כל אחד מהגרפים לבין הכיוון החיובי של ציר x?



ב. בגרף שלפניכם a מייצג את השינוי בערך של y (כשמתקדמים מנקודה אחת לנקודה שנייה לאורך הישר) ו- b מייצג את השינוי בערך של x (כשמתקדמים מנקודה אחת לנקודה שנייה לאורך הישר) כיצד מוגדר השיפוע של הישר הנתון?

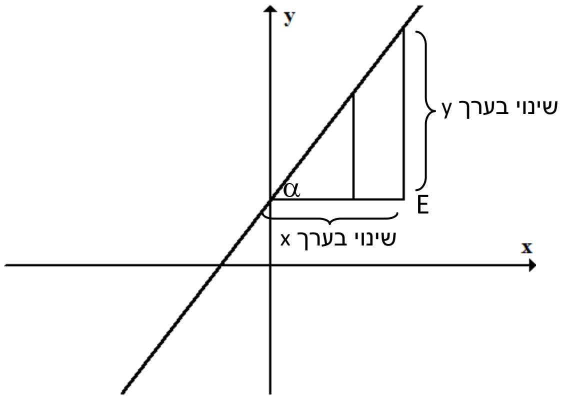


ג. A, B, D בשרטוט הן נקודות על הישר המשורטט.
BC ו- DE ניצבים לקטע AE המקביל לציר x.
הסבירו מדוע המשולשים ADE ו- ABC דומים.
מה המסקנה המתקבלת מתוך הדמיון?



השלימו: $\frac{a}{\square}=\frac{b}{\square}$

כמו כן: $\frac{a}{b}=\frac{c}{f}$ (מדוע?)



שיפוע הישר נמדד על ידי היחס בין השינוי בערך של y לשינוי בערך של x.

ליחס בין הניצב שמול הזווית לניצב שליד הזווית קוראים טנגנס הזווית.

מסקנה: שיפוע של פונקציה קווית הוא גם טנגנס הזווית.

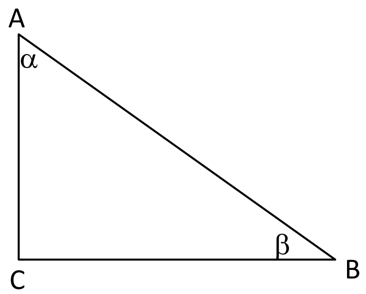
על יישום מעניין של טנגנס הזווית ניתן ללמוד באמצעות פרויקט עולמי למדידת היקף כדור הארץ:

http://highmath.haifa.ac.il/index.php?option=com_content&task=view&id=966

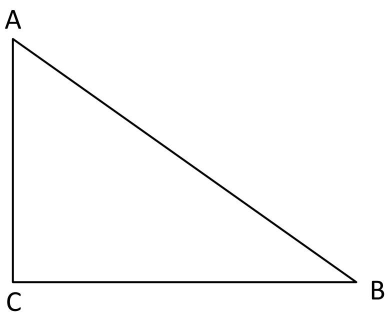
טנגנס של זווית מוגדר כיחס בין הניצב שמול הזווית לניצב שליד הזווית במשולש ישר זווית.

$$\text{tag}\,\alpha = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{tag}\,\beta = \frac{AC}{BC}$$



25.נתון משולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90°$)
אורכו של הניצב AC הוא 12 ס"מ וזווית B בת 40°.
חשבו את אורך הניצב CB. (בעזרת טנגנס הזווית).

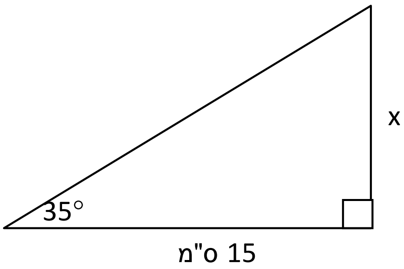


הצעה לפתרון:

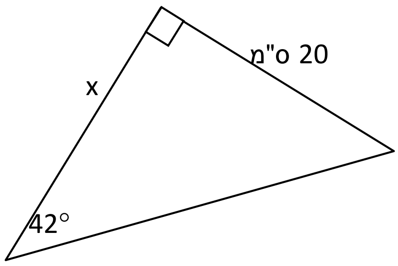
$$\tan\sphericalangle B = \frac{AC}{CB} \Leftarrow \tan 40° = \frac{12}{CB} \Leftarrow CB = \frac{12}{\tan 40°} = 14.30$$

26. חשבו את אורכה של הצלע x בכל אחד מהמשולשים ישרי הזווית הבאים:

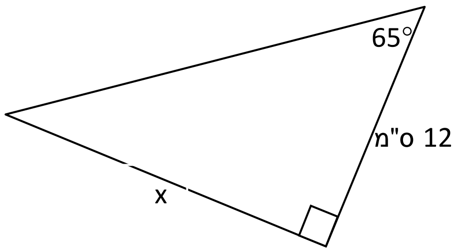
א.



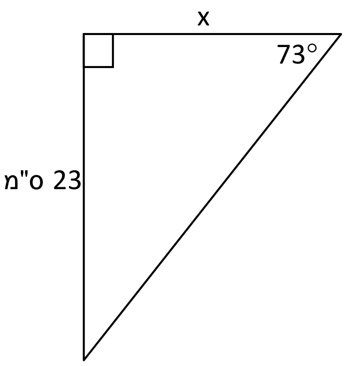
ב.



ג.

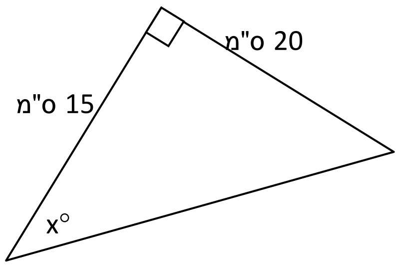


ד.

