جامعة الشباب

مقدمة للمنطق في الرياضيات

بروفيسور إيلون سولين

TEL AVIV UNIVERSITY
אוניברסיטת תל אביב

مقدمة
للمنطق في الرياضيات
إيلون سولن

مدرسة علوم الرياضيات
جامعة تل أبيب

شكر وتقدير
نشكر طلاب صفوف السابع 4 والثامن 4 في سنة 2016-2017 في اعدادية "شموئيل هنجيد" في هرتسليا و "نعمي مارنك" من المدرسة أورط بن يمينا، الّذين تعلموا في الكراس وأعطوا ملاحظات ساعدت في تحسينه، وكذلك للمعلمات "بتي كوهين" و"دفنه سبير".

المحتويات

المقدمة

معنى كلمة منطق- والتي مصدرها من اليونانية "الوجوس"λόγος ، قول، سبب أو فكرة- هو تفكير سليم، ومن هنا، تفكير منطقيّ تفسيره تفكير منتظم وسليم.

المنطق الرياضيّ هو مجال تطوّرَ حتى يبحث سيرورة الاستنتاج، وهي ضروريّة بالنسبة لنا لأنّ اللغة المتحدَّث بها ليست لغة دقيقة. أحد الامثلة لعدم الدقّة في اللغة هو النظام الذي تترتّب به كلمة نسبة. لتوضيح المشكلة دعونا نتمعّن في تمرين الحساب4×3+2. بما أنّ عمليّة الضرب تسبق عمليّة الجمع، نتيجة التمرين هي 14.

وماذا عن هذه الحالة:

معلّمة التوراة أخبرت طلاب الصفّ أنّها ستضع في الشّهادة علامة جيّد جدا فقط للطلاب الحاصلين على علامة 100 في الامتحان أو الحاصلين على علامة 100 في الوظيفة النهائيّة وحفظوا غيبًا قصيدة داود جوناثان.

حصلت دينا على علامة 100 في الامتحان، علامة 90 في الوظيفة النهائية ولم تحفظ غيبا القصيدة. هل ستحصل على علامة جيّد جدًا؟

الأمر متعلّق في الاسبقيّة بين كلمات الرّبط "أو" و- "وأيضًا". سنستعين في الأقواس لنبيّن الأسبقيّة بين كلمات الرّبط، إذا كانت كلمة الرّبط "أو" تسبق كلمة الرّبط "وأيضًا"، نحصل على القاعدة التالية:

يحصل الطالب على علامة جيّد جدًا إذا (حصل على علامة 100 في الامتحان أو 100 في الوظيفة النهائيّة) وأيضا حفظ غيبًا قصيدة داود جوناثان.

حسب هذه القاعدة، على الطلاب تحقيق شرطين للحصول على علامة جيّد جدًا، بحيث يكون أحد الشروط حِفظ قصيدة داود جوناثان غيبًا. بما أنّ دينا لم تحفظ غيبًا قصيدة داود، لن تحصل على علامة جيّد جدا. إذا كانت، في المقابل، كلمة الرّبط "وأيضًا" تسبق كلمة الرّبط "أو" نحصل على القاعدة التالية:

يحصل الطالب على علامة جيّد جدا إذا حصل في الامتحان على علامة 100 أو (حصل على علامة 100 في الوظيفة النهائيّة وحفظ غيبًا قصيدة داود جوناثان).

حسب هذه القاعدة، على الطالب أن يحقّق شرطًا واحدًا على الأقلّ من الشرطين للحصول على علامة جيّد جدا في الشهادة. دينا تحقّق الشّرط الأوّل حيث حصلت فعلاً على علامة 100 في الامتحان، ولذلك ستحصل على علامة جيّد جدا.

الجمل الأربع التالية تمثّل جيّدا مشكلة إضافيّة:

أ. رأيت سفينة زرقاء.
ب. رأيت سفينة.
ت. رأيت جملاً كاملاً.
ث. رأيت جملاً.

من الواضح أنّه إذا كانت الجملة "أ" صحيحة فإنّ الجملة "ب" صحيحة أيضًا. مع هذا، إذا كانت الجملة "ت" صحيحة، فهذا لا يعني بالضّرورة أنّ الجملة "ث" صحيحة. كيف يمكن التمييز بين هذين الحدثين؟

الجمل الثلاث التالية تمثّل مشكلة ثالثة في الاستنتاج:

أ. سيارتنا زرقاء.
ب. الازرق هو لون.
ت. سيارتنا هي لون.

حتّى لو كانت الجمل "أ" و "ب" صحيحة، الجملة "ت" غير صحيحة.

تبيّن الامثلة التي عرضناها أنّه حتى نفهم كيف يتمّ الاستنتاج علينا تطوير لغة رسميّة تعطي لكلّ جملة معنى واحدًا والاستنتاجات التي يمكن استنتاجها صحيحة. في هذه الكرّاسة سنطوّر لغة تُدعى حساب القضايا، **سنرى كيف نبني بواسطتها جملاً وكيف نحدّد معانيها. يمكن إيجاد جذور اللغة في أعمال الفلاسفة اليونانيين ارسطو** (384–322 قبل الميلاد) **وكريسيبوس** (280–205 قبل الميلاد) وفي أعمال متأخّرة أكثر للفيلسوف الفرنسي بيير ألبيرد (1079–1142). يمكنكم القراءة حول العلماء ارسطو، كرسيفوس وبييرألبيرد في الصفحة 55.

لغة حساب القضايا مكوّنة من ثلاثة أنواع من الأحرف: قضايا ذريّة (أساسيّة)، روابط منطقيّة وأقواس. نبدأ استعراض اللغة بمصطلح القضيّة.

القضيّة

المصطلح الأساسيّ في لغة حساب القضايا هو القضيّة .

القضيّة هي تصريح يُظهر واقعًا يمكن أن يكون صحيحًا أو غير صحيحٍ.

نحن معنيّون في تطوير لغة دقيقة التي يمكن من خلالها ترجمة وتفسير الجمل بطريقة واحدة فقط، وسنتطرق إلى الجمل التي يمكن أن تكون صحيحة أو غير صحيحة. سنشاهد الآن أمثلة محدّدة من **القضايا:**

1) اليوم يوم الاثنين.
2) يوجد لديّ بنطلونًا أسودًا.
3) لا يوجد لديّ بنطلونًا أسودًا.
4) تشرق الشمس من الشرق وتغرب من الغرب.
5) معدّل البعد بين الكرة الأرضيّة والقمر هو 1000000 كم.
6) في سنة 2100 ستكون كلّ دول العالم متّحدة في إمبراطورية واحدة.

كلٌّ من الجمل المسجّلة أعلاه هي تصريح يمكن أن يكون صحيحًا أو غير صحيح.
"اليوم يوم الاثنين" صحيح ليوم واحد في الأسبوع وليس صحيحًا لستة أيام في الأسبوع.
القضيّتان "يوجد لديّ بنطلونًا أسودًا" و "لا يوجد لديّ بنطلونًا أسودًا" يمكن أن تكون كلّ منها صحيحة أو غير صحيحة.
في الحقيقة، أحدها صحيحة والاخرى غير صحيحة. أيّ منهما هي الصحيحة؟ لمعرفة الإجابة يجب النظر إلى خزانتي. القضيّة "تشرق الشمس من الشرق وتغرب من الغرب" صحيحة دائمًا، والقضيّة "معدّل البعد بين الكرة الأرضيّة والقمر هو 1000000 كم" ليست صحيحة، لأنّ معدّل البعد بين الكرة الارضيّة والقمر هو 384000 كم. الجملة "في الاسبوع القادم سيحضر إيال لزيارة" يصف حدث من المفروض أن يحدث في المستقبل ويمكن أن يكون صحيحًا أو غير صحيحٍ. فنحن حاليًّا لا نعرف إن كان إيال سيحضر لزيارة أم لا، لكنّ بعد أسبوع سنعرف ذلك. من هنا هذه الجملة أيضًا قضيّة. الجملة "في سنة 2100 ستكون كلّ دول العالم متّحدة في امبراطورية واحدة" تتطرّق أيضا إلى المستقبل، وعند قدوم هذا اليوم نحن (أو أحفادنا) سنعلم إن كانت صحيحة أم لا. لذلك هذه الجملة أيضًا قضيّة.

فيما يلي أمثلة لجمل ليست قضايا، لأنّها لا تُظهر وقائع.

1) كم السّاعة؟
2) شكرًا جزيلاً.
3) أمّي وأبي.
4) كلّ الأولاد في صفّي.
5) هل اليوم هو يوم الاثنين؟

فيما يلي قضايا تحوي قضايا جزئية:

1) اليوم يوم الأربعاء وغدًا يوم الخميس.
2) اليوم يوم الأربعاء وغدًا الجمعة.
3) يوجد لديّ بنطلونًا أسودًا أو لا يوجد لديّ بنطلونًا أسودًا.

القضيّة "اليوم يوم الاربعاء وغدًا يوم الخميس" مكوّنة من قضيّتين جزئيّتين:"اليوم يوم الأربعاء" و- "غدًا يوم الخميس". هذه قضيّة صحيحة ليوم واحدٍ وغير صحيحة لستة أيامٍ. كذلك القضيّة "اليوم يوم الاربعاء وغدًا الجمعة" مكوّنة من قضيّتين جزئيّتين وهي غير صحيحةٍ بتاتًا. القضيّة "يوجد لديّ بنطلونًا أسودًا أو لا يوجد لديّ بنطلونًا أسودًا" صحيحة دائمًا.

هناك قضايا تحوي كلمة الشرط "إذا":
1) إذا اشتروا لي غدًا بلوزة حمراء عندها سأعطي قُبلة لأبي.
2) إذا فاز فريقي في اللعبة، سنحصل على جائزة.

وهناك قضايا تحوي كلمة "لكلّ" أو "يوجد". هاتان الكلمتان تُدعيان "تعابير كميّة"، لأنّها تُوجّه للكميّات.

1) في كلّ يومٍ في الاسبوع سوف أتناول البيتزا.
2) كلّ إنسانٍ يُدعى جوادًا يحبّ البيتزا.
3) يوجد طالبٌ في صفّي يُدعى جوادًا.
4) لكلّ أولاد صفّي يوجد بنطلونًا أسودًا.
5) هناك ولدٌ في صفي لديه بنطلونًا أسودًا.

تمرين 1.Error! No sequence specified:

لكلّ واحدةٍ من الجمل – اكتبوا هل هي قضيّة أم لا.

الجملة	قضيّة	ليست قضيّة
1) التقيتُ دنيا البارحة.	X	
2) ماذا تريد؟		X
3) انا أحبّ اللّبن.		
4) أنا أحبّ اللّبن وأنت تحبّ البيتزا.		
5) في كلّ حالٍ من الأحوال كلاّ!		
6) أميرة قالت: " في كلّ حالٍ من الأحوال كلاّ!"		
7) كلّ الأولاد في الصفّ قالوا: "في كلّ حالٍ من الأحوال كلا!"		
8) متى رأيت المعلّمة؟		
9) يوجد طالب في الصف يدعى ربيع.		
10) أنت صادق أم مُخطئ.		
11) إذا ضحكت سأحضنك.		
12) شكرا لاشتراكك في حفلتي.		

حلول التمارين تظهر في نهاية الكرّاس. حاولوا أن تحلّوا التمارين بأنفسكم قبل فحص الإجابة. بما أنّ إجاباتكم قد تكون خاطئة حتى لو بدت لكم صحيحة، من المفضّل مقارنتها بين الحين والآخر مع الإجابات في نهاية الكرّاس.

2. روابط منطقيّة

النوع الثاني من الأحرف في لغة حساب القضايا هو الرّوابط المنطقية، الذي يمكّن من بناء قضايا مركّبة من قضايا ذريّة (أساسية). في هذا البند سنعرض الروابط المنطقيّة ونبني بمساعدتهم قضايا مركّبة. سنرى كيف أنّ صحّة أو عدم صحّة القضايا المركّبة تُحدّد من صحّة أو عدم صحّة القضايا الذريّة التي تكوّنها. المعنى الكلامي لقضيّة بسيطة لن يكون مهمّا لبناء القضيّة المركّبة وتحديد صحتها; كلّ ما سنحتاج إلى معرفته هو أيّ من القضايا الذريّة التي تكونّها صحيحة. لهذا السّبب سنلخّص الكتابة ونشير الى القضيّة الذريّة بأحرف انجليزية.
على سبيل المثال، إذا أشرنا بـ :

A = "يوجد لدي بلوزة خضراء"،

إذًا يمثّل لنا الحرف A القضيّة "يوجد لديّ بلوزة خضراء". بشكل مشابه يمكن أن نشير إلى

B = "يوجد لدي بنطلونًا أزرقًا"،

ويمكن أيضًا كتابة:

C = "لديّ قبّعة حمراء".

فيما بعد سوف نستعين في القضايا الثلاث A، B و-C التي عرّفناها هنا.

2.1. القضيّة النافية

نفي القضيّة "لديّ بلوزة خضراء" هو " ليس صحيحًا أنّه لديّ بلوزة خضراء "، أيّ لا يوجد لديّ بلوزة خضراء. لذلك، عندما " A هي قضيّة " لدي بلوزة خضراء"، فإنّ النفي لـ A هو القضيّة "لا يوجد لديّ بلوزة خضراء". متّفق أن نشير بالنفي للقضيّة A بـ - ¬A

(وهناك من يشيرون للنفي للقضيّة A بـ - ~A).

القضيّة " ليس صحيحًا أنّه لديّ بلوزة خضراء " هي قضيّة مركّبة، لأنها تحوي قضيّة أقصر منها، "يوجد لديّ بلوزة خضراء".

نرمز بـ -D إلى القضيّة "لا يوجد لديّ بلوزة خضراء". في هذه الحالة، النفي لـ D ، الذي أشرنا له بـ -D¬، هو "ليس صحيحًا أنّه لا يوجد لدي بلوزة خضراء". المعنى باللغة العربية للقضيّة D¬ هو " يوجد لديّ بلوزة خضراء". أي، القضيّة D تكافئ من حيث المعنى في اللغة العربية القضيّة A¬، و القضيّة D¬ تكافئ من حيث المعنى القضيّة A. نلاحظ أنه يمكننا نصّ تصريح معيّن بحيث يكون قضيّة بسيطة أو قضيّة مركّبة.

2.2.القضيّة المركّبة "وأيضا"

مثالٌ إضافيّ للقضيّة المركّبة هو "يوجد لديّ بلوزة خضراء ويوجد لديّ بنطلون أزرق". هذه القضيّة مبنيّة من قضيّتين ذريّتين (أساسيّتين): "يوجد لديّ بلوزة خضراء" التي أشرنا إليها في البداية بـ A، و " لديّ بنطلون أزرق" التي أشرنا إليها في البداية بـ B. لذلك هذه القضيّة يمكن اختصارها وكتابتها بواسطة "A وأيضا B".

سوف نختصر ونكتب $A \wedge B$ مكان "A وأيضا B". انتبهوا: القضايا المكتوبة باختصار تُقرأ من اليسار إلى اليمين، كما نقرأ في اللّغة الانجليزية. لذلك نكتب $A \wedge B$ ونقرأ "A وأيضا B".

يمكن أيضًا التحدّث عن القضيّة "A وأيضًا B وأيضًا C"، التي تشمل ما كُتِب في القضايا الثلاث A، B و-C: يوجد لديّ بلوزة خضراء، بنطلونًا أزرقًا وقبعةً حمراء. القضيّة - "A وأيضا B وأيضا C" نكتبها باختصار $A \wedge B \wedge C$.

2.3. القضيّة المركّبة "أو"

في العربيّة يوجد للكلمة "أو" معنيان مختلفان. عندما يقول أحدهم: "سأتّصل بك أو سأُرسل لك بريدًا الكترونيًّا" نفهم أنّه سيقوم بأحد الامرَيْن ولكن ليس كِليهما. بالمقابل، عندما أقول " أنا مريض، أخبرني الطبيب أنه يوجد لديّ رشح أو التهاب في الأذن"، نفهم من ذلك أنّه يمكن أن يكون عندي رشح أو التهاب في الأذن ، وإن لم أكن محظوظًا- فسوف يكون لديّ رشحًا والتهابًا في الأذن . أي، لا نلغي إمكانية أن أكون مريضًا في كلا السببين معًا.

حساب القضايا هو لغة ذات معنى واحدًا، لذلك علينا اختيار إحدى معاني الكلمة "أو". سنختار المعنى الثاني: عندما A = "يوجد لدي بلوزة خضراء" و-B = "يوجد لدي بنطلونًا أزرقًا"، القضيّة "A أو B" تعني يوجد لديّ بلوزة خضراء أو بنطلونًا ازرقًا (أو يوجد لديّ بلوزة خضراء وأيضًا بنطلونًا أزرقًا).

من المعتاد كتابة $A \vee B$ مكان "A أو B".