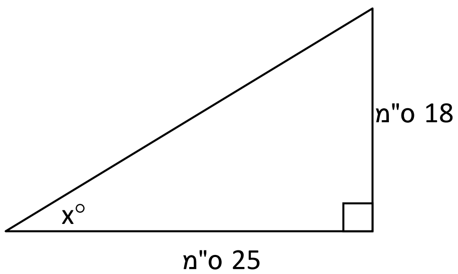


27. חשבו את גודל הזווית המסומנת ב- x במשולשים הבאים:

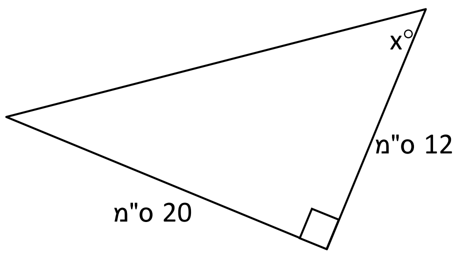
א.



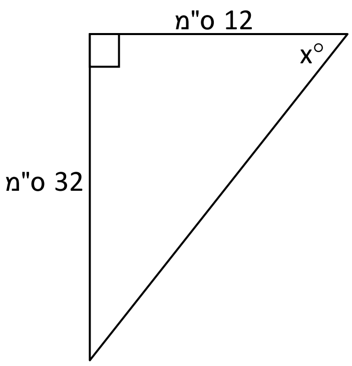
ב.



ג.

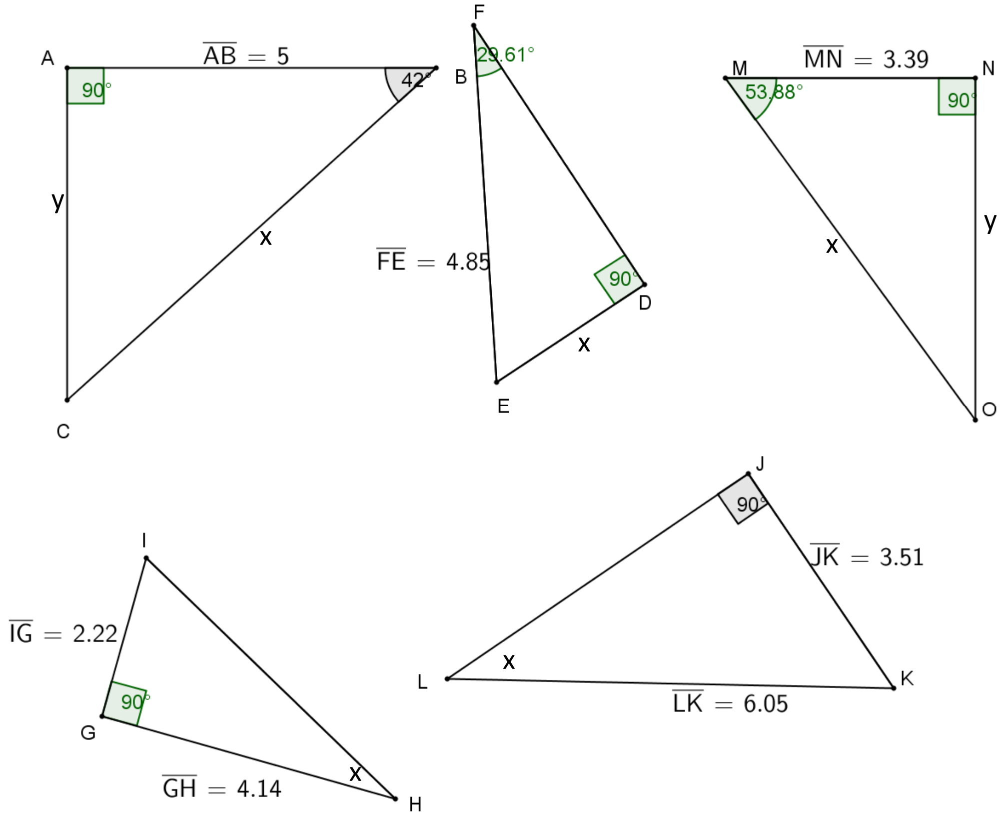


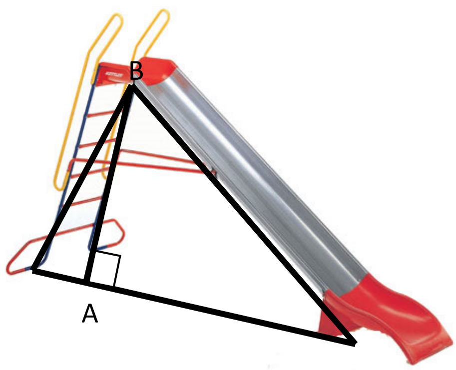
ד.



<u>פתרו את התרגילים הבאים:</u>

28.רשמו ליד כל משולש באיזה מהיחסים יש להשתמש כדי לגלות את הערך של x או הערך של y: סינוס, קוסינוס או טנגנס.

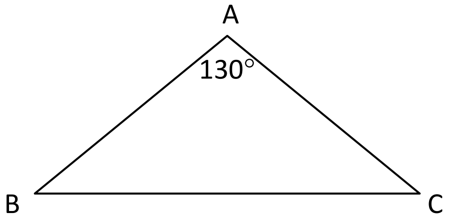




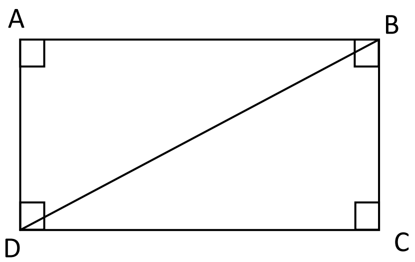
29.