لماذا نستعمل الرمز $\wedge$ للتعبير عن "وأيضا" وبالرمز $\vee$ للتعبير عن" أو"؟ في اللاتينية، معنى الكلمة vel هو "واحد أو الآخر أو كِلاهما". الحرف V، وهو الحرف الأول في الكلمة، اتخذه الرياضيّون للإشارة إلى الكلمة "أو". الرمز $\wedge$ هو عكس الرمز $\vee$ واتُخِذ للرمز إلى الكلمة "وأيضا".

2.4. القضيّة المركّبة "إذا... فإنّ..."

في لغة حساب القضايا التي نطوّرها نستطيع أيضًا أن نبني جمل شرطٍ مبناها هو" إذا ... فإن...". القضيّة "إذا A فإن B" تعني إذا كانت القضيّة A صحيحة عندها أيضًا القضيّة B صحيحة: "إذا كان لديّ بلوزة خضراء فإنّ لدي بنطلونًا أزرقًا". سوف نختصر ونكتب $A \to B$ مكان "إذا A فإن B". القضيّة $A \to B$ تُدعى "A يؤدي إلى حدوث B"

إذا أشرنا إلى:

G = "غدًا سأذهب إلى المدرسة" و-

H = "غدا سأرى جواد"،

معنى القضيّة "إذا G فإنّ H" هو إذا ذهبتُ غدًا الى المدرسة عندها سأرى جوادًا غدًا في المدرسة.

2.5. الأقواس

في المقدّمة في صفحة 4 رأينا أنّ ترتيب الأسبقيّة بين الروابط المنطقيّة يغيّر معنى الجملة. الطريقة لتحديد أسبقيّة الروابط هي بواسطة استعمال الأقواس، كاستعمالنا لها في تمارين الحساب. نشير على سبيل المثال:

A = "اسمي رامي"،

B = " اسم معلمي عمرو"،

C = " أنا أسكن في هرتسليا ".

أمامنا قائمة من القضايا في لغة حساب القضايا، ومعناها في اللغة العربية:

حساب القضايا	اللغة العربيّة
$A\wedge(\neg C)$	اسمي رامي ولا أسكن في هرتسليّا.
$\neg(A\wedge C)$	ليس صحيحًا أنّ اسمي رامي وأنّي أسكن في هرتسليّا.
$(A\wedge B)\rightarrow C$	إذا كان اسمي رامي واسم معلّمي عمرو، إذًا أنا أسكن في هرتسليّا
$A\wedge(B\rightarrow C)$	اسمي رامي، وإذا كان اسم معلّمي عمرو، فإني أسكن في هرتسليّا.
$\neg((A\wedge B)\rightarrow C)$	ليس صحيحًا أنّه إذا كان إسمي رامي وأسم معلّمي عمرو فإنّي أسكن في هرتسليّا.
$(\neg(A\wedge B))\rightarrow C$	إذا لم يكن صحيحًا أنّ إسمي رامي واسم معلمي عمرو، فأنّي أسكن في هرتسليّا.

2.6. تلخيص

رأينا أنّ لغة حساب القضايا مبنيّة من قضايا مركّبة من الأحرف (A، B، C، ...)، ومن روابط منطقيّة وأقواس. القضيّة الذريّة (الأساسيّة) هي قضيّة تحوي حرفًا واحدًا فقط، بدون روابط وبدون أقواس. القضيّة المركّبة هي قضيّة تحوي على الأقلّ رابط منطقي واحد.

قضيّة ذريّة (أساسيّة) هي قضيّة تحوي حرفًا واحدًا فقط، A، B، C وهكذا. **قضيّة مركّبة** هي قضيّة تحوي على الأقلّ أحد الرموز: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$.

معاني الرموز هي:

$A\wedge B$ = A وأيضا B.

$A\vee B$ = A أو B.

$\neg A$ = ليس صحيحًا أنّ -A.

$A\rightarrow B$ = إذا A فإن B.

الطريقة التي يتمّ بها تكوين جملٍ تسمّى **بناء جملة** (syntax)، وهذا ما رأيناه في البند السابق.
في البند التالي سنتعامل مع معنى القضايا، مجال يدعى **الدلالات** (semantics).

تمرين 2)
نشير إلى -A = "يوجد لديّ قلم رصاص أحمر"،

B = "يوجد لديّ مقلمة خضراء"،

C = "يوجد لديّ حقيبة بنفسجيّة".

أكتبوا القضايا التالية بواسطة الرموز A، B، C، ¬، ∧، ∨، →.

أ. لديّ قلمًا أحمرًا ومقلمة خضراء.

____

ب. ليس لديّ مقلمة بنفسجيّة.

____

ت. لديّ مقلمة خضراء أو لديّ قلم رصاص أحمر.

____

ث. إذا كان لديّ حقيبة بنفسجيّة فإنّه لديّ مقلمة خضراء.

____

تمرين 3

القضايا التي ظهرت في تمرين 2 كانت : A = " لديّ قلم رصاص أحمر"،

B = " لديّ مقلمة خضراء"،

C = " لديّ حقيبة بنفسجية".

سجّلوا القضايا التالية بواسطة الرموز A، B، C، ¬، ∧، ∨، → ورمز الأقواس (و-).

أ. لديّ قلم رصاص أحمر ومقلمة خضراء، وليس لديّ حقيبة بنفسجيّة.

____

ب.ليس صحيحًا أنّه يوجد لديّ حقيبة بنفسجيّة ومقلمة خضراء.

____

ج. ليس لديّ مقلمة خضراء أو قلم رصاص أحمر ومقلمة خضراء.

____

ح. إذا كان لديّ حقيبة بنفسجيّة فانّه ليس لديّ مقلمة خضراء.

____

خ. إذا لا يوجد لديّ حقيبة بنفسجيّة فإنّه لا يوجد لديّ مقلمة خضراء.

____

د. ليس لديّ حقيبة بنفسجيّة، ليس لديّ مقلمة خضراء ويوجد لديّ قلم رصاص أحمر.

____

تمرين 4

القضايا التي ظهرت في التمرينين 2 و-3 كانت:

A = "يوجد لديّ قلم رصاص أحمر"،

B = "يوجد لديّ مقلمة خضراء"،

C = "يوجد لديّ حقيبة بنفسجية".

اكتبوا المعنى الكلاميّ لكلّ قضيّة:

أ. $A\vee(\neg C)$:

____

____

____

ب. $(A\wedge(\neg B))\rightarrow(\neg C)$:

____

____

____

ت. $(\neg A)\wedge(\neg C)$:

____

____

____

ث. $(C\vee(\neg B))\wedge((\neg C)\vee A)$:

____

____

____

التمرينان 3 و-4 ليسا بسيطين كما يظهران. بعد إنهائكم حلّهما، افحصوا إجاباتكم مع الحلول التي تظهر في نهاية الكرّاس.

3. قيمة الصّدق للقضيّة

كلّ قضيّة يمكن أن تكون صحيحة أو غير صحيحة. يوجد قضايا صحيحة (مثل "تشرق الشمس من الشرق وتغيب من الغرب")، يوجد قضايا ليست صحيحة (مثل " اليوم يوم الاربعاء وغدًا يوم الجمعة") ويوجد قضايا التي يمكن أن تكون صحيحة أو غير صحيحة (مثل "اليوم يوم الثلاثاء"). هذه الصفة للقضيّة – كونها صحيحة أو غير صحيحة– تدعى قيمة الصدق للقضيّة.

قيمة الصدق للقضيّة هي"صدق" إذا كانت القضيّة صحيحة وهي "كذب" إذا كانت القضيّة ليست صحيحة.

قيمة الصدق للقضيّة "تشرق الشمس من الشرق" هي "صدق"، وقيمة الصدق للقضيّة "يوجد لبريطانيا واسرائيل حدودًا مشتركة" هي "كذب". قيمة الصدق للقضيّة "ذهبت البارحة للحديقة وتأرجحت في الأرجوحة" يمكن أن تكون "صدق" أو "كذب": إذا البارحة ذهبت الى الحديقة وتأرجحت في الارجوحة، فإنّ قيمة الصّدق للقضيّة هي "صدق". وإذا البارحة لم أذهب الى الحديقة، أو ذهبت للحديقة ولكن لم أتأرجح في الأرجوحة، فإن قيمة الصدق للقضيّة هي "كذب".
قيمة الصّدق للقضيّة يمكن أن يتغيّر وفق الزمن: إذا اليوم ذهبت للحديقة وتأرجحت في الأرجوحة، فإنّ غدًا قيمة الصدق للقضيّة "البارحة ذهبت الى الحديقة وتأرجحت في الأرجوحة" سيكون صحيحًا، حتى لو كان اليوم قيمة الصدق للقضيّة هو "كذب".
قيمة الصدق للقضيّة هي معناه. في الواقع، المعنى الوحيد الموجود للقضيّة في لغة حساب القضايا هو "صدق" أو "كذب".

<u>تمرين 5:</u>

لكلّ واحدة من القضايا، أكتبوا إن كانت قيمة الصّدق بالقضيّة "صدق" أم "كذب". انتبهوا أنّ قيمة الصّدق للقضيّة يحدّدها الشّخص الذي تتحدّث عنه القضيّة في اللحظة الزمنيّة التي ذُكِرت بها القضيّة. لذلك، في البندين 2 و4 للتمرين المقصود أنتم: في صفّكم وفي عائلتكم.
هذه الملاحظة سارية أيضًا على التمارين التالية في الكراس.

القضيّة	صدق	كذب
1) رئيس الحكومة الأوّل لدولة إسرائيل كان داود بن غوريون.		
2) في كلّ يوم ثلاثاء تحصل مربّيتي على يوم إجازة.		
3) 6=1+5		
4) لوالديّ يوجد ثلاثة أولاد.		
5) لكلّ انسان يوجد بالضّبط ثلاثة أولاد.		

القضايا الصحيحة في كلّ حالة هي قضايا مميّزة – عندما نقابل/نواجه قضيّة كهذه لسنا مضطرين للتفكير إذا كانت الشروط المذكورة فعلاً تتحقّق. على سبيل المثال، القضيّة "في كلّ يوم ثلاثاء

تحصل مربّيتي على يوم إجازة " صحيحة فقط إذا كانت مربّيتي تحصل على إجازة يوم الثلاثاء. لنستطيع أن نقرّر إن كانت قيمة الصّدق لهذه القضيّة هي صدق أم كذب علينا التفكير إذا كان فعلاً للمربيّة يوم إجازة في أيام الثلاثاء. القضايا الصّحيحة دائمًا توفّر علينا تعب التفكير. قضيّة كهذه تدعى "الطَّوطُولُوجيا" "טָאוּטוֹלוֹגְיָה". مصدر الكلمة من اليونانيّة: "טאוטו" معناها "زائد" و"לוגוס"، كما نتذكّر، تفسيره "قول". أي، טאוטולוגיה هو قول زائد، أي من الواضح أنه صحيح.

"الطَّوطُولُوجيا" **טָאוּטוֹלוֹגְיָה** هي قضيّة صحيحة في كلّ حالة: قيمة الصدق لها دائما "صدق".

وشبيه بهذه، القضيّة التي تكون دائما غير صحيحة وتدعى "التناقض". حتى عندما يُطلب منا اتّخاذ قرار ما هي قيمة الصّدق للقضيّة لا حاجة للتفكير إذا كانت هناك شروط معيّنة تتحقّق، لأنّ "التناقض" بكلّ حالة ليس صحيحًا.

التناقض هو قضيّة في كلّ حالة ليست صحيحة: قيمة الصدق لها دائمًا "كذب".

أمثلة لـ "الطَّوطُولُوجيا" هي:

1) اسمي إيال أو اسمي ليس إيال.
2) $2+6=8$.
3) $5>3$.
4) إذا مزّقت ورقة من دفترك سيكون عدد الصفحات الموجودة به أقلّ بصفحة واحدة من عدد الصفحات الموجودة به الآن.

أمثلة لتناقضات:

1) $3>5$.
2) اليوم يوم الخميس وغدًا يوم الاثنين.
3) لكلّ من يضع قبّعة صفراء على رأسه لا يوجد قبّعة على رأسه.
4) ليس صحيحًا كون إسمي إيال وليس صحيحًا كون إسمي ليس إيال.

أبسط طريقة لتكوين تناقض هو إضافة الكلمات "غير صحيح أنّ-" لـ - "الطَّوطُولُوجيا".
على سبيل المثال: القضيّة "إذا مزّقت ورقة من دفترك سيكون عدد الصفحات الموجودة به أقلّ بصفحة واحدة من عدد الصفحات الموجودة به الآن" هي "طَوطُولُوجيا" ، و القضيّة " غير صحيح أنّه إذا مزقت ورقة من دفترك سيكون عدد الصفحات الموجودة به أقلّ بصفحة واحدة من عدد الصفحات الموجودة به الآن" هي "تناقض". يمكن بهذه الطريقة أيضا تكوين "طَوطُولُوجيا" من التناقض: القضيّة "اليوم هطل مطر من الورود" دائما ليست صحيحة لذلك هي تناقض، والقضيّة "ليس صحيحًا بأنّه هطل اليوم مطرًا من الورود " دائما صحيحة ولذلك هي "طَوطُولُوجيا".

تمرين 6

لكلّ واحدة من القضايا – اكتبوا إذا كانت "طَوطُولُوجيا" ، تناقض، أو ليس أيّا منهما.

قضيّة	"طَوطُولُوجيا"	تناقض	ليس أيّا منهما
1) أنا إنسان.			
2) أنا إنسان أو أنا حلزون.			
3) ليس صحيحًا أني إنسان.			
4) ليس صحيحًا أنه غير صحيح أني إنسان.			
5) الشباك مفتوح، او الشباك مغلق والستارة مفتوحة.			
6) 5<10.			
7) 5>10.			
8) الشكل الرّباعيّ هو مضلّع له أربع أضلاع.			

تمرين 7

اكتبوا "طَوطُولُوجيا" اثنتين ومتناقضتين اثنتين:

____

____

____

____

4. جداول صدق

في هذا البند سنتعامل مع قيم الصّدق للقضايا المركّبة وكيف نستنتجها من قيم الصّدق للقضايا الذريّة التي تكوّنها.

نشير إلى:

A = "يوجد لديّ قلم رصاص أحمر".

القضيّة "A ليس صحيحًا"، الذي نشير له بـ ¬A، نقول "لا يوجد لديّ قلم رصاصٍ أحمر". ما هي قيمة الصّدق للقضيّة؟ قيمة الصّدق للقضيّة ¬A عكس قيمة الصدق للقضيّة A: إذا كان لديّ

قلم رصاص أحمر، فإنّ القضيّة A صحيحة والقضيّة $\neg A$ ليست صحيحة; وإن لم يكن لديّ قلم رصاص أحمرًا، فالقضيّة A ليست صحيحة والقضيّة $\neg A$ صحيحة.

إذا كانت القضيّة A تعرض حقيقة أخرى، على سبيل المثال:

A = "ينادونني لؤي"،

ما زالت قيمة الصدق للقضيّة $\neg A$ عكس قيمة الصدق للقضيّة A. كما نرى فإنّ قيمة الصدق للقضيّة $\neg A$ ليس متعلقًا في الحقيقة التي تمثّلها القضيّة A ، إنما بقيمة الصدق الخاصة به.

تحدث ظاهرة إضافية بكلّ قضيّة مركّبة. على سبيل المثال، نشير إلى -

A = "يوجد لديّ قلم رصاص أحمر".

B = "يوجد لديّ مقلمة خضراء".

القضيّة "A وأيضًا B"، التي نشير إليها بـ $A \wedge B$-، تعني أنّه يوجد لديّ قلم رصاص أحمر ومقلمة خضراء. هذه القضيّة هي صحيحة وقيمة الصدق لها "صدق". إذا كان لديّ قلم رصاص أحمر وأيضًا مقلمة خضراء – أي، إن كانت قيمة الصدق للقضيّة A هي "صدق" وأيضًا قيمة الصدق للقضيّة B هي "صدق". حتى لو غيّرنا التصريحات التي تمثّلها القضيّتين A و-B، على سبيل المثال:

A = "يسكن في القدس 700,000 شخص",

B = "البعد بين تل-أبيب والقدس هو 67 كيلومترًا"،

فإنّ قيمة الصدق لـ $A \wedge B$ تكون "صدق" فقط إذا كانت قيمة الصدق لكلا القضيّتين A و-B "صدق".

كلا المثالين المعروضين أعلاه يظهران أنه بالإمكان تحديد قيمة الصدق لقضيّة مركّبة من قيم الصدق للقضيّتين الذريتين اللواتي تكونّها. الجدول الذي يربط بين قيم الصدق للقضيّتين الذريتين وقيم الصدق للقضيّة المركّبة يدعى **جدول الصدق للقضيّة**.

بدل أن نشير إلى قيمة الصّدق للقضيّة بـ "صدق" أو بـ "كذب"، من المعتاد الإشارة لهذه القيمة بـ T وبـ F- ، على التناظر. الحرف T هو اختصار للكلمة true (وتعني صحيح باللغة الانجليزيّة) والحرف F هو اختصار للكلمة false (وتعني خطأ باللغة الانجليزيّة).

جدول الصّدق لقضيّة هو جدول يربط بين قيم الصّدق للقضايا الذريّة التي تكوّن القضيّة وبين قيمة الصّدق للقضيّة.

4.1 جدول الصّدق لقضيّة النّفي

سنبدأ من جدول الصّدق للقضيّة المركّبة الأبسط (الأقل تركيبًا)، A¬:

$\neg A$	A
F	**T**
T	**F**

يعرض العمود الأيمن في الجدول قيم الصّدق الممكنة للقضيّة الذريّة A، ويعرض العمود الأيسر قيمة الصّدق الملائمة للقضيّة المركّبة A¬. يتعامل السّطر الأوّل (تحت سطر العنوان الأحمر) مع الحالة التي تكون فيها القضيّة A صحيحة: قيمة الصّدق لها T. في هذه الحالة الـ A¬ ليست صحيحة، ولذلك قيمة الصدق له F. يتطرّق السّطر الثاني في الجدول إلى الحالة التي تكون فيها القضيّة A ليست صحيحة: قيمة الصّدق لها F. في هذه الحالة A¬ صحيح، ولذلك قيمة الصّدق لها T.

4.2 جدول الصدق للقضيّة المركّبة "وأيضًا"

فيما يلي جدول الصّدق للقضيّة المركّبة A∧B:

$A \wedge B$	B	A
T	**T**	**T**
F	**F**	**T**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

في هذا الجدول، العمودين الموجودين في الجهة اليمنى، يظهران قيمة الصدق الممكنة للقضيتين الذريتين A و-B اللتان تكوّنان القضيّة المركّبة، والعمود الأيسر يُظهر قيمة الصدق الملائمة للقضيّة المركّبة A∧B.

كم هو عدد الأسطر في جدول الصدق للقضيّة ؟ يتطرّق كل سطر في جدول الصدق لتعويض معين لقيم الصدق بكلّ واحدة من القضايا الذريّة التي تكوّن القضيّة المركّبة. على سبيل المثال، القضيّة المركّبة A¬ متعلقة في قضيّة ذريّة واحدة، A. يوجد للقضيّة A قيمتين ممكنتين، T و- F ولذلك في جدول القيم للقضيّةA¬ يوجد سطران، السّطر الأول لقيمة الصدق T وسطر اخر لقيمة الصدق F.

تحوي القضيّة المركّبة A∧B قضيّتان ذريّتان A و-B، ولكلّ قضيّة ذريّة قيمتا صدق ممكنتان– T و-F. لذلك يوجد في الجدول 2×2=4 أسطر، الملائمة لهذه الحالات: (أ) A صحيح و-B صحيح، (ب) A صحيح و-B ليس صحيحًا، (ج) A ليس صحيحًا و-B صحيح، (د) A ليس صحيحًا و-B ليس صحيحًا. سنرى فيما بعد جمل مركبة التي تحتوي على ثلاث قضايا ذريّة A، B و-C، بحيث سيكون في جدولهم الصدق 2×2×2=8 أسطر.

السّطر الأوّل في جدول الصّدق للقضيّة A∧B يعني أنّه عندما تكون قيمة الصّدق للقضيّة A هي T وقيمة الصدق للقضيّة B هي T، أيضًا قيمة الصدق للقضيّة A∧B هي T. ولذلك، القضيّة A="يسكن في القدس 700,000 شخص" صحيحة وأيضا القضيّة B="البعد بين تل-أبيب والقدس هو 67 كيلومترًا" صحيحة، ولذلك الـ "A وأيضًا B" صحيحة.

إذا كانت واحدة من القضايا A و- B غير صحيحة، أيضًا القضيّة "A وأيّضًا B" ليست صحيحة. على سبيل المثال، "إذا كان البعد بين تل-أبيب والقدس غير مساوٍ لـ 67 كيلومتر" (أيّ، القضيّة B ليست صحيحة) عندها أيضًا القضيّة "يسكن في القدس 700,000 شخص وأيضا البعد بين تل-أبيب والقدس هو 67 كيلومترًا" ليست صحيحة. لذلك في السّطر الثاني للجدول – الملائم للحالة التي تكون فيها قيمة الصّدق للقضيّة A هي T وقيمة الصّدق للقضيّة B هي F – قيمة الصّدق للقضيّة A∧B هي F. على نحو مشابه، قيمة الصّدق للقضيّة A∧B هي F أيضا عندما قيمة الصّدق للقضيّة A هي F وقيمة الصّدق للقضيّة B هي T (السّطر الثالث في الجدول). قيمة الصّدق للقضيّة A∧B هي F وأيضًا قيم الصدق لكلا القضيتين الذريتين A و-B هي F (السّطر الرابع في الجدول).

بكلمات أخرى، القضيّة A∧B صحيحة فقط إذا كانت القضيّة A صحيحة وأيضًا القضيّة B صحيحة. هذا الأمر غير مفاجئ، لأنّ هذا بالضّبط هو المعنى الكلامي للقضيّة A∧B!

4.3. جدول الصدق للقضيّة المركبة "أو"

كتابة جدول الصّدق للقضيّة المركّبة "أو" نتركها للقرّاء. تذكّروا أنّ القضيّة A∨B صحيحة، إذا كانت على الأقل واحدة من كلا القضيّتين A أو B صحيحة.

تمرين 8)
هذا الجدول هو جدول صدق للقضيّة A∨B، أكملوه!

A∨B	B	A
	T	T
	F	T
	T	F
	F	F

4.4. جدول الصّدق لقضيّة الشّرط

القضيّة المركّبة A→B تعني أنّه "إذا A فإنّ B". لبناء جدول الصّدق للقضيّة، سنتمعّن في القضيّة المركّبة "إذا أعطيتني شاقلين فإنّي سأعطيك شوكولاتة". هذه قضيّة مركّبة تحوي قضيّتين اثنتين :

A = " إذا أعطيتني شاقلين "،

B = " سأعطيك شوكولاتة ".

في أيّ الحالات التصريح "إذا أعطيتني شاقلين فإني سأعطيك شوكولاتة" صحيح؟

إذا أعطيتني شاقلين وأنا أعطيتك شوكولاتة – عندها التصريح يكون صحيحًا.

إذا أعطيتني شاقلين وأنا رفضت إعطاءك شوكولاتة – التصريح لن يكون صحيحًا.

وماذا لو لم تعطني أنت شاقلين، في هذه الحالة، بما أنّك لم تحقّق الشّرط، لا يوجد أيّ سبب لأنفّذ الاستنتاج، ولذلك إن لم تعطني شاقِلين، التصريح "إذا أعطيتني شاقلين فإنّي سأعطيك شوكولاتة" صحيح، في حالة أنّني أعطيك شوكولاتة أو لم أعطك شوكولاتة.

سنتمعّن في قضيّة شرط إضافيّة التي تمثّل نفس النقطة.

القضيّة "إذا كان اسم أمي ماريّا فسأعطيك هديّة" هي قضيّة شرط من الصورة A→B فيها:

A = " إذا كان أسم أمي ماريّا "،

B = "أعطيك هدية".

الأولاد الذين يقولون هذه القضيّة ولا يعطون هديّة لا يكذبون، لأنّ اسم أمهم ليس ماريّا، أيضًا هنا شرط القضيّة ليس صحيحًا (اسم أمي ليس ماريّا)، كلّ القضيّة صحيحة، إن كان الاستنتاج صحيحًا أو غير صحيحٍ.

يوجّهنا هذا الحوار إلى جدول الصّدق للقضيّة المركّبة A→B:

A→B	*B*	*A*
T	**T**	**T**
F	**F**	**T**
T	**T**	**F**
T	**F**	**F**

4.5. جداول قيم الصّدق لقضايا مركّبة إضافيّة

أحيانًا تعطى لنا قضيّة مركّبة بدرجة أكبر، وعندها نحسب جدول قيم الصّدق الخاصّة بها على مراحل. على سبيل المثال، سنحاول كتابة جدول الصّدق للقضيّة $(A\wedge(\neg B))\vee(\neg A)$.

من أجل ذلك، نسجّل جدول ذي 4 أسطر، سطر واحد لكل إمكانية من قيم الصدق لـ A ولـ B, و6 أعمدة. نسجل في أول عمودين الإمكانيات الأربع لقيم الصدق لـ A ولـ B.

				B	A
				T	T
				F	T
				T	F
				F	F

نرى أنّه في القضيّة المركبة $(A\wedge(\neg B))\vee(\neg A)$ تظهر القضايا $\neg A$ و$\neg B$. لذلك نسجل في العموديين التاليين قيم الصدق لهاتين القضيتين: عنما تكون قيمة الصدق للقضيّة A هي T، تكون قيمة الصدق للقضيّة $\neg A$ هي F، وعندما تكون قيمة الصدق للقضيّة A هي F، قيمة الصدق للقضية $\neg A$ هي T. بشكل مشابه نملأ العمود الخاص بالقضيّة $\neg B$.

		¬B	¬A	B	A
		F	F	T	T
		T	F	F	T
		F	T	T	F
		T	T	F	F

الآن أصبح بإمكاننا إيجاد قيمة الصدق للقضية $A\wedge(\neg B)$. نضيفها في العامود الخامس في الجدول. الطريقة الأبسط لإجراء ذلك هي التمعّن في الأعمدة الملائمة للقضايا A و$\neg B$ ، التي وجدناها سابقًا والاستعانة في جدول الصدق للقضيّة "وأيضًا"، التي وجدناها سابقًا أيضًا.

	A∧(¬B)	¬B	¬A	B	A
	F	F	F	T	T
	T	T	F	F	T
	F	F	T	T	F
	F	T	T	F	F

في النهاية، نجد جدول الصّدق للقضيّة المركّبة التي بدأنا منها، $(A\wedge(\neg B))\vee(\neg A)$. يمكن إجراء ذلك، من خلال التمعّن في الأعمدة الملائمة للقضايا $\neg A$ و-$A\wedge(\neg B)$, والإستعانة في جدول الصدق للقضيّة $A\vee B$ الذي وجدناه في تمرين 8.

$(A\wedge(\neg B))\vee(\neg A)$	$A\wedge(\neg B)$	$\neg$B	$\neg$A	B	A
F	F	F	F	T	T
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F
T	F	T	T	F	F

توجد طريقة أقصر لإيجاد جدول الصّدق للقضيّة، لكنّها تحتاج إلى بذل مجهود أكبر في التفكير.

مبنى القضيّة $(A\wedge(\neg B))\vee(\neg A)$ هو "قضيّة **أو** قضيّة"، ولذلك هو صحيح إذا كانت إحدى القضيّتين اللتين تكوّناه صحيحة، أيّ أنّه إن كانت قيمة الصّدق لـ $\neg A$ هي T أو قيمة الصّدق للقضيّة $A\wedge(\neg B)$ هي T. قيمة الصّدق لـ $\neg A$ هي T إذا كانت قيمة الصّدق لـ A هي F وقيمة الصّدق لـلقضيّة $A\wedge(\neg B)$ هي T إذا كانت قيمة الصدق لـ A هي T وقيمة الصدق لـ B هي F. نسجل عندها T و F في جدول الصّدق للقضيّة بأسطر ملائمة للحالات التالية: قيمة الصدق لـ A هي F (السطر الثالث والرابع) وقيمة الصدق لـ A هي T ولـ B هي F (السطر الثاني). بالسطر المتبقّي قيمة الصّدق للقضيّة $(A\wedge(\neg B))\vee(\neg A)$ ليست T، ولذلك هي F. نسجّل ذلك في السّطر الأوّل في جدول الصّدق. للإجمال، جدول الصّدق للقضيّة $(A\wedge(\neg B))\vee(\neg A)$ هو كالتالي:

$(A\wedge(\neg B))\vee(\neg A)$	*B*	*A*
F	T	T
T	F	T
T	T	F
T	F	F

بشكل غير مفاجئ حصلنا على نفس النتيجة في الطريقتين اللتين استعنا بهما لإيجاد قيم الصّدق.

تمرين 9)

جدوا جدول الصّدق للقضيّة $(B\vee(\neg A))\wedge(\neg B)$.

$(B\vee(\neg A))\wedge(\neg B)$	$B\vee(\neg A)$	**¬B**	**¬A**	**B**	**A**
				T	**T**
				F	**T**
				T	**F**
				F	**F**

تمرين 10)

جدوا جدول الصّدق للقضيّة $(C\wedge(\neg A))\vee((\neg B)\wedge A)$.

$(C\wedge(\neg A))\vee((\neg B)\wedge A)$	$(\neg B)\wedge A$	$C\wedge(\neg A)$	**¬B**	**¬A**	**C**	**B**	**A**
					T	**T**	**T**
					F	**T**	**T**
					T	**F**	**T**
					F	**F**	**T**
					T	**T**	**F**
					F	**T**	**F**
					T	**F**	**F**
					F	**F**	**F**

تمرين 11)

جدوا جدول الصّدق للقضيّة $(A\rightarrow(\neg C))\wedge((\neg B)\vee C)$.

$(A\rightarrow(\neg C))\wedge((\neg B)\vee C)$	$(\neg B)\vee C$	$A\rightarrow(\neg C)$	**¬C**	**¬B**	**C**	**B**	**A**

كما قلنا، "الطَّوطُولُوجيا" هي قضيّة قيمة الصّدق لها دائمًا "صدق" – في جدول الصّدق الخاص بها نحصل فقط على T. بينما التناقض هو قضيّة قيمة الصدق لها دائمًا "كذب" – في جدول القيم الخاص به نحصل فقط على F.

<u>تمرين 12)</u>

أي من بين القضيتين التاليتين هي "طَوطُولُوجيا", أي منها تناقض وأيها ليست طَوطُولُوجيا وليست تناقض؟ يمكن الاستعانة في الجدول الذي يظهر بعد التمرين. بعد تعبئة الجدول، القضيّة التي يلائمها العامود الذي يحوي الرمز T مرتين هو "طَوطُولُوجيا" ، القضيّة التي يلائمها العامود الذي يحوي مرتين الرمز F هي تناقض، والقضيّة التي يلائمها العامود الذي يحوي T وأيضًا F ليست طَوطُولُوجيا وليست تناقض.

قضيّة	طَوطُولُوجيا	تناقض	ليست "طَوطُولُوجيا" وليست تناقض
أ) A			
ب) $A \vee (\neg A)$			
ت) $A \vee A$			
ث) $A \wedge (\neg A)$			

A	**$\neg A$**	**$A \vee (\neg A)$**	**$A \vee A$**	**$A \wedge (\neg A)$**

<u>تمرين 13)</u>

أيّ من القضايا التالية هي طَوطُولُوجيا، أيّها تناقضات وأيّها ليست "طَوطُولُوجيا" وليست تناقضات؟ يمكن الاستعانة في الجدول الذي يظهر بعد التمرين.

قضيّة	"طَوطُولُوجيا"	تناقض	ليست "طَوطُولُوجيا" وليست تناقض
أ) $A \vee B$			
ب) $A \vee (A \rightarrow B)$			
ت) $((\neg B) \rightarrow A) \wedge ((\neg A) \wedge (\neg B))$			

ث) (A∧(¬B)) → (¬A)			

A	B	¬A	¬B	A∨B	A→B	A∨(A→B)	(¬A)∧(¬B)	(¬B) →A	((¬B) →A)∧((¬A)∧(¬B))
T	T								
T	F								
F	T								
F	F								

A	B	¬A	¬B	A∧(¬B)	(A∧(¬B)) → (¬A)
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

في بعض الأحيان يُعطى لنا جدول صدق وعلينا كتابة القضيّة المناسبة له.
لنتمعّن في جدول الصّدق التّالي، على سبيل المثال:

A	B	قضيّة
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	F

هل بإمكاننا إيجاد قضيّة جدول صدقها هو الجدول أعلاه؟ يوجد في الجدول سطر واحد فقط فيه قيمة الصّدق هي T – السّطر الثاني. في هذا السّطر، قيمة الصّدق للقضيّة A هي T وقيمة الصّدق للقضيّة B هي F. بكلمات أخرى، القضيّة الخاصّة بها ستكون صحيحة فقط عندما A صحيحة و-B غير صحيحة. القضيّة التي تحقّق هذه الصّفة هي القضيّة A∧(¬B).

إن كنتم غير متأكدين من ذلك، قارنوا الجدول المعروض هنا مع جدول الصّدق للقضيّة A∧(¬B) الذي وجدتموه في تمرين 13.

وماذا بالنسبة لجدول الصدق التالي:

قضيّة	B	A
F	T	T
T	F	T
F	T	F
T	F	F

هذا الجدول صحيح في حالتين:

- عندما A صحيحة و - B ليست صحيحة.
- عندما A ليست صحيحة و B ليست صحيحة.