א. אורך המגלשה 5 מטרים. הזווית בין המגלשה לקרקע 40°.
חשבו את גובה המגלשה (AB)

ב. הזווית בין הסולם לקרקע 70°. חשבו את אורך הסולם.

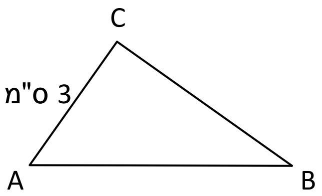


*30.במשולש שווה-שוקיים ABC ‎(AB = AC)‎
זווית הראש היא בת ‎130°‎ (ראו שרטוט),
ואורך השוק הוא 15 ס"מ.
חשבו את האורך של בסיס המשולש.



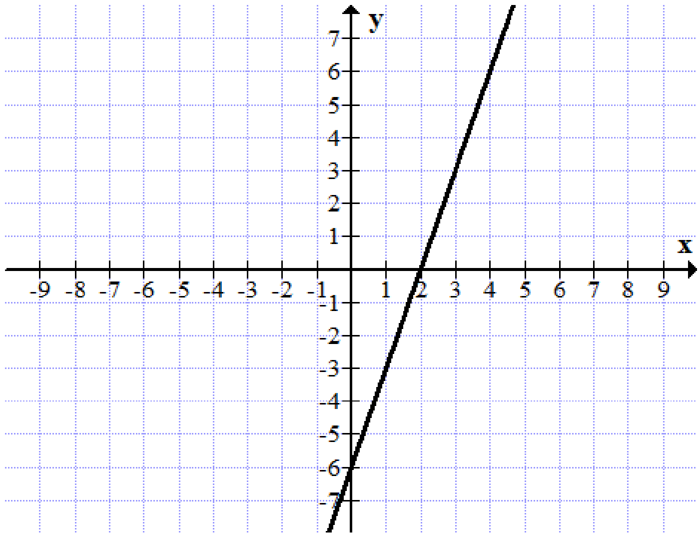
31.במלבן ABCD נתון:
12 ס"מ = CD, ‏‎∢BDC = 32°‎.
חשבו את שטח המלבן.

32.במשולש ישר-זווית ABC ‏(‎∢ACB = 90°‎) אורך הניצב AC הוא 3 ס"מ.
(ראו שרטוט). שטח המשולש הוא 10.5 ס"מ.



א. חשבו את אורך BC
ב. מצאו את ‎tan∢CAB‎ .
ג. חשבו את גודל הזווית ‎∢CAB‎
ד. חשבו את היקף המשולש.

33.חשבו את גודל הזווית שבין הישר $y = 3x - 6$ ובין הכיוון החיובי של ציר ה- x.



*34.נתונים הישרים: $y = 2x$ ו- $y = -0.5x + 5$.

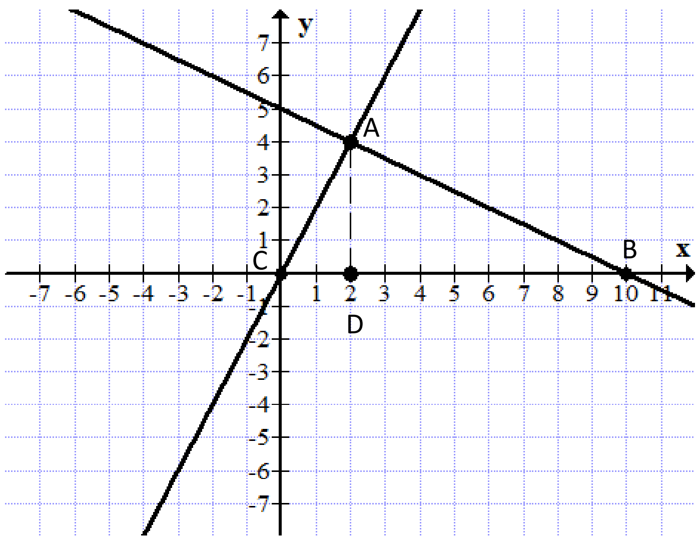
א. חשבו את שיעורי הנקודות A, B

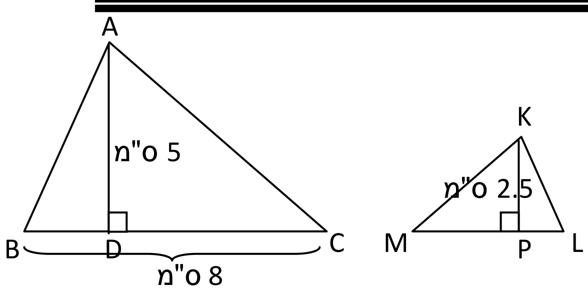
ב. חשבו את גודל הזווית ABC

ג. חשבו את אורך הקטע AB

ד. חשבו את גודל הזווית CAB, הציגו דרך פתרון.

ה. חשבו בשתי דרכים את אורך הקטע CA





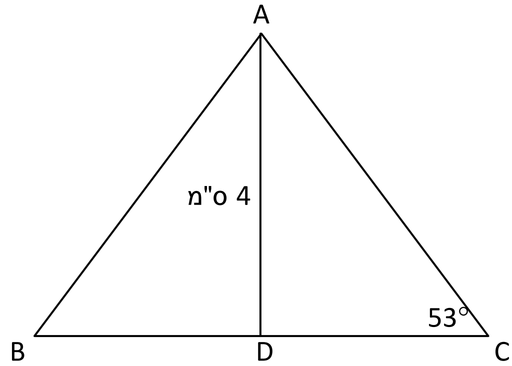
*35. נתון: $\Delta KLM \sim \Delta ABC$ בהתאמה.
חלק מהנתונים רשומים על גבי השרטוט.