رأينا في المثال السابق أنّ القضيّة $A\wedge(\neg B)$ صحيحة فقط عندما A صحيحة و B ليست صحيحة (الحالة الأولى). كذلك، القضيّة $(\neg A)\wedge(\neg B)$ صحيحة فقط عندما A ليست صحيحة وB ليست صحيحة (الحالة الثانية). القضيّة التي قيمة الصدق لها هي T في هاتين الحالتين هي القضيّة $(A\wedge(\neg B)) \vee ((\neg A)\wedge(\neg B))$. إذا لم تفهموا لماذا فعلا جدول الصدق هذا للقضيّة، جدوا جدول الصّدق لها بمساعدة الجدول التالي:

$(A\wedge(\neg B)) \vee ((\neg A)\wedge(\neg B))$	$A\wedge(\neg B)$	$(\neg A)\wedge(\neg B)$	$\neg B$	$\neg A$	B	A
					T	T
					F	T
					T	F
					F	F

وفق الجدول أعلاه، في جدول الصّدق لـ $A\wedge(\neg B)$ تمّ الإشارة إلى T واحد فقط – في السطر الملائم للحالة الأولى. كذلك في جدول الصدق للقضيّة $(\neg A)\wedge(\neg B)$ يظهر الرمز T وحيدًا – في السطر الملائم للحالة الثانية. عند إيجاد جدول الصدق لـ-
$(A\wedge(\neg B)) \vee ((\neg A)\wedge(\neg B))$، نحصل على الرمز T بكلّ سطر يحوي T في جدول الصدق الخاص بـ $A\wedge(\neg B)$ أو في جدول الصدق الخاص بـ $(\neg A)\wedge(\neg B)$. ولذلك نحصل فيه على إشارتي T، كما أردنا.

نجحنا فعلا في إيجاد قضيّة جدول قيمها هو:

قضيّة	B	A
F	T	T
T	F	T
F	T	F
T	F	F

لكن يوجد أيضًا قضايا إضافية، وحتى أقصر، يلائمها هذا الجدول. سنرى قضيّة واحدة كهذه. علينا الانتباه إلى أنّ العامود الأيسر عكس العامود للقضيّة B: عندما قيمة الصدق للقضيّة B هي T، قيمة الصدق للقضيّة التي نريد بناءها هو F، وعندما قيمة الصدق للقضيّة B هي F، قيمة الصدق للقضيّة التي نريد بناءها هي T. من هنا القضيّة التي نريد بناءها هي ¬B.

تمرين 14)

أكتبوا قضيّة يلائمها جدول الصدق التالي:

A	B	قضيّة
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

الإجابة: ______________________________

5. التكافؤ بين القضايا

في هذا البند سنتعرف على الحالات التي تكون فيها قضيتان هما قضيتان متكافئتان.

نشير إلى -

A = "عدت إلى البيت"،

B = "تحدثت مع أبي".

القضيّة ¬(A∧B) تعني ليس صحيحًا أنني عدت إلى البيت وتحدثت مع أبي. إن كان غير صحيح رجوعي إلى البيت وتحدّثي مع أبي، هذا يعني أنّني لم أرجع إلى البيت أو أنّني لم أتحدّث مع أبي، أو أنّ كِلا قِسْمَيْ الجملة لم يتحققا، أي لم أرجع إلى البيت ولم أتحدث مع أبي، أيّ، القضيّة ¬(A∧B) مكافئة للقضيّة (¬A)∨(¬B).

سنسّجل جدول الصّدق لهاتين القضيّتين:

A	B	A∧B	¬(A∧B)	¬A	¬B	(¬A)∨(¬B)
T	T	T	F	F	F	F

T	**T**	**F**	**T**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**
T	**T**	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**

نلاحظ أنّ جدول الصّدق للقضيّة $\neg(A\wedge B)$ يشابه جدول الصّدق للقضيّة $(\neg A)\vee(\neg B)$.

> قضيتان تدعيان متكافئان إذا كان لهما نفس جدول الصدق.

نشير للتكافؤ بين قضيّتين بواسطة الرمز $\equiv$.

على سبيل المثال، نكتب: $\neg(A\wedge B) \equiv (\neg A)\vee(\neg B)$.

تمرين 15)

سجّلوا أي أزواج من القضايا في الجدول متكافئة.

بإمكانكم الاستعانة في الجدول في نهاية التمرين.

غير متكافئة	متكافئة	القضيّة الثانية	القضيّة الأولى	
		$A\vee B$	$A\wedge B$	(1
		$(\neg A)\vee(A\wedge B)$	$A\to B$	(2
		A	$\neg(\neg A)$	(3
		$A\vee(\neg A)$	$A\to A$	(4
		B	$B\wedge(B\vee A)$	(5

						B	***A***
						T	**T**
						F	**T**
						T	**F**
						F	**F**
						B	**A**
						T	**T**
						F	**T**
						T	**F**
						F	**F**

<u>تمرين 16)</u>

هل القضيّة $(A\wedge B) \to (\neg C)$ مكافئة للقضيّة $(A\wedge C) \to B$؟

يمكن الاستعانة في الجدول

الإجابة:

A	B	C					
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	T	T					
F	T	F					
F	F	T					
F	F	F					

6. قواعد الاستنتاج

المنطق هو لغة دقيقة ولذلك تساعدنا على تطوير قواعد (قوانين) نستطيع بمساعدتها برهنة إدّعاءات مختلفة. في هذا البند سنبني بعض قواعد استنتاج التي ستمكننا من إثبات إدعاءات.

6.1. قواعد الاستنتاج الإيجابي

لنتمعّن في الحوار بين جود ووالدته.

جود: تعلّمت معلّمة الحساب في الجامعة.

الأم: كيف عرفت؟

جود: من أجل الحصول على شهادة تدريس على المعلّم أن يتعلّم في الجامعة، ويوجد لمعلمتي شهادة تدريس.أي، أنّها تعلّمت في الجامعة.

يبرهن جود إدّعاءه – " معلّمة الحساب تعلّمت في الجامعة" – بمساعدة سلسلة من الادعاءات المنطقية. هل طريقة برهان جود صحيحة؟

سنشير إلى -:

A = " يوجد للمعلمة شهادة تدريس"،

B = "تعلّمت المعلمة في الجامعة".

$A\to B$	B	A
T	T	T
F	F	T
T	T	F
T	F	F

يدّعي جود أنّ القضيّة A صحيحة (حيث يقول" معلمة الحساب تعلّمت في الجامعة ") وأنّ القضيّة $A\to B$ صحيحة (حيث يقول: "للحصول على شهادة تدريس يجب على المعلّم أن يتعلّم في الجامعة ")، ومن هنا يستنتج أنّ القضيّة B صحيحة. لنفحص صحّة ادعاء جود، سنتمعّن في جدول الصّدق للقضيّة $A\to B$:

السّطر الوحيد الذي به قيمة الصّدق للقضيّة A هي T وقيمة الصّدق للقضيّة $A\to B$ هي T هو السّطر الأوّل (الملوّن في الرمادي) وفي هذا السطر قيمة الصّدق للقضيّة B هي T. من هنا نستنتج إذا كانت قيمة الصّدق للقضيّة A هي T وأيضًا قيمة الصّدق للقضيّة $A\to B$ هي T عندها بالضرورة ستكون قيمة الصّدق للقضيّة B هي T. ولذلك ادعاء جود صحيح، إن كان للمعلم شهادة تدريس وإن كان من أجل الحصول على شهادة تدريس عليه التعلم في الجامعة، إذا بالضرورة المعلمة تعلمت في الجامعة.

سنلخص قاعدة الاستنتاج التي استعملها جود:

قاعدة الاستنتاج الإيجابي: إذا كانت القضية A صحيحة والقضية $A\to B$ صحيحة، فإنّ أيضًا القضيّة B صحيحة.

يمكن الاستعانة في قاعدة الاستنتاج الإيجابي عدّة مرّات من أجل برهان ادّعاء. من أجل ذلك سنتابع حوار بين رانية وأبيها.

رانية: أبي، علينا اليوم الذهاب لتناول البوظة.

الأب: لماذا؟

رانية: صحيح أنك أنت وأمي تفتخرون بي عندما أحصل على علامة 95 في الامتحان؟

الأب: صحيح.

رانية: وصحيح أنه عندما يقوم أي شخص من أفراد العائلة بعمل نفتخر به، العائلة كلّها تذهب لتناول البوظة.

الأب: صحيح.

رانية: حصلت على علامة 95 في امتحان الجغرافيا. لذلك يجب الذهاب لتناول البوظة.

سنفحص إن كانت رانية قد استعملت في الحديث مرّتين قاعدة الاستنتاج الايجابي. لذلك سنشير إلى:

A = " حصلت على علامة 95 في امتحان الجغرافيا "،

B = "أمي وأبي فخورين بي"،

C = "أفراد العائلة يذهبون لتناول البوظة".

تقول رانية أنّ القضيّة A صحيحة، القضيّة A→B صحيحة والقضيّةB→C صحيحة. بما أنّ القضيّتان A و-A→B صحيحتان، من خلال قاعدة الاستنتاج الايجابي نستنتج أن القضيّة B صحيحة أيضا: أمي وأبي فخورين في رانية. بما أنّ القضيتان B و-B→C صحيحتان، يمكن الاستعانة بقاعدة الاستنتاج الايجابي مرة أخرى والاستنتاج أن C صحيحة أيضًا: أي يجب الذهاب لتناول البوظة.

6.2. قواعد الاستنتاج الايجابي: شروط كافية وضرورية

تسلّقت ماي قمّة التلة. هل ستتمكّن من رؤية الشّمس؟ حتى تتمكّن ماي من رؤية الشّمس يجب أن تحقّق شروط كثيرة، على سبيل المثال، يجب أن تكون السّاعة بين ساعة الشروق والغروب، وأن لا تغطي الغيوم الشمس، وأن لا يبنوا على التلة أبراج سكن تغطي الشمس. الشروط التي ذكرت تسمّى: **شروط ضروريّة** ، إذا تمكّنت ماي من رؤية الشمس من قمّة التلّة، فمن المؤكد أنّ الشمس أشرقت وحتى الآن لم تغب، من المؤكّد لا يوجد غيوم تغطّي الشمس، ومن المؤكّد لا توجد بنايات تغطّي الشمس.

سنترجم قصّة ماي للغة حساب القضايا ونشير إلى:

A = "تسلّقت ماي قمّة التلّة ورأت الشمس".

B = "الغيوم لا تغطّي الشمس".

القضيّة A→B صحيحة ومن خلال قاعدة الاستنتاج الايجابيّ، إذا كانت القضيّة A صحيحة فإن أيضًا القضية B صحيحة: إذا وصلتنا رسالة من ماي تخبرنا أنّها تسلّقت قمّة التلّة ورأت الشمس، يمكننا الاستنتاج أنّ الغيوم لا تغطّي الشمس في المكان الذي تتواجد فيه.

علينا الانتباه إن كانت القضيّة A غير صحيحة، أو أننا لا نعرف إن كانت صحيحة أو غير صحيحة، لا نستطيع استنتاج صحّة القضيّة B. على سبيل المثال، إن لم ترسل لنا ماي رسالة، فإننا لا نعرف إن كانت الغيوم تغطي الشمس أم لا.

فيما يلي أمثلة عديدة لجمل هي شرط أساسي لتحقيق استنتاجات:

هذه الجملة شرط أساسي	لتحقيق هذا الاستنتاج
حصلت على علامة 100 في الامتحان الأخير في الأدب	سأحصل على علامة 100 في الأدب في شهادة نهاية السنة
سأذهب اليوم إلى المدرسة	سأقابل اليوم معلّمة المدنيات
سأصل اليوم إلى المطار	سأطير اليوم إلى خارج البلاد

من أجل الحصول على علامة 100 في الأدب في الشهادة في نهاية السنة عليّ الحصول على علامة 100 في كلّ امتحانات الأدب وتحديدًا في الامتحان الأخير.

لذلك الجملة "إذا حصلت على علامة في الأدب في الشّهادة في نهاية السّنة يعني بالتأكيد حصولي على علامة 100 في الامتحان الأخير في الأدب" صحيح، ومن خلال الحقيقة بأنّ علامتي الأدب في الشهادة هي 100 يمكن الاستنتاج بأنّ علامتي في الامتحان الأخير في الأدب هي 100. بالأسلوب نفسه، لمقابلة معلّمة المدنيّات عليّ زيارة المدرسة. وللطيران لخارج البلاد عليّ الوصول إلى المطار.

هناك شروط غير ضروريّة لاستنتاج استنتاج معيّن.

على سبيل المثال، أبي وأمّي يفتخرون بأمير عندما يحصل على علامة 95 في الامتحان. هل من الضّروري أن يحصل أمير على علامة 96 في الامتحان ليكن والداه فخورين به؟ لا ولا.

هناك أسباب كثيرة تجعل الوالدين يفخران بأمير، مثلًا، إذا ساعد جدّه في الأعمال البيتيّة، إذا رتّب غرفته، أو إذا لعب مع أخته الصغيرة. الشروط التي ذكرناها تدعى: **شروط كافية**: يكفي أن نعلم أنّ أحد هذه الشروط تحقّقَ للتوصّل للاستنتاج.

كذلك قصّة أمير يمكن ترجمتها للغة حساب القضايا، حيث نلاحظ أنّها صورة أخرى لقاعدة الاستنتاج الايجابي.

نشير إلى:

A = "ساعد أمير جدّه بالأعمال المنزلية"،

B = "أمي وأبي فخوران بأمير".

القضيّة $A \rightarrow B$ صحيحة، لذلك إذا كانت القضيّة A صحيحة، فإنّه حسب قانون الاستنتاج الايجابيّ كذلك القضيّة B صحيحة أيضًا .

فيما يلي أمثلة إضافيّة لجمل، كلّ منها شرط كافٍ لتحقيق جملة أخرى.

هذه الجملة هي شرط كافي	**لتحقيق الاستنتاج**
أدخل اليوم جواد هدفا في المرمى.	لعب اليوم جواد كرة قدم.
أعطيت لأمي قبلة على الخد.	قابلت أمي.
اسمي هو جود	يوجد في اسمي ثلاثة حروف.

الجمل التي تظهر في العامود الأيمن هي شروط كافية لتحقيق الجمل في العمود الأيسر: يكفي المعرفة أنّ: جواد أدخل هدفًا داخل المرمى، لكي نستنتج أنّه لعب كرة القدم، يكفي معرفة إعطائي قبلة لأمي لاستنتاج أني قابلتها، ويكفي معرفة أنّ اسمي جود لاستنتاج أن إسمي يتكون من ثلاثة حروف.

يجب الانتباه أنّه ليس من **الضروري** أن تكون القضيّة في العمود الأيمن صحيحة لكي تكون القضيّة في العمود الأيسر صحيحة: يمكن أن لا يتحقق الشرط (إسمي ليس جود) ومع هذا يتحقق الاستنتاج (اسمي يتكون من ثلاثة حروف، مثلًا، لأن اسمي مجد).

تمرين 17:

بجانب الحالات المذكورة في الجدول، اكتبوا إن كان الشرط هو شرط كافٍ وغير ضروري، شرط ضروري وغير كافٍ، أو شرط ضروري وكافٍ للادعاء.

الشرط	الاستنتاج	شرط ضروري	شرط كافي
اليوم يوم الثلاثاء	غدًا يوم الأربعاء	نعم	نعم
يوجد لهذا الشكل أربعة أضلاع	هذا الشكل هو مربع		
يوجد لهذا الشكل أربعة أضلاع	هذا الشكل هو شكل رباعي		
سألعب كرة قدم	سأدخل هدفًا في المرمى		
هذا المخلوق من الثديات	هذا المخلوق هو إنسان		
هذا المخلوق هو إنسان	هذا المخلوق من الثديات		
رؤوف هو أخي	رؤوف هو ولد ولنا أبٌ مشترك		

قانون الاستنتاج وتعويض جمل مركّبة

قانون الاستنتاج الايجابيّ يعني أنّه إذا كانت القضيّة A صحيحة و القضيّة $A\rightarrow B$ صحيحة، فإنّ أيضًا القضيّة B صحيحة. الأحرف A وB الظّاهرة في كلّ الاستنتاج يمكن تغييرها. على سبيل المثال، يمكن كتابة D بدل A وعندها يكون قانون الاستنتاج الإيجابي، إن كانت القضيّة $D\rightarrow B$ صحيحة وإن كانت D صحيحة عندها أيضًا القضيّة B صحيحة. حالًيا، يمكن تبديل الـ B المبيّن في قانون الاستنتاج الايجابي بقضيّة ، مثلا بـ $\neg A$. من هنا نستنتج إن كانت القضيّة $D\rightarrow(\neg A)$ صحيحة وإن كانت D صحيحة عندها أيضا القضيّة $\neg A$ صحيحة، أي أنّ القضيّة A ليست صحيحة. سنرى مثالًا إضافيًا في الحوار التالي:

جود: إن كان طولي مترًا وخمسين، لم يكن بإمكاني اللعب في منتخب كرة قدم.