א. חשבו את שטח המשולש ABC.

ב. מהו שטח המשולש KLM? נמקו.

ג. הנקודה D מחלקת את הקטע BC ביחס של 3 : 1, $BD < DC$. מה גודלה של זווית C?

ד. מה גודלה של זווית M במשולש KLM?

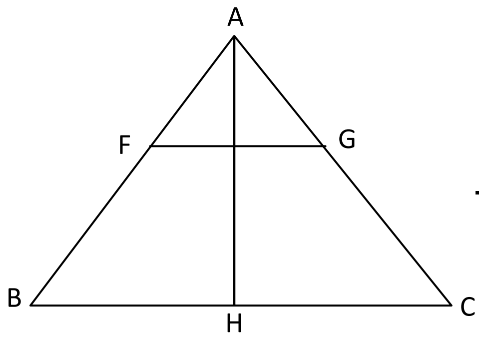


36. ΔABC משולש שווה שוקיים, $AB = AC$.
$AD \perp BC$, $AD = 4$ ס"מ, $\sphericalangle C = 53°$

א. חשבו את אורך הבסיס BC

ב. חשבו את שטח המשולש ABC

ג. חשבו את היקף המשולש ABC



**37. ΔABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB = AC)$
מעבירים ישר מקביל לבסיס BC החותך את
השוקיים AB ו- AC בנקודות F ו- G בהתאמה.
בנוסף, מורידים גובה AH לבסיס.
נתון: $BC = 15$ ס"מ, $FG = 5$ ס"מ, $GC = 7$ ס"מ.

א. הוכיחו כי: $\Delta ABC \sim \Delta AFG$

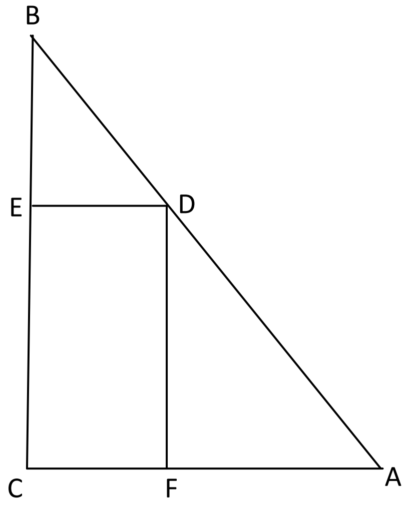
ב. חשבו את אורך הקטע AG, הציגו את דרך החישוב.

ג. חשבו את $\sphericalangle HAC$

ד. חשבו את אורך הגובה AH

ה. חשבו את שטח המשולש ΔABC

*38.בתוך משולש ישר זווית ABC ($\measuredangle C = 90°$) חסום מלבן DECF
כך שקודקוד D נמצא על היתר AB והקודקודים E ו- F נמצאים
על הניצבים BC ו - AC בהתאמה.
נקודה E מחלקת את הקטע BC ביחס של 3 : 5
נתון: AC = 5 ס"מ

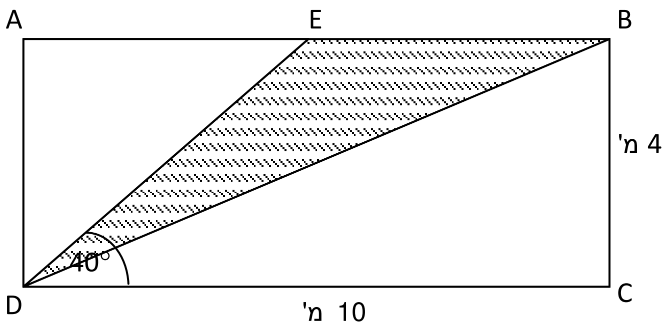


א. הוכיחו כי: $\Delta BED \sim \Delta DFA$.

ב. חשבו את אורך הקטע ED .

ג. נתון בנוסף כי הצלע CE גדולה פי 4 מהצלע DE
חשבו את $\measuredangle A$.

*39.במגרש מלבני שמידותיו 4 מטרים ו- 10 מטרים מתחו שני חבלים: חבל לאורך
האלכסון של המגרש המלבני (מסומן ב- BD) וחבל נוסף (המסומן ב- DE). הזווית
שנוצרה בין הצלע DC לבין DE היא בת 40° (ראו שרטוט)



א. חשבו את גודל הזווית BDC

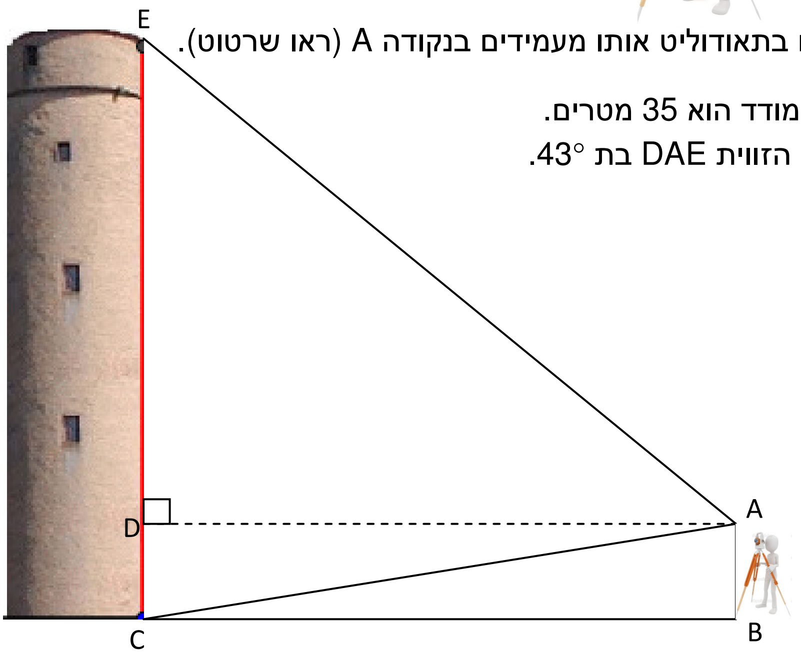
ב. חשבו את אורך הקטע EB

ג. חשבו את שטח המשולש EBD
(המקווקו)