الأب: لكن طولك متر وخمسين.

جود: وبالفعل أنا لا ألعب في منتخب كرة القدم.

استعمل جود القضيتين:

A = "طولي متر وخمسين"

C = "أنا ألعب في منتخب كرة القدم."،

وادّعى أنّ القضيّة $A \to (\neg C)$ صحيحة. ادّعى الأب أنّ القضيّة A صحيحة، ولذلك من قانون الاستنتاج الايجابي ينتج أنّ القضيّة $\neg C$ صحيحة هي أيضا، أيّ القضيّة C ليست صحيحة.

6.4. قاعدة الاستنتاج السلبي

عاد جود في أحد الأيام الى البيت واشتكى.

جود: لم أفهم اليوم المواد.

الأم: لماذا لم تصغ في الدرس؟

جود: كيف عرفت أني لم أصغ في الدرس؟

الأم: عندما تصغي في الدرس تفهم المواد، إن لم تفهم المواد فهذا يدلّ على أنّك لم تصغ للدرس.

من الواضح أنّ الأم أيضًا تستطيع استنتاج استنتاجات بمساعدة قانون الاستنتاج.

نرمز لـ:

A = "جود يصغي في الدرس"،

B = "جود يفهم المواد".

$A \to B$	B	A
T	T	T
F	F	T
T	T	F
T	F	F

تقول الأم أن القضيّة $A \to B$ صحيحة، جود أعترف أن القضيّة B غير صحيحة. من هنا استنتجت الأم أن القضيّة A ليست صحيحة. هل الأم صادقة؟ لمعرفة ذلك، سنكتب مرة أخرى جدول الصدق للقضيّة $A \to B$.

السطر الوحيد في جدول الصدق الذي به القضيّة B ليست صحيحة و القضيّة $A \to B$ صحيحة هو السّطر الرابع (المشار له بالرمادي)، وبه القضيّة A ليست صحيحة. لذلك الأم صدقت وجود لم يصغ للدرس.

قاعدة الاستنتاج السلبي:

إذا كانت القضية $A \to B$ صحيحة والقضية B غير صحيحة، عندها أيضا القضية A ليست صحيحة.

تمرين 18:

يخبر طارق صديقه فادي: "في كلّ مرة أزور بها بيت خالتي عبير نلعب الشطرنج، وفي كلّ مرّة نلعب بها الشطرنج تفوز عبير. في يوم السبت السّابق لم تفز عبير في الشطرنج". "إن كان الأمر كذلك". يقول فادي، "لم تزر خالتك عبير". في هذا التمرين سنسجّل القواعد التي استعان بها فادي للتوصّل الى الاستنتاج بأنّ طارق لم يزر خالته عبير.

أ.   أكتبوا بالكلمات القضايا التي يصفها طارق في قصّته.

A = ____________________

B = ____________________

C = ____________________

ب. أكتبوا في لغة حساب القضايا، القضايا التي صرّح طارق بأنها صحيحة.

____

____

ت. أكتبوا كلّ قوانين الاستنتاج التي استعان بها فادي للتوصّل إلى الاستنتاج بأنّ طارق لم يزر خالته عبير، وكلّ ما استنتجه من قاعدة الاستنتاج.

____

____

____

____

6.5. قواعد استنتاج إضافيّة

يوجد قواعد استنتاج إضافية أخرى، على سبيل المثال:

قانون الاستنتاج "وأيضًا" : إذا كانت الـ $A \wedge B$ صحيحة، عندها القضية A صحيحة أيضًا.

قانون الاستنتاج "أو" السلبيّ: إذا كانت القضية $A \vee B$ صحيحة والقضيّة A غير صحيحة،

عندها القضيّة B صحيحة.

لنتمكن من الاقتناع بأنّ قواعد الاستنتاج هذه صحيحة، سنكتب جداول الصدق للقضايا $A \vee B$ (من جهة اليمين) و $A \wedge B$ (من جهة اليسار).

$A \wedge B$	B	A	$A \vee B$	B	A
T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	F	F

في جدول الصدق للقضايا $A \wedge B$ (من جهة اليسار) تمّ الإشارة الى السّطر الوحيد الذي به القضيّة $A \wedge B$صحيحة، وفي هذا السّطر القضيّة A صحيحة. لذلك قاعدة الاستنتاج " إذا كانت القضيّة $A \wedge B$ صحيحة فإن القضيّة A صحيحة أيضًا " تتحقق.

بشكل مشابه، في جدول الصّدق لـ $A \vee B$ (من جهة اليمين) تمّ الإشارة الى السّطر الوحيد الذي به القضيّة A ليست صحيحة والقضيّة $A \vee B$ صحيحة، وفي هذا السطر القضيّة B صحيحة. لذلك قاعدة الاستنتاج" إذا كانت القضيّة $A \vee B$ صحيحة والقضيّة A ليست صحيحة فإن القضيّة B صحيحة" تتحقّق.

تمرين 19:

فسّروا لماذا تتحقّق قاعدة الاستنتاج" إذا كانت A صحيحة فإن $A \vee B$ صحيحة".
يمكن الاستعانة في جدول الصّدق للقضيّة $A \vee B$ الموجود في الأعلى.

تمرين 20:

فسّروا لماذا تتحقق قاعدة الاستنتاج: "إذا $A \to B$ ليست صحيحة فإن B ليست صحيحة". يمكن الاستعانة في جدول الصّدق للقضيّة $A \to B$.

A	B	$A \to B$
T	*T*	T
T	*F*	F
F	*T*	T
F	*F*	T

تمرين 21:

أخبرت رونيت أبيها: "ذهبت الى المدرسة ورأيت صديقتي دانا، بما أنّي ذهبت الى المدرسة، فقد رأيت معلمتي. أنت تعلم إن كانت المعلمة مريضة لن أتمكّن من رؤيتها في المدرسة".
"إن كان كذلك"، قال الأب، " فإنّ المعلمة لم تكن مريضة اليوم".

أ. اكتبوا القضايا التي تصفها رونيت في قصّتها:

A =

B =

C =

D =

ب. اكتبوا برموز رياضية القضايا الصحيحة التي صرّحت بها رونيت.

ث. اكتبوا جميع قواعد الاستنتاج التي استعان بها الأب للتوصّل إلى الاستنتاج بأنّ المعلّمة لم تكن مريضة، وما استنتجه من كلّ قواعد الاستنتاج:

تمرين 22:

لنتمعّن في الحوار بين جود وأمه:

جود: لو كان معي نقود لكنت اشتريت بوظة.

الأم: لو أنك اشتريت بوظة، فإنه سيكون عندك ألم أسنان.

جود: ولكن لا يوجد لديّ ألم أسنان.

الأم: إن كان كذلك، فهذا يعني أنّه لم يكن معك نقود.

نشير إلى:

A = "كان مع جود نقود"،

B = "اشترى جود بوظة"،

C = "يوجد لجود ألم أسنان".

أ. اكتبوا برموز رياضيّة القضيّة التي يدّعي جود بأنّها صحيحة.

ب. اكتبوا برموز رياضيّة القضيّة التي تقول الأم بأنّها صحيحة:

ت. فسّروا كيف توصّلت الأمّ الى أنّه لم يكن مع جود نقودًا.

7. التعابير الكميّة

أحيانا نحتاج إلى تمثيل قضايا التي تتعامل مع أشخاص أو أغراض. فيما يلي بعض الأمثلة:

1. كلّ طلاب الصفّ تعلّموا أنّ بنت فرعون وجدت موسى يطفو في السلّة.
2. كلّ طالب معدل علاماته أعلى من 90 حصل على شهادة تفوق.
3. كلّ واحد من طلاب الصف يعرف طالب واحد على الاقل من الصف المقابل.
4. يوجد طلاب في الصف تعرف جميع الطلاب في الصف المقابل.
5. يوجد على الأقل ثلاثة طلاب في الصف يعرف كلّ واحد منهم على الأقل طالبين من الصف المقابل.

سنتوسع في هذا البند في لغة حساب القضايا: سنضيف حرفين يدعيان "تعابير كميّة"، والتي تساعدنا في التعبير عن هذه القضايا. التعبير الكمّي الأوّل يُشير إلى الكلمة "لكلّ"، والتعبير الكمّي الآخر يشير إلى الكلمة "كميّة"، حيث تساعد هذه الرموز في التعابير عن القضايا التي تتطرق إلى الكميات.

7.1. التعبير الكمّي "لكل"

كيف نكتب القضيّة " كلّ طلاب الصف تعلّموا أنّ بنت فرعون وجدت موسى يطفو في السلّة"؟ إحدى الطرق هي كتابة الجملة بواسطة قضيّة ذرّية:

A = " كلّ طلاب الصفّ تعلّموا أنّ بنت فرعون وجدت موسى يطفو في السلّة "

هذه الطريقة تخفي الحقيقة بأنّ للقضيّة مبنى خاص وأنّه يتحدّث عن حقيقة تتحقق لجميع طلاب الصفّ. طريقة أخرى هي بواسطة الرمز :

B = "داني تعلّم أنّ بنت فرعون وجدت موسى يطفو في السلّة ".

C = "رونيت تعلّمت أنّ بنت فرعون وجدت موسى يطفو في السلّة ".

D = "جود تعلّم أنّ بنت فرعون وجدت موسى يطفو في السلّة ".

وهكذا دواليك: سنرمز لكلّ ولد في الصّف بقضيّة التي تبيّن الحقيقة التي تعلّمها بأن بنت فرعون وجدت موسى يطفو في السلة. في هذه الحالة، القضيّة A ستكون القضيّة المركّبة "B وأيضًا C وأيضًا D وأيضًا ...".

تشير لنا هذه الطريقة في العرض أنّ القضيّة A هي قضيّة مركّبة وهي تتحقّق فقط إذا تحقّقت القضايا الأخرى- القضايا B، C، D وكلّ القضايا الإضافية الملائمة لطلاب الصفّ الاخرين. لكنها توضّح أنّ للقضايا B، C، D ولكلّ القضايا الإضافية يوجد مبنى مشابه: في جميعهم طالب معيّن تعلّم أنّ بنت فرعون وجدت موسى يطفو في السلّة .

للاختصار في الكتابة، يمكن تعريف القضيّة B(x) هكذا:

B(x) = "الطالب x تعلّم أنّ بنت فرعون وجدت موسى يطفو في السلّة ".

لا يمثل الحرف الانجليزي x اسم طالب معيّن إنّما يمثّل متغيّر: يمكن أن يمثّل اسم أي طالب من مجموعة طلاب معيّنة. نحن نتحدّث هنا عن مجموعة طلاب الصّف، ولذلك قيمة المتغير x يمكن أن تمثّل كلّ واحد من أسماء طلاب الصف. سندعو هذه المجموعة "مجال تعريف المتغير x".

مجال تعريف المتغير هو مجموعة القيم التي يمكن أن يحصل عليها المتغير.

إذا كان x=عمرو، فإن B(x) هي بالفعل (عمرو)B، والقضيّة هي "عمرو تعلّم أنّ بنت فرعون وجدت موسى يطفو في السلّة". إذا كانت x=جوليا، فإن B(x) هي (جوليا)B، والقضيّة هي"جوليا تعلّمت أنّ بنت فرعون وجدت موسى يطفو في السلّة".

إن لم نكن نعلم ما هي قيمة المتغير الذي يمثل x، فانّ الجملة B(x) ليست قضيّة : اذا لم نعرف أيّ ولد يمثل x فمن B(X) لا يمكن القول أنّ الجملة صحيحة او غير صحيحة. إذا عرفنا قيمة المتغير x – عندها فقط B(x) تكون قضيّة، فقط إذا كانت قيمة المتغير x معلومة يمكن القول أنّ B(x) صحيحة أو غير صحيحة. على سبيل المثال جوليانا تعلّمت أنّ بنت فرعون وجدت موسى يطفو في السلّة، القضيّة (جوليانا)B صحيحة. ولكن إن كان عمرو مريضًا عندما علّمت المعلّمة الموضوع، فإن الـ (عمرو)B ليست صحيحة.

كما ذكرنا، القضيّة A هي:

A = "كلّ طلاب الصّف تعلّموا أنّ بنت فرعون وجدت موسى يطفو في السلّة".

ولذلك القضيّة A هي: "لكلّ طالب x في الصّف القضيّة B(x)".

نسجّل في لغة المنطق، الكلمة "لكل"، بالرمز ∀، وهو الحرف الانجليزي A مقلوب. هذا الحرف هو الحرف الأول في الكلمة الانجليزية All, ومعناها "كلّ". القضيّة "لكل طالب x في الصف القضيّة B(x) صحيحة" نكتب باختصار هكذا:

$$\forall x(B(x))$$

كالمعتاد، نبدأ بقراءة القضيّة من جهة اليسار، نبدأ بالرمز∀ الذي نقرأه "لكلّ"، بعدها يكون دور الحرف x وبعدها القضيّة B(x). القضيّة $\forall x(B(x))$ تقرأ: "لكل x القضيّة B(x)". دائما يجب ذكر مجال التعريف لـ x، والذي هو في هذه الحالة طلاب الصّف.

من المفهوم ضمنًا أنه يمكن استعمال متغيّر آخر بدل المتغير x، مثلاً y أو z. هكذا، إن كان مجال التعريف لـ y هو مجموعة كلّ البيوت في العالم، وC(y) = "للبيت y يوجد سقف"،

عندها تكون القضيّة $\forall y(C(y))$ يعني أن لكل البيوت في العالم يوجد سقف.

إذا كان مجال التعريف لـ z هو كلّ سكّان اسرائيل الذين تزيد اعمارهم عن الـ 18 سنة، و

D(z) = "الشخص z صوّت للانتخابات الاخيرة للكنيست"،

عندها تكون القضيّة $\forall z(D(z))$ تعني أنّ كلّ سكّان اسرائيل الذين تزيد أعمارهم عن الـ 18 سنة صوّتوا للانتخابات الأخيرة للكنيست.

كيف نكتب في لغة حساب القضايا: "إن كان لدينا اليوم حصّة دين، فإنّ كلّ الطلاب في الصّف سيتعلّمون أنّ: "إبنة فرعون وجدت موسى يطفو في السلّة. من أجل ذلك سنستعمل القضايا التالية:

E = "سيكون اليوم لدينا حصّة دين"،

$B(x)$ = "الطالب x سيتعلّم أن أبنة فرعون وجدت موسى يطفو في السلّة"،

مجال التعريف للمتغيّر x هو كلّ طلاب الصّف. القضيّة "لو كان لدينا اليوم حصّة دين، عندها كلّ الطلاب سيتعلمون أنّ ابنة فرعون وجدت موسى يطفو في السلّة" يكتب هكذا:

$$E \rightarrow \forall x(B(x))$$

هناك حالات سنستعين بها بأكثر من متغير واحد في الجملة. على سبيل المثال، لكتابة القضيّة "كلّ طلاب الصّف يعرفون كلّ طلاب الصف المقابل" سنحتاج إلى متغيّرين: متغيّر x، الذي مجال تعريفه هو كلّ طلاب الصّف، متغيّر y، الذي مجال تعريفه هو كلّ طلاّب الصّف المقابل. إذا أشرنا:

$B(x,y)$ = "طالب x يعرف الطالب y"،

القضيّة "كلّ الطلاب في الصّف يعرفون كلّ الطلاب في الصّف المقابل، نكتب هكذا:

$$\forall x \forall y(B(x,y))$$

تمرين 23:

لنتمعّن في القضيّة: "يوجد لكلّ السيّارات في العالم أربعة دواليب". اعرضوا القضيّة بلغة حساب القضايا وحدّدوا مجال تعريف المتغير الذي ستستعملونه.

القضيّة $C(x)$ = ______________________________

مجال تعريف المتغير x: ______________________________

القضيّة بلغة حساب القضايا: ______________________________

تمرين24:

نشير إلى - $B(x)$ = "الطالبة x وصلت اليوم مرتدية تنّورة خضراء"; مجال التعريف هو كلّ طالبات الصف.

اكتبوا المعنى الكلامي للقضايا:

أ. B(إيميلي):

____

ب. $\neg B$(تالا):

____

ت. $(\neg B$(دينا)$) \wedge (B$(شام)$)$:

____

____

ث. $(\neg B$(دينا)$) \rightarrow (B$(شام)$)$:

____

____

ج. $\forall x(B(x))$:

____

____

ح. (دينا)B: دينا طالبة تتعلّم في الصف، وبما أنّها غير موجودة في مجال التعريف للمتغيّر x ، الجملة (دينا)B ليست قضيّة.

____

____

تمرين 25:

لنتمعّن في القضيّة: E = "إذا وجد لكلّ طالب في الصفّ أخوان، عندها سيكون بالإمكان تنظيم لعبة كرة القدم في اليوم الرياضيّ". نشير إلى:

$A(x)$ = "للطالب x يوجد أخوان"،

B = " بالإمكان تنظيم لعبة كرة القدم في اليوم الرياضي ".

أ. مجال التعريف لـ x:

____

ب. اكتبوا القضيّة E بواسطة $A(x)$، B، $\forall$:

____

تمرين 26:

نشير إلى:

$A(x)$ = "الطالب x جاء اليوم إلى المدرسة"،

$B(x)$ = "الطالب x سمع محاضرة عن الإنسان القديم".

مجال تعريف المتغير x هو مجموعة طلاّب الصف.

اكتبوا المعنى الكلامي للقضايا:

$\forall x(A(x) \wedge B(x))$: جاء كلّ طلاب الصفّ اليوم إلى المدرسة وسمعوا محاضرة عن الإنسان القديم.

$\forall x(A(x) \vee B(x))$:

____

____

____

$\forall x(A(x)) \vee \forall x(B(x))$:

____

____

____

أعطوا مقال لحالة بها قيمة الصدق للقضيّة في البند "ب" هي "صدق" وقيمة الصدق للقضيّة في البند ت هي "كذب". ____

____

____

$\forall x(B(x) \rightarrow (\neg A(x)))$:

كما هو الحال لكلّ قضيّة، أيضا للقضيّة $\forall x(A(x))$ يوجد قيمة صدق. القضيّة $\forall x(A(x))$ صحيحة إن كان لكلّ قيمة صدق لـ x في مجال التعريف تتحقّق القضيّة A(x)، وهي غير صحيحة إذا كانت على الأقلّ قيمة واحدة من مجال التعريف لـ x القضيّة A(x) غير صحيحة.

تمرين 27:

حدّدوا قيمة الصّدق للقضيّة $\forall x(A(x))$, في كلّ واحدة من التعريفات المعطاة لـ A(x):

A(x)	مجال التعريف للمتغير x	صدق	كذب	أحيانًا صدق وأحيانًا كذب
1) يوجد للطالب x قلب	كل طلاب الصف			
2) يوجد لكلّ دولة رئيس	كل دول العالم			
3) $x^2 \geq 0$	كل الأعداد			
4) لا يوجد للطالب x شعر أشقر	كل طلاب الصف			
5) يوجد لكلّ شخص بالضبط 3 أولاد	كل الاشخاص في العالم			

7.2. التعبير الكمّي"يوجد"

التعبير الكمّي "يوجد" يشبه التعبير الكمّي "لكل" وهو يمكّننا من كتابة قضايا شبيهه بالقضيّة "يوجد طالب في الصف شعره أشقر".

نشير إلى:

A(x) = "للطالب x يوجد شعر أشقر".

عندما يكون مجال تعريف المتغير x هو طلاب الصف، القضيّة "يوجد طالب في الصف شعره أشقر"، يكتب هكذا:

$$\exists x(A(x))$$

الرمز $\exists$ هو حرف إنجليزي E معكوس، وهذا الحرف هو الحرف الأوّل في الكلمة الانجليزيّة exist والتي تعني "يوجد". لذلك تم اختيار هذا الرمز ليعبّر عن الكلمة "يوجد" في لغة حساب القضايا.

تمرين 28:

لنتمعّن في القضيّة: "يوجد دولة عاصمتها لندن".

اكتبوا مجال التعريف للمتغير x والمعنى الكلامي للقضيّة $B(x)$ التي تمثّل القضيّة $\exists x(B(x))$ "يوجد دولة عاصمتها لندن".

مجال التعريف للمتغير: ______________________

$B(x) =$ ________________________________

7.3. "يوجد على الأقل طالبان اللذان ..."

التعبير الكمّيٍ "لكلّ" يساعدنا في التعبير عن قضايا تتحدّث عن صفة معيّنة تتحقق لكلّ عناصر مجموعة معينة، بينما التعبير الكمّي "يوجد" يساعدنا في التعبير عن قضايا تتحدّث عن صفة معيّنة تتحقّق على الأقل في واحد من عناصر المجموعة. يوجد قضايا إضافيّة التي تبحث في الكميات، فعلى سبيل المثال، "يوجد على الأقلّ طالبان في الصف يدعيان عمرو"، أو يوجد على الأكثر طالبان في الصفّ يدعيان داهود". سنرى الآن كيف يمكننا التعبير عن جمل كهذه بواسطة التعابير الكميّة "لكلّ" و"يوجد".

كيف نكتب في لغة حساب القضايا القضيّة: "يوجد في الصف على الأقل طالبان اسمهما عمرو"؟ حتى يكون في الصفّ على الأقل ولدين اسمهما عمرو، يجب أن يكون في الصف طالب x اسمه عمرو، طالب y اسمه عمرو، وطالب x مختلف عن الطالب y. نرمز عند ذلك:

$A(x) =$ "اسم الولد x هو عمرو"،

$B(x,y) =$ "$x=y$".

أي، قيمة الصّدق لـ $B(x,y)$ هي "صدق"، فقط عندما x و-y هما نفس الطالب.

إذا كان x و-y يمثلان طالبين في الصف، الجملة التالية تعني أنّ اسم x هو عمرو، واسم y هو عمرو، و-x و-y ليسا نفس الطالب:

$$A(x) \wedge A(y) \wedge (\neg B(x,y))$$

يوجد في الصف على الأقل طالبان اسمهما عمرو إذا وجد طالب x وطالب y اللذان يحققان الجملة الاخيرة، أي:

$$\exists x \exists y\, (A(x) \wedge A(y) \wedge (\neg B(x,y)))$$

تمرين 29:

بمساعدة $A(x)$ و-$B(x,y)$ المسجّلة أعلاه أكتبوا في حساب القضايا: "يوجد في الصف على الأقل ثلاثة طلاب اسمهم عمرو". انتبهوا عليكم الاستعانة في ثلاثة متغيرات– x، y، z – من أجل وصف الطلاب الثلاثة.

7.4. "يوجد على الأكثر طالب واحد الذي..."

عندما $A(x)$ = "يوجد للطالب x شعر أشقر"، ومجال التعريف لـ x هو طلاب الصف، القضيّة $\exists x(A(x))$ يوجد على الأقل طالب واحد في الصف شعره أشقر. كيف سنكتب أنه يوجد على الأكثر طالب واحد في الصف شعره أشقر؟ لنتمعن في الحوار التالي بين الأب ورونيت، والذي تحاول رونيت من خلاله أن تفسر لأبيها كيفية كتابة هذه القضيّة.

رونيت: إذا كان هناك على الأكثر طالب واحد شعره أشقر، لا يمكن أن يكون في الصف طالبان لهما شعر أشقر. لذلك، إذا أنت اشرت الى طالب أشقر وأنا أشرت لطالب أشقر – فنحن نشير الى نفس الطالب!

الاب: حسنًا.

رونيت: سنستعين في الجملة $B(x,y)$ التي عرّفناها مسبقًا وتعني "$x=y$". مجال التعريف لـ x ولـ y هو كلّ طلاب الصف. المتغيّر x يمثل الطالب الذي أنت اشرت اليه، والمتغير y يمثل الطالب الذي أنا أشرت اليه. القضيّة التالية تعني إذا كان x و-y هما أشقران، هما نفس الطالب:

$$(A(x) \wedge A(y)) \rightarrow B(x,y)$$

والقضيّة التالية تعني أنّ كلّ زوج من الطلاب اللذان نشير لهما – إن كان كلاهما أشقر فهما نفس الطالب، وهذا الأمر يحدث فقط عندما يكون في الصف طالب واحد اشقر على الأكثر.

$$\forall x \forall y\ (\ (A(x) \wedge A(y)) \rightarrow B(x,y)\ )$$

الأب: أظن أنه بإمكاننا كتابة هذه القضيّة بطريقة إضافية: لنفرض أنّه يوجد على الأكثر طالب أشقر واحد. إذا اشرت أنا إلى طالب x أشقر وأنت أشرت إلى طالب y آخر، فانّ الطالب y الذي أشرت أنت إليه ليس أشقر.

رونيت: منطقي جدا.

الأب: في لغة حساب القضايا، الجملة التي قلتها هي:

$$(A(x) \wedge (\neg B(x,y))) \rightarrow (\neg A(y))$$

لذلك أيضًا هذه القضيّة تعني أنه يوجد في الصف على الأكثر طالب واحد أشقر:

$$\forall x \forall y\ (\ (A(x) \wedge (\neg B(x,y))) \rightarrow (\neg A(y))\ )$$

تمرين 30:

سنرى في هذا التمرين أنّه يمكن كتابة القضيّة "يوجد في الصف على الأكثر طالب أشقر واحد" هكذا:

$$\forall x \forall y\ (\ B(x,y) \vee (A(x) \rightarrow (\neg A(y)))\ )$$

أ. اكتبوا بالكلمات معنى التعبير $B(x,y) \vee (A(x) \rightarrow (\neg A(y)))$:

ب. فسّروا لماذا القضيّة $\forall x \forall y\ (\ B(x,y) \vee (A(x) \rightarrow (\neg A(y)))\ )$ تعني أنّه يوجد في الصفّ على الأكثر طالب أشقر واحد.

تمرين 31:

سنكتب في هذا التمرين بلغة حساب القضايا، القضيّة "يوجد بالضبط دولة واحدة عاصمتها لندن". نلاحظ أنّ القضيّة "يوجد بالضبط دولة واحدة عاصمتها لندن" مكافئة للقضيّة "يوجد على الأقل دولة واحدة عاصمتها لندن وأيضا على الأكثر دولة واحدة عاصمتها لندن".

$D(x)$ = "عاصمة الدولة x هي لندن".

أ. مجال التعريف لـ x هو: ____________________

ب. أكتبوا بلغة حساب القضايا القضيّة "يوجد على الأقلّ دولة واحدة عاصمتها لندن":

____

ت. أكتبوا بلغة حساب القضايا القضيّة "يوجد على الأكثر دولة واحدة عاصمتها لندن"، استعملوا القضيّة $B(x,y)$ = "$x=y$".

____

ث. أكتبوا بلغة حساب القضايا القضيّة " يوجد بالضبط دولة واحدة عاصمتها لندن":

____

7.5. "كلّ طالب في الصف يعرف طالب في الصف المقابل"

في جميع القضايا التي كتبت حتى الآن ظهر التعبير الكمّي"لكلّ" (ربما مرات عديدة) أو التعبير الكمّي "يوجد" (ربما مرات محدودة). سنشاهد الآن كيف يمكننا استعمال هذين التعبيرين الكمّيين في كتابة القضيّة "كلّ طالب في الصّف يعرف طالب في الصّف المقابل ".

طريقة أخرى لكتابة هذه القضيّة هي الإشارة إلى:

$C(x)$ = "الطالب x يعرف طالب في الصف المقابل".

إذا كان مجال التعريف لـ x هو كلّ طلاب الصّف، فإن القضيّة:

$$\forall x(C(x))$$

يعني أنّ كلّ طالب في الصّف يعرف طالب في الصف المقابل.

توجد طريقة إضافيّة لكتابة القضيّة. نشير Y إلى :

$D(x,y)$ = الطالب x يعرف الطالب y.

إذا كان مجال التعريف لـ x هو كلّ طلاب الصفّ و مجال التعريف لـ y هو كلّ طلاب الصف المقابل، فإن القضيّة

$\forall x \exists y (D(x,y))$

تعني: "أنّ كلّ طالب في الصفّ يعرف على الأقلّ طالب واحد من الصف المقابل".

تمرين 32:

لنتمعّن في القضيّة "يوجد لكلّ ولدٍ أبٌ وأم". نشير إلى -:

$A(x,y)$ = "y هو أب x"

$B(x,z)$ = "z هي أم x".

أ. اكتبوا مجال التعريف للمتغيرات x، y، z:

مجال التعريف لـ x: ____________________________.

مجال التعريف لـ y: ____________________________.

مجال التعريف لـ z: ____________________________.

ب. أكتبوا القضيّة " يوجد لكلّ ولد أب" بواسطة $A(x,y)$ والتعابير الكميّة $\forall$، $\exists$.

____

ت. أكتبوا القضيّة " يوجد لكلّ ولد أم" بواسطة $B(x,z)$ والتعابير الكميّة $\forall$، $\exists$.

____

ث. أكتبوا القضيّة " يوجد لكلّ ولد أب وأم" بواسطة $A(x,y)$، $B(x,z)$ والتعابير الكميّة $\forall$، $\exists$. انتبهوا أن عليكم استعمال التعبير الكمّي مرتين $\exists$.

____

تمرين 33:

لنتمعّن في القضيّة: D = "لكلّ ولد يوجد صديق اسمه يوسف".

نشير إلى:

$A(x)$ = "اسم x هو يوسف"،

$B(x,y)$ = "الولد x هو صديق الولد y".

أ. مجال التعريف لـ x: ____________________________.

ب. مجال التعريف لـ y: ____________________________.

ت. أكتبوا القضيّة D بواسطة $A(x)$، $B(x,y)$ والتعابير الكميّة $\forall$، $\exists$:

____

لنتمعّن في القضيّة: D = "لكلّ طالب اسمه عادل يوجد صديق اسمه سيف".

نشير إلى:

$A(x)$ = "اسم x هو عادل",

$B(y)$ = "اسم y هو سيف",

$C(x,y)$ = "الطالب y هو صديق الطالب x".

نريد كتابة القضيّة D بلغة حساب القضايا بواسطة $A(x)$، $B(y)$، $C(x,y)$. كيف سيتم ذلك؟ سنستعين بمتغيرين: x الذي يمثل الطالب الذي نتحدث عنه، و-y الذي يمثل صديقه. من هنا نرى أنّ مجال التعريف لـ x و-y كلّ الطلاب في العالم. مفهوم أنّ علينا بدء القضيّة D بـ-$\forall x$، أيّ "لكلّ طالب"، ولكن كيف سنتابع؟

من أجل ذلك نحتاج إلى إيجاد نصٍّ مختلف قليلًا للقضيّة D الذي معناه يشبه النص الأصلي للقضيّة ويمكن كتابته بلغة حساب القضايا. طريقة ممكنة لنص القضيّة D هي: "لكلّ طالب، إن كان اسمه عادل عندها يكون له صديق اسمه سيف". لذلك إحدى الطرق لتمثيل القضيّة D بلغة حساب القضايا هي:

$$\forall x\, (A(x) \rightarrow (\exists y\, (B(y) \wedge C(x,y))))$$

نص مكافئ إضافي للقضيّة D هو "لكلّ طالب، اسمه ليس فادي، أو له صديق اسمه سيف". سنفحص إن كان هذا النص مكافئ للنص الأصلي للقضيّة "لكلّ طالب اسمه فادي يوجد صديق اسمه سيف ". لذلك، سنتمعن في الجملة "لكلّ طالب، اسمه ليس فادي، أو له صديق اسمه سيف". إذا كان اسم الطالب هو فادي، فان القسم الأول من الجملة (أو اسمه ليس فادي) لا يتحقق. ولذلك جدول الصدق للقضيّة المركّبة "أو" تلزمنا تحقيق القسم الثاني. أي، يوجد للطالب صديق اسمه سيف. إن لم يكن اسم الطالب فادي، فان القسم الأول من الجملة يتحقق، وعندها لا يلزمنا جدول الصدق للقضيّة المركبة "أو" من تحقيق القسم الثاني: يمكن أن يكون أو لا يكون صديق اسمه سيف. من هنا ينتج أن القضيّة "لكل طالب، اسمه ليس فادي، أو له صديق اسمه سيف"، بالفعل مكافئة للقضيّة "لكل طالب اسمه فادي يوجد صديق اسمه سيف". بكلمات أخرى، القضيّة D يمكن كتابتها بالطريقة التالية:

$$\forall x\, ((\neg A(x)) \vee \exists y\, (B(y) \wedge C(x,y)))$$

تمرين 34:

لنتمعن في القضيّة: D = "لكلّ ولد اسمه ليس سيف يوجد صديق اسمه سيف".

نشير إلى:

$A(x)$ = "اسم x هو سيف",

$C(x,y)$ = "الولد y هو صديق الولد x".

أكتبوا القضيّة D بواسطة $A(x)$، $B(y)$، والتعابير الكميّة $\forall$ و-$\exists$ ورموز منطق إضافيّة. يمكن الاستعانة في متغيّرات إضافيّة. انتبهوا يجب استعمال $A(x)$ مرتين!

تمرين 35:

مجال التعريف للمتغير x هو كلّ البنين في الصفّ ومجال التعريف للمتغير y هو كلّ البنات في الصفّ. مجال التعريف للمتغير z هو طلاب الصفّ (بنين وبنات).