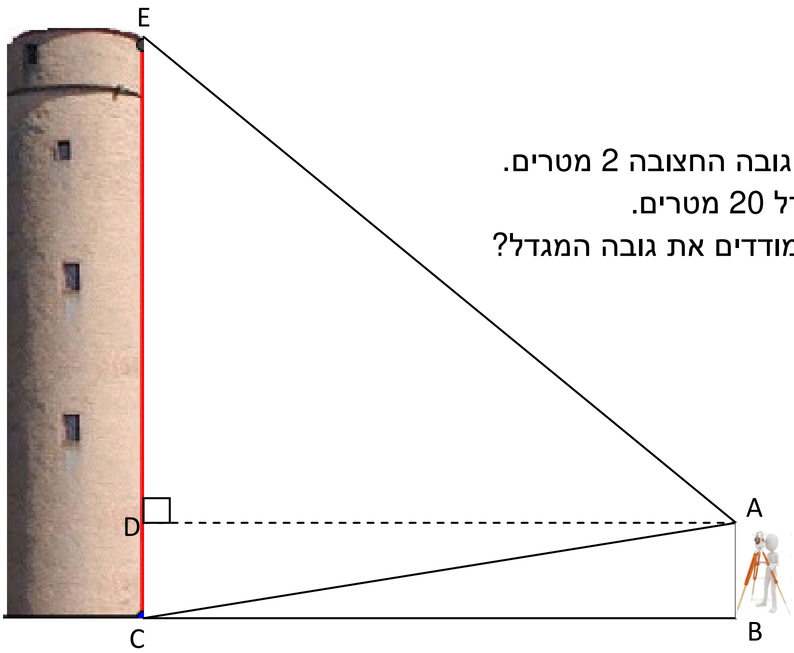
תאודוליט הוא מכשיר מדידה המשמש למדידת זוויות: הזווית בין קו ראייה לבין מישור אופקי והזווית בין שני קווי ראייה מאותה נקודה. כדי למדוד בעזרת התאודוליט מעמידים אותו על חצובה:

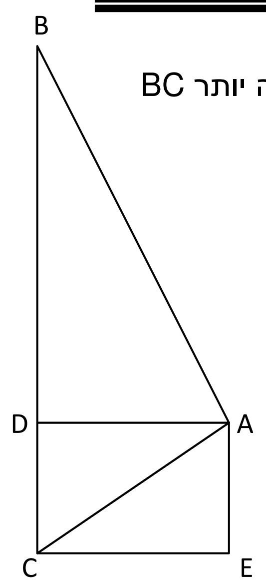
כדי למדוד מגדל נעזרים בתאודוליט אותו מעמידים בנקודה A (ראו שרטוט).

40.המרחק BC בין המגדל למודד הוא 35 מטרים.
הזווית DAC בת 10.5°. הזווית DAE בת 43°.
מה גובהו של המגדל?



41.גובה המגדל 50 מטרים. גובה החצובה 2 מטרים.
המרחק בין החצובה למגדל 20 מטרים.
מה גודל הזוויות בעזרתן מודדים את גובה המגדל?
(זוויות DAC ו- DAE)



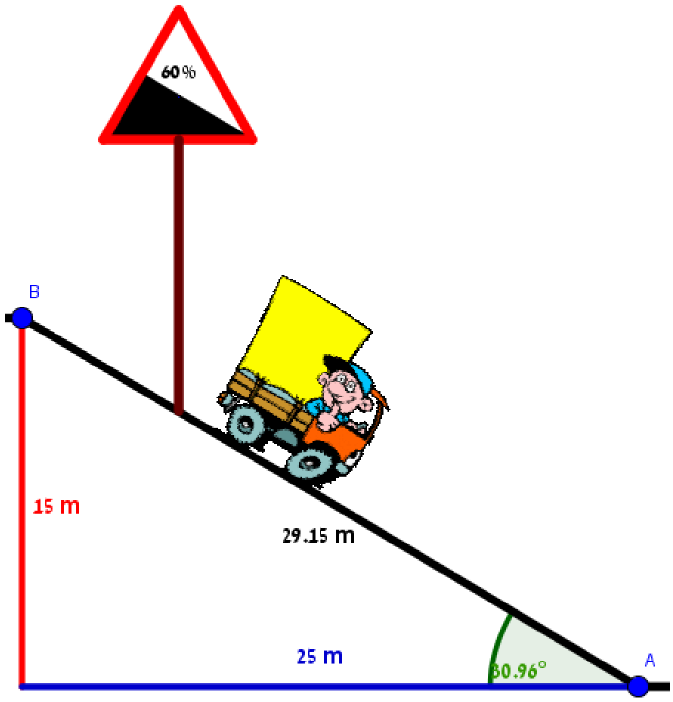


42. AE ו- BC הם קטעים המייצגים שני בניינים.
מנקודה A הנמצאת על גג בניין AE שגובהו 10 מטרים רואים בניין גבוה יותר BC בזווית $\measuredangle BAC = 70°$.
מנקודה C הנמצאת בתחתית בניין BC רואים את קצה הבניין AE בזווית $\measuredangle ACE = 28°$.

א. חשבון את המרחק בין שני הבניינים.

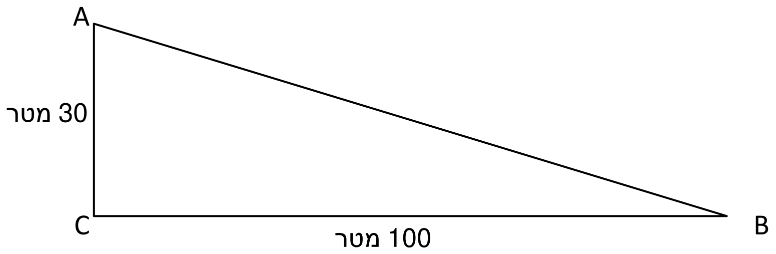
ב. חשבון את גובה הבניין BC.

בשרטוט שלפניכם נראה קטע כביש AB ששיפועו 60%.
הזווית המתאימה לשיפוע 60% היא 30.96°



הגדרה: שיפוע של קטע כביש של 10% משמעותו שעל כל תזוזה אנכית של 10 מטר יש לזוז תזוזה אפקית של 100 מטר: $\frac{10}{100} = 0.1$. הזווית המתאימה לשיפוע של 10% היא 5.7°.

43.בשרטוט לעיל נראה קטע כביש AB ששיפועו 30%.



שיפוע של 30% משמעותו שאם ברצוננו להגיע מנקודה A לנקודה B, על כל הזזה אנכית של 30 מטר עלינו לעשות הזזה אפקית של 100 מטר.
השיפוע הוא טנגנס הזווית ∢ABC.

א. חשבו את הזוית המתאימה לשיפוע של 30%

ב. חשבו את הזוית המתאימה לשיפוע 20%

44.ידוע כי אורך קטע הכביש AB הוא 2 ק"מ ושיפועו 30%

א. חשבו את הזווית המתאימה לשיפוע של קטע הכביש. (היעזרו בשרטוט)

ב. חשבו את ההזזה האפקית של קטע הכביש.

45.ידוע כי שיפוע קטע הכביש 25% וההזזה האפקית היא 1.5 ק"מ .

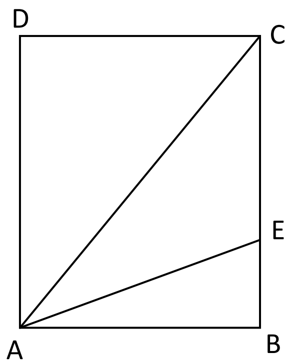
א. חשבו את הזווית המתאימה לשיפוע של קטע הכביש. (היעזרו בשרטוט)

ב. חשבו את אורך קטע הכביש.

*ג. אם מהירות מכונית היא 60 קמ"ש, בכמה דקות תעבור המכונית את הדרך AB?

46.במלבן ABCD אורך הצלע AB הוא 18 ס"מ.

את הזווית A חילקו ביחס של 2 : 3 : 4 כך ש- ∢EAB הקטנה ביותר ו- ∢DAC הגדולה ביותר.

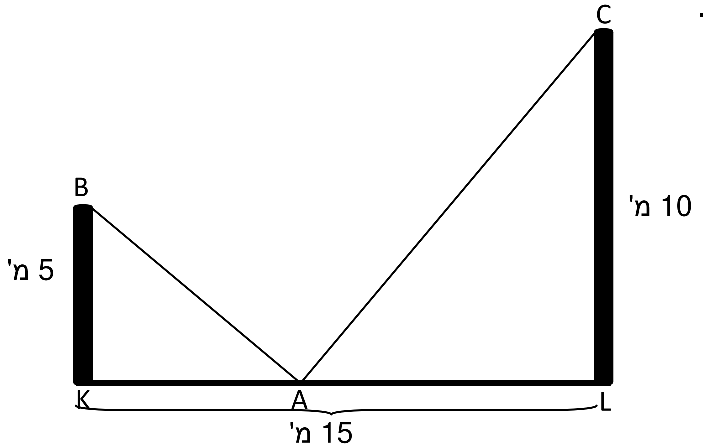


א. מה אורך הקטע EB?

ב. מה אורך הקטע CB?

ג. מה היחס EB : CE?

**47.לפניכם שני עמודי חשמל, האחד בגובה 5 מ' והשני בגובה 10 מ'.
המרחק בין העמודים הוא 15 מטרים.
מותחים כבלים מקצה של כל עמוד
אל הקרקע כפי שמתואר בשרטוט.



א. מה יהיה גודל הזווית הנוצרת בין כל אחד מהעמודים והכבל היורד ממנו אל הקרקע כשהמשולשים BKA ו- CLA יחפפו זה לזה?

ב. אם המשולשים חופפים מה האורך של שני הכבלים ביחד?

ג. באיזה מרחק מהנקודה K יש למקם את נקודת הפגישה בין הכבלים כך שהמשולשים הנוצרים בין העמודים והכבלים יהיו דומים זה לזה?
(מה יהיה אורך הקטע KA)

ד. מה יהיה גודל הזווית הנוצרת בין כל אחד מהעמודים והכבל היורד ממנו אל הקרקע כשהמשולשים יהיו דומים זה לזה?

ה. אם המשולשים KBA ו- LAC דומים מה האורך של שני הכבלים ביחד?

ו. מה יהיה אורך שני הכבלים ביחד אם הנקודה A תהיה במרחק 3 מטרים מהנקודה K?

ז. מה יהיה אורך שני הכבלים ביחד אם הנקודה A תהיה במרחק 7 מטרים מהנקודה K?