نشير إلى:

$D(z)$ = "للطالب z يوجد بلوزة حمراء",
$C(z)$ = "الطالب z يحب لعب كرة القدم".
أكتبوا القضايا التالية بواسطة $D(x)$، $D(y)$، $C(x)$، $C(y)$ وروابط منطق أخرى. يمكن أن تحتاجوا الى استعمال متغيرات أخرى.

أ. "كلّ البنين في الصف يحبون لعب كرة القدم، ويوجد بنت في الصف ترتدي بلوزة حمراء":

ب. "كلّ البنات في الصف تحب لعب كرة القدم، ولا يوجد بنت في الصف ترتدي بلوزة حمراء":

ت. "إذا كان كلّ البنين في الصفّ يحبّون لعب كرة القدم، فإنّه يوجد بنت في الصف ترتدي بلوزة حمراء":

ث. "إذا كان في الصف بنتان تحبّان لعب كرة القدم، فإنّه يوجد في الصف اثنان من البنين يرتديان بلوزة حمراء": استعملوا في القضيّة $B(x,y)$ = "$x=y$". علينا في هذا التمرين استعمال متغيرين مختلفين اللّذين يمثلان بنات ومتغيرين مختلفين يمثلان البنين.
المتغيران اللذان يمثلان البنات هما y_1 و-y_2 والمتغيران اللذان يمثلان البنين هما x_1 و-x_2.

7.6 روابط بين التعبيرين الكميّين "لكلّ" و"يوجد"

سنلاحظ في هذا البند أنّ التعبيرين الكميّين "لكلّ" و"يوجد" متعلقان ببعضهما البعض، ويمكن التعبير عن كلّ واحد منهما بواسطة الاخر. لنتمعّن في القضيّة

A = "يوجد لكلّ طالب في الصف كلب".

من هنا $A = \forall x(B(x))$ عندما يكون مجال التعريف للمتغير x هو طلاب الصف و-

$B(x)$ = "للطالب x يوجد كلب".

إذا كانت القضيّة A غير صحيحة، فمؤكد أنه يوجد طالب في الصف لا يوجد لديه كلب. أي، يوجد طالب في الصف بالنسبة له القضيّة $B(x)$ غير صحيحة. بكلمات أخرى، إذا كانت القضيّة A غير صحيحة عندها القضيّة $\exists x(\neg B(x))$ صحيحة! نلخص ذلك:

القضية $\neg(\forall x(B(x)))$ مكافئة للقضية $\exists x(\neg B(x))$.

تمرين 36:
نشير إلى :- $B(x)$ = " يوجد للولد x أخت اسمها حلا"; مجال التعريف لـ x هو أولاد الصف.

أ. أكتبوا المعنى الكلامي للقضيّة $\neg(\exists x(B(x))$:

ب. أكتبوا المعنى الكلامي للقضيّة $\forall x(\neg B(x))$

ت. فسّروا لماذا القضيّة $\neg(\exists x(B(x))$ مكافئة للقضيّة $\forall x(\neg B(x))$.

---

8. الاجمال

تعلمنا في هذه الكراسة لغة حساب القضايا، وهي لغة تمكننا من كتابة الجمل التي معناها مُعرّف جيدًا ولا يوجد عليها أي اختلاف. عرفنا قيمة الصّدق للقضيّة التي تعلّمنا أنّ القضيّة صحيحة أو غير صحيحة. رأينا كيف يمكننا استنتاج قيمة الصّدق لقضيّة مركّبة من قيم الصّدق للقضايا الذريّة (الاساسيّة) التي تركبها، وكيف يمكننا إدّعاء ادّعاءات منطقيّة وإثبات صحتها.

لغة حساب القضايا هي التذوّق الاوّل للمجال الغني في المنطق الرياضي، الذي يبحث في مواضيع متنوعة.

- في حساب القضايا، يمكن للجمل أن تكون صحيحة أو غير صحيحة، لذلك تصف لغة منطق ثنائي القيم، قيمة الصدق لقضيّة هي واحدة من القيمتين – صدق أو كذب. يوجد منطق متعدد القيم الذي يمكن أن تحصل جمله على قيم إضافية. على سبيل المثال، في المنطق الثلاثي القيم يمكن للجمل أن تكون صحيحة، غير صحيحة أو ذوي قيم صدق غير معروفة.
- رأينا كيف يمكننا برهنة ادعاءات بواسطة قواعد الاستنتاج. سؤال مهم في المجال هو هل يمكن برهنة صحة أو عدم صحة كلّ ادعاء. أي، هل لكلّ ادعاء يخطر في بال الانسان يمكن تسجيل جدول لقواعد استنتاج نستخلص منها، او ايجاد مثال لقيم صدق لمتغيرات تكوّنها لا تتحقق بالنسبة لهم. تنص الجملة المعروفة في هذا المجال أنه عندما تكون اللغة التي نستعملها غنية بما فيه الكفاية، يوجد قضيّة لا نستطيع برهان صحتها أو عدمها.

نأمل ان تكون الكراسة قد نالت اهتمامكم وأن تتابعوا قراءة الكراريس التابعة نفس السلسلة، يمكن ايجاد كراريس اضافية في موقع الانترنت الخاص بنا وعنوانهXXX .

9. تلخيص المصطلحات والتعاريف

1) **القضيّة** هي جملة التي تبيّن حقيقة يمكن أن تكون صحيحة أو غير صحيحة.

2) **قيمة الصدق** لقضيّة هي "صدق" إن كانت القضيّة صحيحة، وهي "كذب" إن كانت القضيّة غير صحيحة.

3) "الطَّوطُولُوجيا" هي قضيّة صحيحة بكلّ حالة: قيمة الصدق لها دائمًا "صدق".

4) **التناقض** هو قضيّة غير صحيحة في كل حالة: قيمة الصدق لها دائمًا "كذب".

5) $\neg A$: "A غير صحيح".

6) $A \wedge B$: "A وأيضًا B".

7) $A \vee B$: "A أو B".

8) $A \rightarrow B$: "A يؤدي الى B" أو "إذا A صحيح فإن B صحيح".

9) **قضيّة ذريّة** هي قضيّة التي تحوي حرف واحد فقط – A، B، C وهكذا.

10) **قضيّة مركّبة** هي قضيّة التي تحوي على الأقلّ واحدة من الاشارات $\wedge$، $\vee$ ، $\neg$، $\rightarrow$، $\leftrightarrow$، $\forall$، $\exists$.

11) **جدول الصّدق** لقضيّة هو جدول يربط بين قيمة الصّدق للقضايا الذريّة التي تكوّن القضيّة وبين قيمة الصّدق لكلّ القضيّة.

12) قضيتان اثنتان تدعيان **متكافئان** إذا كان لهما نفس جدول الصدق.

13) **قاعدة الاستنتاج الايجابي**: إذا كانت القضيّة A صحيحة والقضيّة $A \rightarrow B$ صحيحة، فإن القضيّة B أيضا صحيحة.

14) **قاعدة الاستنتاج السلبي**: إذا كان القضيّة $A \rightarrow B$ صحيحة والقضيّة B غير صحيحة، فإن القضيّة A غير صحيحة أيضًا.

15) **قاعدة الاستنتاج "وأيضًا" "**: إذا كانت القضيّة $A \wedge B$ صحيحة، فإن القضيّة A صحيحة أيضًا.

16) **قاعدة الاستنتاج "أو" السلبي**: إذا كانت القضيّة $A \vee B$ صحيحة والقضيّة A غير صحيحة، فإن القضيّة B صحيحة.

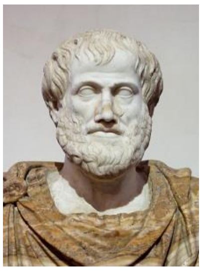
17) **مجال التعريف لمتغير** هو مجموعة القيم التي يستطيع المتغير أن يأخذها.

18) $\forall x(C(x))$: لكل x يتحقق القضيّة $C(x)$.

19) $\exists x(C(x))$: يوجد x يتحقق به القضيّة $C(x)$.

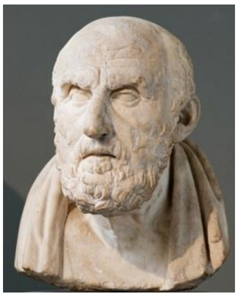
10. شخصيات ذكرت في الكراس

"أرسطو" (322–384 قبل الميلاد) كان من عظماء الفلاسفة في العهد القديم. بالإضافة الى المنطق طوّر "أرسطو" علم الدولة: فقد ميّز طرق حكم جيدة (مفيدة) (الملكية، الارستقراطية وحكم أصحاب الأملاك) وطرق حكم سلبية (الديكتاتورية, سيطرة الأغنياء وديمقراطية) وادعى انهما تبدلان بعضهما البعض بشكل دوري. أضاف أيضًا للعلم وكتب عن الفيزياء، البيولوجيا، في علم الفلك وعلم الكون.



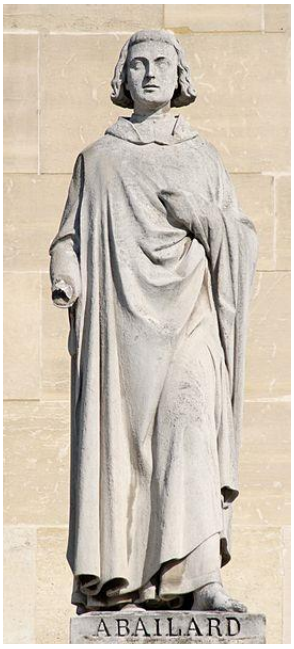
(المصدر: ويكيبيديا, مفتوح للاستعمال)

"كريسفيوس" (205–280 قبل الميلاد) كان فيلسوف يوناني. طور الأفكار التي تقف خلف حساب القضايا وقواعد الاستنتاج المعروضة في هذا الكراس. قال أن الكون هو الروح ، والدماغ المسيطر على ذاته، وادعى بأنه يوجد روح لكل شيء في الطبيعة.



(المصدر: ويكيبيديا, مفتوح للاستعمال)

"بيير البراد" (1079–1142) كان فيلسوف وباحث في الدين من أصل فرنسي، طور طريقة البرهان الرسمية. تشاجر مع معلمة ومع متعلمين اخرين، حكم عليه من قبل الكنيسة وعوقب بالعيش في دير. مع كل هذا بقي معلم محبوب (شعبي)، حضر الكثير من الطلاب لسماع محاضراته.



(المصدر: ويكيبيديا, مفتوح للاستعمال، مع ذكر حقوق المنتجين على الصورة: **Marie-Lan Nguyen**).

11. حلول التمارين

تمرين 27.Error! No sequence specified**:**

لكلّ واحد من الجمل – اكتبوا اذا كانت قضيّة أم لا.

الجملة	قضيّة	ليست قضيّة
1) التقيت دنيا البارحة.	X	
2) ماذا تريد؟		X
3) انا أحب اللبن.	X	
4) أنا أحب اللبن وانت تحب البيتزا.	X	
5) بأي حال من الأحوال لا!		X
6) أميرة قالت: " في أي حال من الأحوال لا!"	X	
7) كل الأولاد في الصف قالوا: " في أي حال من الأحوال لا!"	X	
8) متى رأيت المعلمة؟		X
9) يوجد طالب في الصف يدعى ربيع.	X	
10) انت صادق ام مخطأ.	X	
11) اذا ضحكت سأحضنك.	X	
12) شكرا لاشتراكك في حفلتي.		X

تمرين 28:

نرمز لـA = "يوجد لدي قلم رصاص أحمر"،

B = "يوجد لدي مقلمة خضراء"،

C = "يوجد لدي حقيبة بنفسجية".

اكتبوا القضايا التالية بواسطة الرموز A، B، C، ¬، ∧، ∨، →.

أ. يوجد لديّ قلم أحمر ومقلمة خضراء.$A \wedge B$

ب. لا يوجد لديّ مقلمة بنفسجية.$\neg C$

ت. يوجد لديّ مقلمة خضراء أو يوجد لدي قلم رصاص أحمر.$B \vee A$

ث. إذا كان لديّ حقيبة بنفسجية فإنه لديّ مقلمة خضراء.$C \rightarrow B$

تمرين 29:

القضايا التي ظهرت في تمرين 2 كانت :

A = "يوجد لدي قلم رصاص أحمر"،

B = "يوجد لدي مقلمة خضراء"،

C = "يوجد لدي حقيبة بنفسجية".

سجّلوا القضايا التالية بواسطة الرموز A، B، C، ¬، ∧، ∨، → ورمز الأقواس (و-).

أ. يوجد لديّ قلم رصاص أحمر ومقلمة خضراء، ولا يوجد لديّ حقيبة بنفسجية.
$A\wedge B\wedge(\neg C)$

ب. غير صحيح أنّه يوجد لديّ حقيبة بنفسجية ومقلمة خضراء.$\neg(C\wedge B)$

ج. لا يوجد لديّ مقلمة خضراء أو قلم رصاص أحمر ومقلمة خضراء.$(\neg B)\vee(A\wedge B)$

ح. إذا كان لديّ حقيبة بنفسجيّة فانّه لا يوجد لدي مقلمة خضراء.$C\rightarrow(\neg B)$

خ. إذا لا يوجد لديّ حقيبة بنفسجيّة فإنّه لا يوجد لديّ مقلمة خضراء.$(\neg C)\rightarrow B$

د. لا يوجد لديّ حقيبة بنفسجيّة، لا يوجد لديّ مقلمة خضراء ويوجد لديّ قلم رصاص أحمر.$(\neg C)\wedge(\neg B)\wedge A$

تمرين 30:

القضايا التي ظهرت في التمرينين 2 **و** 3 كانت:

A = "يوجد لدي قلم رصاص أحمر"،

B = "يوجد لدي مقلمة خضراء"،

C = "يوجد لدي حقيبة بنفسجية".

اكتبوا المعنى الكلامي لهذه القضايا:

أ. $A\vee(\neg C)$: يوجد لديّ قلم رصاص أحمر ولا يوجد لديّ حقيبة بنفسجية.

ب) $(A\wedge(\neg B))\rightarrow(\neg C)$: إن كان لديّ قلم رصاص أحمر ولم يكن لدي مقلمة خضراء، فإنه يوجد لديّ حقيبة بنفسجية.

ت) $(\neg A)\wedge(\neg C)$: لا يوجد لديّ قلم رصاص أحمر ولا يوجد لدي حقيبة بنفسجية.

ث) $(C\vee(\neg B))\wedge((\neg C)\vee A)$: يوجد لدي حقيبة بنفسجية أو ليس لدي مقلمة خضراء، وأيضا لا يوجد لدي حقيبة بنفسجية أو يوجد لدي قلم رصاص أحمر.

تمرين 5:
لكلّ واحد من القضايا، أكتبوا إن كانت قيمة الصدق الخاصة بها "صدق" أم "كذب". انتبهوا أن قيمة الصدق للقضيّة يحدّدها الانسان الذي تتحدث عنه القضيّة في اللحظة الزمنية التي قيلت فيها القضيّة. لذلك، في البنود 2 و4 للتمرين المقصود أنتم: في صفكم وفي عائلتكم.
هذه الملاحظة سارية أيضا على التمارين التالية في الكراسة.

قضيّة	صدق	كذب
1) رئيس الحكومة الاوّل لدولة إسرائيل كان داود بن غوريون.	X	
2) في كل يوم ثلاثاء تحصل مربيتي على يوم إجازة.		
3) $5+1=6$	X	
4) يوجد لوالدي ثلاثة أولاد.		
5) لكل انسان يوجد بالضبط ثلاثة أولاد.		X

قيمة الصدق في البنود 2 و4 يمكن أن تكون صدق أو كذب، حسب المتحدث.

تمرين 6:
لكلّ واحدة من القضايا – اكتبوا إذا كانت: طَوطُولُوجيا ، تناقض، أو ليس أيّا منهما.

قضيّة	طوطولوجيا	تناقض	ليس أي منهما
1) أنا إنسان.	X		
2) أنا إنسان أو أنا حلزونة.	X		
3) ليس صحيحًا أني إنسان.		X	
4) ليس صحيحًا أنّه غير صحيح أني إنسان.	X		
5) الشباك مفتوح، او الشباك مغلق والستارة مفتوحة.			X
6) $5>10$.		X	
7) $5<10$.	X		
8) الشكل الرباعي هو مضلّع له أربع أضلاع.	X		

تمرين 7:
اكتبوا "طَوطُولُوجيا" اثنتين ومتناقضتين اثنتين:
"طَوطُولُوجيا"
أ. أنا احبك أو أنا لا أحبك.

ب. في كل مرة يخرج فيها أحدهم من البحر مرتديًا ملابس السباحة فقط يكون مبلولًا.

"متناقضات":

أ. غدا ستشرق الشمس من الغرب.

ب. هذا شكل رباعي له خمسة أضلاع.

تمرين 31:

هذا الجدول هو جدول صدق للقضيّة A∨B، أكملوه!