ח. באיזה מרחק מהנקודה K יש למקם את הנקודה A כדי שאורך הכבלים ביחד יהיה מינימלי? הוכיחו.[2]

[2] היעזרו ברמז הבא: על פי תכונה פיזיקלית שהייתה ידועה גם ליוונים: המרחק המינימלי שקרן אור עוברת מ- B ל- C דרך A היא בזווית השתקפות שווה ביחס לקרקע. ראו הוכחה לבעיית הרון בסוף המסמך וכן יישומון גאוגברה "עמודי חשמל וכבלים"

תשובות:

1. א. עפ"י משפט הדמיון ז"ז

1.ב. זווית משותפת α וזוויות ישרות DEA ,BCA

1.ג. BC ו- DE, AB ו- AD, AC ו-AE

1.ד. (1) 5 ס"מ = AB

1.ד. (2) 8 ס"מ = AE, 6 ס"מ = DE

1.ה. $\frac{DE}{AD}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ (2) $\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$ (1)

2.א. $\alpha = \measuredangle A = \measuredangle A$,
$\measuredangle KPA = \measuredangle BCA = 90°$
המשולשים דומים עפ"י משפט הדמיון ז"ז

2.ב. 6 ס"מ = AP, 4.5 ס"מ = KP,
7.5 ס"מ = AK, $\frac{KP}{AK}=\frac{4.5}{7.5}=\frac{3}{5}$
$\frac{BC}{AB}=\frac{DE}{AD}=\frac{KP}{AK}=\frac{3}{5}$

3.

גודל הזווית α	$\frac{a}{c}=\sin\alpha$	גודל הזווית α	$\frac{a}{c}=\sin\alpha$
25°	0.422	0°	0
50°	0.766	14.478°	0.25
75°	0.966	30°	0.50
80°	0.985	48.590°	0.75
90°	1	64.158°	0.9

5.

4.266	11.57	23.492	16.689

7.

31.382	26.9	13.24	10.457

9.

12.287	14.863	13.24	6.725

10.א. 12.619 ס"מ = CB
18.021 ס"מ = AC

10.ב. שטח המשולש 113.703 סמ"ר

10.ג. היקף המשולש 52.64 ס"מ

11.א. 18.312 ס"מ = AB

11.ב. 10.503 ס"מ = AC

11.ג. היקף המשולש 43.815 ס"מ

11.ד. שטח המשולש 78.773 סמ"ר

12.א. 9.193 ס"מ = AD

12.ב. 15.427 ס"מ = BC

12.ג. שטח המשולש 70.91 סמ"ר

13.

46.05°	34.85°
53.13°	67.98°

14.

53.13°	35.75°
59.04°	69.44°

15.א. 9 מ'

15.ב. 53.13°

16.א. 7.75 מ'

16.ב. 14.478°

17.א. צלע המשולש 9.238 ס"מ

17.ב. היקף המשולש 27.713 ס"מ

17.ג. גובה המשולש 8 ס"מ – במשולש שווה צלעות התיכון והגובה מתלכדים

17.ד. שטח המשולש 36.95 סמ"ר

18.א.	$\sphericalangle DBC=56.443^\circ$
18.ב.	AC = 45.227 ס"מ
18.ג.	שטח המשולש 678.41 סמ"ר
18.ד.	AB = 54.272 ס"מ
19.א.	אורך האלכסון 14.42 ס"מ
19.ב.	33.69°, 56.31°
20.א.	אורך הגובה ל- BC הוא 3 ס"מ
20.ב.	$\sphericalangle ACB = 143.13^\circ$
21.א.	$AB = \sqrt{45}$
21.ב.	63.435°
22.א.	$\Delta EBF \sim \Delta DEC \sim \Delta ACB \sim \Delta AFD$ המשולשים ישרי זווית ושווי שוקיים: נתבונן במשולש EBF או EBO (הנקודה F מתלכדת עם הנקודה O) $\sphericalangle BOE = 90^\circ$ (הזווית נוצרת מחיתוך בין הצירים) OE = OB = 1 יח' ולכן המשולש OBE משולש ישר זווית ושווה שוקיים ו- $\sphericalangle BEO = \sphericalangle EBO = 45^\circ$, כך גם הזווית הקדקודית ABC שווה 45° ולכן לכל המשולשים זווית בת 45°. כמו כן נתון שהישרים מאונכים ולכן $\sphericalangle ECD = \sphericalangle ECA = 90^\circ$. המשולשים דומים על פי משפט הדמיון ז"ז. דרך אחרת: נתבונן במשולש EBF: אורך היתר $\sqrt{2}$ בעזרת היחס בין הניצב ליתר נמצא ש - $\sphericalangle BEF = 45^\circ$. ההמשך זהה לדרך הקודמת.
22.ב.	BC = 2.828 יח', CD = 4.243 יח'
23.	12.287 ; 14.863 ; 28.394 ; 6.725

24.א.(1)	בעלי אותו השיפוע
24.א.(2)	אותו גודל זווית
24.ב.	a : b
24.ג.	המשולשים ADE ו- ABC דומים כי לשניהם זווית משותפת α וזווית ישרה, על פי כך שנתונים ניצבים לקטע AE. מכאן קיים יחס שווה בין הצלעות המתאימות. $\frac{a}{c}=\frac{b}{f}$ כמו מתקיימים: af=cb ו- $\frac{a}{b}=\frac{c}{f}$
26.	10.503 ; 22.212 25.734 ; 7.032
27.	53.13° ; 35.754° 59.04° ; 69.44°
28.	משמאל לימין: x בעזרת קוסינוס y בעזרת טנגנס x בעזרת סינוס x בעזרת קוסינוס y בעזרת טנגנס x בעזרת טנגנס x בעזרת סינוס
29.א.	AB = 3.214 מ' (גובה המגלשה)
29.ב.	3.42 מ' = אורך הסולם
30.	אורכו של בסיס המשולש 27.189 ס"מ
31.	שטח המלבן 89.98 סמ"ר

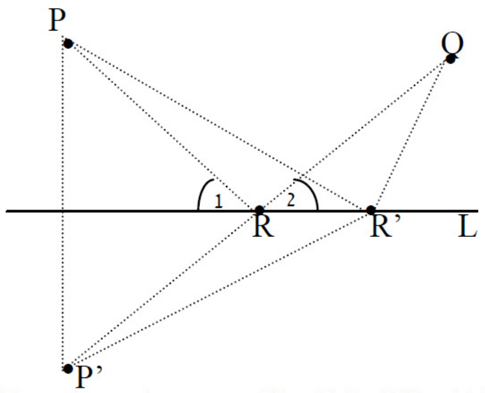
32.א.	BC = 7 ס"מ
32.ב.	$\tan\angle CAB = \frac{7}{3}$
32.ג.	$\sphericalangle CAB = 66.801°$
32.ד.	היקף המשולש 17.62 ס"מ
33.	71.565°
34.א.	A(2,4), B(10,0)
34.ב.	$\sphericalangle ABC = 26.565°$
34.ג.	AB = 8.944 יח'
34.ד.	$\sphericalangle BAD = 63.435°$ (משלימה ל- 90°) $\sphericalangle CAD = 26.565°$ $\tan\sphericalangle CAD=0.5$ $\sphericalangle CAB = 90°$
34.ה.	AC = 4.472 יח' חישוב בעזרת סינוס זווית או משפט פיתגורס.
35.א.	20 סמ"ר
35.ב.	שטח משולש KLM 5 סמ"ר. AD:KP = 5:2.5 = 2:1 לכן היחס בין השטחים הוא 4:1
35.ג.	$\sphericalangle C = 39.806°$
35.ד.	$\sphericalangle M = 39.806°$
36.א.	BC = 6.028 ס"מ
36.ב.	שטח המשולש 12.057 סמ"ר
36.ג.	היקף המשולש 16.045 ס"מ
37.א.	$BC \parallel FG \Leftarrow \sphericalangle B = \sphericalangle AFG$, $\sphericalangle C = \sphericalangle AGF$ זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים. $\Delta ABC \sim \Delta AFG$ על פי משפט הדמיון ז"ז.

37.ב.	AG = 3.5 ס"מ AG = x $\frac{5}{15} = \frac{x}{x+7}$ $5x + 35 = 15x$ $35 = 10x$ $3.5 = x$
37.ג	$\sphericalangle HAC = 45.585°$
37.ד.	AH = 7.348 ס"מ
37.ה.	55.114 סמ"ר
38.א	$\sphericalangle CED = \sphericalangle DFC = 90°$ במלבן זוויות ישרות $\sphericalangle BED = \sphericalangle DFA = 90°$ זוויות צמודות לזוויות ישרות $ED \parallel AC \Leftarrow$ $\sphericalangle A = \sphericalangle EDB$, זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים. $\Delta DFA \sim \Delta BED$ על פי משפט הדמיון ז"ז.
38.ב.	DE = 1.875 ס"מ
38.ג.	$\sphericalangle A = 67.38°$
39.א.	$\sphericalangle BDC = 21.801°$
39.ב.	EB = 5.233 מ'
39.ג.	10.466 מ"ר
40.	39.125 מ'
41.	$\sphericalangle DAC = 5.711°$ $\sphericalangle DAE = 67.38°$

42.א	18.807 מ'	47.א	∢KBA = 63.435°, ∢ACL = 26.565°,
42.ב	26.934 מ'	47.ב	22.361 מ'
43.א	16.699°	47.ג	5 מ'
43.ב	11.31°	47.ד	45°
44.א	16.699°	47.ה	21.21 מ'
44.ב	1.916 ק"מ	47.ו	21.451 מ'
45.א	14.036°	47.ז	21.409 מ'
45.ב	1.546 ק"מ	47.ח	5 מ'
45.ג	1.546 דקות		
46.א	EB = 6.551 ס"מ		
46.ב	CB = 21.452 ס"מ		
46.ג	14.9001 : 6.551 = 2.274 : 1		

משפט (הרון) על התכונה האקסטרמלית של קרני אור.

נתון ישר L ושתי נקודות P ו- Q מצידו אחד של הישר. השאלה היא איך אפשר לבחור נקודה R על הישר L, כך שסכום אורכי הקטעים PR ו- PQ ייתן את הדרך הקצרה ביותר מ- P ל- Q, כאשר מסלול עובר דרך נקודה על הישר L. בעייה זאת ידועה במתמטיקה כבעית הרון של קרן אור.



פתרון :

ראשית נסמן את הנקודה P', הסימטרית ל- P ביחס לישר L.

(ראה סרטוט). מכאן $PR = P'R$. נחבר כעת את הנקודות P' ו- Q.

נסמן את נקודת החיתוך של הישר L והישר $P'Q$ ב- R.

נוכיח כי בין כל המסלולים האפשריים האורך $PR + RQ$

הוא בעל ערך מינימלי. ניקח נקודה כלשהי R' ונחבר אותה עם

P, Q ו- P'. גם כאן $PR' = P'R'$. אי שוויון המשולש נותן לנו

$P'Q < P'R' + R'Q$. ולכן $PR + RQ = P'R + RQ = P'Q < P'R' + R'Q = PR' + R'Q$. בכך קיבלנו שהנקודה R מקיימת את תנאי הבעיה והיא הנקודה המבוקשת על הישר L. בנוסף לכך $\angle R_1 = \angle R_2$ וכאן הרון סיכם כי קרן אור שמגיעה לישר L בזווית מסוימת משתקפת באותה זווית מהישר.