A∨B	*B*	*A*
T	T	T
T	F	T
T	T	F
F	F	F

تمرين 32:

جدوا جدول الصدق للقضيّة (B∨(¬A))∧(¬B).

(B∨(¬A))∧(¬B)	B∨(¬A)	¬B	¬A	B	A
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	T
F	T	F	T	T	F
T	T	T	T	F	F

تمرين 33:

جدوا جدول الصدق للقضيّة (C∧(¬A))∨((¬B)∧A).

(C∧(¬A))∨((¬B)∧A)	(¬B)∧A	C∧(¬A)	¬B	¬A	C	B	A
F	F	F	F	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	T	T
T	T	F	T	F	T	F	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T	F

F	**F**	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**F**	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**

تمرين 34:

جدوا جدول الصدق للقضيّة $(A\rightarrow(\neg C))\wedge((\neg B)\vee C)$.

$(A\rightarrow (\neg C))\wedge((\neg B)\vee C)$	$(\neg B)\vee C$	$A\rightarrow (\neg C)$	**¬C**	**¬B**	**C**	**B**	**A**
F	**T**	**F**	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**T**	**F**	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**F**	**F**	**T**
T	**T**	**T**	**F**	**F**	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**
T	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**	**F**
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**

تمرين 35:

أيّ من بين القضايا التالية هي "طَّوطُولُوجيا"، أيّ منها تناقض وأيّها ليست "طَّوطُولُوجيا" وليست تناقض؟ يمكن الاستعانة في الجدول الذي يظهر بعد التمرين. بعد تعبئة الجدول، القضيّة التي يلائمها العامود الذي يحوي مرّتين الرمز T هي "طَّوطُولُوجيا" ، القضيّة التي يلائمها العامود الذي يحوي مرتين الرمز F هي تناقض، والقضيّة التي يلائمها العامود الذي يحوي T وأيضًا F ليست "طَّوطُولُوجيا" وليست تناقض.

ليست "طَّوطُولُوجيا" وليست تناقض	تناقض	"طَّوطُولُوجيا"	قضيّة
X			أ) A
		X	ب) $A\vee(\neg A)$
X			ت) $A\vee A$
	X		ث) $A\wedge(\neg A)$

تمرين 36:

أيّ من القضايا التالية هي "طَّوطُولُوجيا"، أيّها تناقضات وأيّها ليست "طَّوطُولُوجيا" وليست تناقض؟ يمكن الاستعانة في الجدول الذي يظهر بعد التمرين.

قضيّة	"طَّوطُولُوجيا"	تناقض	ليست "طَّوطُولُوجيا" وليست تناقض
أ) $A \vee B$			X
ب) $A \vee (A \rightarrow B)$	X		
ت) $((\neg B) \rightarrow A) \wedge ((\neg A) \wedge (\neg B))$		X	
ث) $(A \wedge (\neg B)) \rightarrow (\neg A)$			X

تمرين 37:

اكتبوا قضيّة يلائمها جدول الصدق التالي:

A	*B*	*قضيّة*
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

القضيّة هي : $(\neg A) \vee B$.

تمرين 38:

سجّلوا أي أزواج من القضايا التي في الجدول متكافئة. بإمكانكم الاستعانة في الجدول في نهاية التمرين.

	القضيّة الأولى	القضيّة الثانية	متكافئة	غير متكافئة
(1	$A \wedge B$	$A \vee B$		X
(2	$A \rightarrow B$	$(\neg A) \vee (A \wedge B)$	X	
(3	$\neg(\neg A)$	A	X	
(4	$A \rightarrow A$	$A \vee (\neg A)$	X	
(5	$B \wedge (B \vee A)$	B	X	

تمرين 39:

هل القضيّة $(A \wedge B) \to (\neg C)$ مكافئة للقضيّة $(A \wedge C) \to B$؟

لا، لأن جدول الصدق الخاص بهم مختلف، كما نلاحظ في الجدول التالي:

$(A \wedge C) \to B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \to (\neg C)$	$A \wedge B$	$\neg C$	**C**	**B**	**A**
T	T	**F**	T	F	**T**	**T**	**T**
T	F	T	T	T	**F**	**T**	**T**
F	T	**T**	F	F	**T**	**F**	**T**
T	F	T	F	T	**F**	**F**	**T**
T	F	T	F	F	**T**	**T**	**F**
T	F	T	F	T	**F**	**T**	**F**
T	F	T	F	F	**T**	**F**	**F**
T	F	T	F	T	**F**	**F**	**F**

تمرين 40:

بجانب الحالات المذكورة في الجدول، أكتبوا إن كان الشرط هو شرطًا كافيا وليس ضروريًا، شرطًا ضروريًا وليس كافيًا، أو شرطًا ضروريًا وكافيًا للادعاء.

شرط كافي	شرط ضروري	الاستنتاج	الشرط
نعم	نعم	إذا غدا يوم الأربعاء	اليوم يوم الثلاثاء
لا	نعم	هذا الشكل هو مربع	يوجد لهذا الشكل أربعة أضلاع
نعم	نعم	هذا الشكل هو شكل رباعي	يوجد لهذا الشكل أربعة أضلاع
لا	نعم	سأدخل هدفًا في المرمى	سألعب كرة قدم
لا	نعم	هذا المخلوق هو انسان	هذا المخلوق من الثديّات
نعم	لا	هذا المخلوق من الثديات	هذا المخلوق هو انسان
نعم	نعم	رؤوف هو ولد ولنا أب مشترك	رؤوف هو أخي

تمرين 41:

يخبر طارق صديقه فادي: "في كلّ مرة أزور بها بيت خالتي عبير نلعب الشطرنج، وفي كل مرة نلعب بها الشطرنج تفوز عبير. في يوم السبت السابق لم تفز عبير في الشطرنج". "إن كان الأمر كذلك". يقول فادي، "لم تزر عبير". في هذا التمرين سنجد القواعد التي استعان بها فادي للتوصل الى الاستنتاج بأن طارق لم يزر عبير.

أ. أكتبوا بالكلمات القضايا التي يصفها طارق في قصته.

A = أزور بيت خالتي عبير.

B = أنا وعبير نلعب الشطرنج.

C = تفوز عبير في الشطرنج.

ب. أكتبوا بلغة حساب القضايا التي صرح طارق بأنها صحيحة.

$A\to B$, $B\to C$, $\neg C$.

ت. أكتبوا كل قوانين الاستنتاج التي استعان بها فادي للتوصل للاستنتاج بأن طارق لم يزر عبير، وكل ما استنتجه من قاعدة الاستنتاج.

من القضايا $B\to C$, $\neg C$ ومن قاعدة الاستنتاج السلبي استنتج فادي أن القضيّة $\neg B$ صحيحة، أي أنه أنا وعبير لم نلعب الشطرنج يوم السبت.

من القضايا $A\to B$, $\neg B$ ومن قاعدة الاستنتاج السلبي استنتج فادي أن القضيّة $\neg A$ صحيحة: يوم السبت لم أزر عبير.

تمرين 42:

فسّروا لماذا تتحقّق قاعدة الاستنتاج" إذا كانت A صحيحة فإن $A\vee B$ صحيحة".

يمكن الاستعانة في جدول الصدق للقضيّة $A\vee B$ الموجود في الأعلى.

في جميع أسطر جدول الصدق $A\vee B$ التي تكون بها قيمة الصدق للقضيّة A هو T, قيمة الصدق أيضًا للقضيّة $A\vee B$ هي T.

تمرين 43:

فسّروا لماذا تتحقّق قاعدة الاستنتاج: "إذا $A\to B$ ليست صحيحة فإن B ليست صحيحة". يمكن الاستعانة في جدول الصدق للقضيّة $A\to B$.

يوجد سطر واحد في جدول الصدق للقضيّة $A\to B$ التي بها قيمة الصدق للقضيّة هي F. في هذا السطر قيمة الصدق للقضيّة B هو كذلك F. لذلك، إذا كانت القضيّة $A\to B$ غير صحيحة، فمن المؤكد أيضًا أن القضيّة B غير صحيحة.

تمرين 44:

أخبرت رونيت أبيها: "ذهبت الى المدرسة ورأيت صديقتي دانا، بما أني ذهبت الى المدرسة، فقد رأيت معلمتي. أنت تعلم إن كانت المعلمة مريضة لن اتمكن من رؤيتها في المدرسة".

"أن كان كذلك"، قال الأب، " فإن المعلمة لم تكن مريضة اليوم".

أكتبوا القضايا التي تصفها رونيت في قصتها:

A = ذهبت الى المدرسة،

B = رأيت دانا،

C = رأيت المعلمة،

D = كانت المعلمة مريضة.

أكتبوا بواسطة رموز رياضية القضايا الصحيحة التي صرحت بها رونيت.

$A \wedge B$, $A \rightarrow C$, $D \rightarrow (\neg A)$.

أكتبوا جميع قواعد الاستنتاج التي استعان بها الأب للتوصل الى الاستنتاج بأن المعلمة لم تكن مريضة، وما استنتجه من كل قواعد الاستنتاج:

بمساعدة قاعدة الاستنتاج "وأيضًا" وبما أن القضيّة $A \wedge B$ صحيحة استنتج الأب أن القضيّة A صحيحة: ذهبت الى المدرسة. ومن هنا استنتج أن الـ $\neg A$ غير صحيحة: غير صحيح بأني ذهبت الى المدرسة.

بمساعدة قاعدة الاستنتاج السلبي وكون الـ $D \rightarrow (\neg A)$ صحيحة وال $\neg A$ غير صحيحة، استنتج الأب أنّ D غير صحيحة، المعلمة لم تكن مريضة.

تمرين 45:

لنتمعّن في الحوار بين جود وأمه:

جود: لو كان معي نقود لكنت اشتريت بوظة.

الأم: لو أنك اشتريت بوظة، كان لديّ ألم أسنان.

جود: ولكن لا يوجد لدي ألم أسنان.

الأم: إن كان كذلك، فهذا يعني أنه لم يكن معك نقود.

نرمز لـ:

A = "كان مع جود نقود",

B = "اشترى جود بوظة"،

C = "يوجد لجود ألم أسنان".

أ. أكتبوا بواسطة رموز رياضية القضيّة التي يدعي جود بأنها صحيحة.

لو كان معي نقود لاشتريت بوظة: $A \rightarrow B$.

لا يوجد لديّ ألم أسنان: $\neg C$.

ب. أكتبوا برموز رياضية القضيّة التي تقول الأم بأنها صحيحة:

لو اشتريت بوظة، لكان لديك ألم أسنان: $B \rightarrow C$.

ت. فسّروا كيف توصلت الأمّ إلى أنه لم يكن مع جود نقود.

استعانت الأم مرّتين في قاعدة الاستنتاج السلبي. كما نذكر، فأنه حسب قاعدة الاستنتاج السلبي إذا كان القضيّة $A \rightarrow B$ صحيحة وإذا كانت B غير صحيحة فإنه عندها A غير

صحيحة. إذا استبدلنا الحرف B بالحرف C والحرف A بـالحرف B ، سنتوصل إلى أنّ قاعدة الاستنتاج السلبي تنصّ على أنّ القضيّة B→C صحيحة وإذا كانت C غير صحيحة فانّه عندها أيضًا B غير صحيحة. قررت الأم أن القضيّة B→C صحيحة، قرّر جود أنّ القضيّة C غير صحيحة، ولذلك من خلال قاعدة الاستنتاج السلبي استنتجت الأم أنّ القضيّة B غير صحيحة. قرر جود أنّ القضيّة A→B صحيحة، وبما أنّنا رأينا أنّ القضيّة B غير صحيحة ينتج أنّ القضيّة A غير صحيحة، أي – لم يكن مع جود نقود.

تمرين 46:

لنتمعّن في القضيّة: "يوجد لكلّ السيارات في العالم أربعة دواليب".

اعرضوا القضيّة بلغة حساب القضايا وحدّدوا مجال التعريف للمتغيّر الذي ستستعملونه.

القضيّة $C(x)$ ="للسيارة x يوجد أربعة دواليب".

مجال التعريف للمتغير x: كل سيارة في العالم.

القضيّة بلغة حساب القضايا: $\forall x(C(x))$

تمرين47:

نرمز بـ $B(x)$ = "الطالبة x وصلت اليوم مرتدية تنورة خضراء";

مجال التعريف هو كل طالبات الصف.

أكتبوا المعنى الكلامي للقضايا:

أ. (إيميلي)B: وصلت ايميلي اليوم مرتدية تنورة خضراء.

ب. (تالا)B¬: لم تصل تالا اليوم مرتدية تنورة خضراء.

ت. ((دينا)B¬) ∧ ((شام)B): ((دينا)B¬) ∧ ((شام)B): x وصلت شام اليوم مرتدية تنورة خضراء ولم تصل دينا اليوم مرتدية تنورة خضراء.

ث. ((دينا)B¬)→((شام)B): إذا وصلت شام اليوم مرتدية تنورة خضراء فإن الطالبة دينا لم تصل اليوم مرتدية تنورة خضراء.

ج. $\forall x(B(x))$: وصلت كل طالبات الصف مرتديات تنورة خضراء.

ح. (دينا)B: دينا طالبة تتعلم في الصف، وبما أنها غير موجودة في مجال التعريف للمتغير x ، الجملة (دينا)B ليست قضيّة.

تمرين 48:

لنتمعن في القضيّة: E = "إذا وجد لكل طالب في الصف أخوان، عندها سيكون بالإمكان تنظيم لعبة كرة القدم في اليوم الرياضي". نرمز لـ:

$A(x)$ = "للطالب x يوجد أخوان"،

B = " بالإمكان تنظيم لعبة كرة القدم في اليوم الرياضي ".

أ. مجال التعريف لـ x: كل طلاب الصف.

ب. أكتبوا القضيّة E بواسطة $B, A(x)$ والتعبير الكمّي ∀: القضيّة $(\forall x(A(x))) \rightarrow B$.

تمرين 49:

نشير إلى -:

$A(x)$ = "الطالب x حضر اليوم الى المدرسة"،

$B(x)$ = "الطالب x سمع محاضرة عن الإنسان القديم".

مجال التعريف للمتغير x هو مجموعة طلاب الصف.

أكتبوا المعنى الكلامي للقضايا:

أ. $\forall x(A(x) \wedge B(x))$: حضر كل طلاب الصف اليوم الى المدرسة وسمعوا محاضرة عن الإنسان القديم.

ب. $\forall x(A(x) \vee B(x))$: حضر كل طلاب الصف اليوم الى المدرسة أو سمعوا محاضرة عن الإنسان القديم.

ت. $\forall x(A(x)) \vee \forall x(B(x))$: حضر كل طلاب الصف اليوم إلى المدرسة أو سمع كلّ طلاب الصف محاضرة عن الإنسان القديم.

ث. أعطوا مثالًا لحالة فيها قيمة الصدق لقضيّة في البند "ب" هي "صدق" وقيمة الصدق للقضيّة في البند ت هي "كذب". نفرض أنّ كل طلاب الصف جاؤوا اليوم الى المدرسة وأنّ كل الطالبات سمعن محاضرة عن الإنسان القديم. سنلاحظ أن قيمة الصدق للقضيّة في البند "ب" هي "صدق"، لأنّ كلّ طالب في الصف جاء الى المدرسة أو سمع محاضرة عن الانسان القديم. من جهة أخرى، قيمة الصدق للقضيّة في البند "ت" هي "كذب"، لأن جزئي القضيّة لا يتحققان: ليس صحيحًا أنّ كلّ الطلاب حضروا اليوم إلى المدرسة وليس صحيحًا أنّ كل الطلاب سمعوا المحاضرة عن الانسان القديم.

ج. $\forall x(B(x) \rightarrow (\neg A(x)))$: كلّ طالب سمع محاضرة عن الانسان القديم لم يحضر اليوم الى المدرسة.

تمرين 27:

حدّدوا قيمة الصدق للقضيّة $\forall x(A(x))$, في كل واحدة من التعريفات المعطاة لـ $A(x)$:

$A(x)$	مجال التعريف للمتغير x	صدق	كذب	أحيانًا صدق وأحيانًا كذب
6) يوجد للطالب x قلب	كل طلاب الصف	X		
7) يوجد لكل دولة رئيس	كل دول العالم		X	
8) $x^2 \geq 0$	كل الأعداد	X		
9) لا يوجد للطالب x شعر أشقر	كل طلاب الصف	X	X	X
10) يوجد لكل شخص بالضبط 3 أولاد	كل الاشخاص في العالم		X	

قيمة الصدق للقضيّة " لا يوجد للطالب x شعرًا أشقرًا " هي صدق في الصفوف التي فيها لا يوجد طالب ليس أشقرًا، وكذب في الصفوف التي فيها الطلاب شُقر. لذلك جميع الاجابات الثلاث

ممكنة. يمكن أن نشير إلى الاجابة "كذب"، وإذا لم يكن في صفكم طالب أشقر، كان بإمكانكم الاشارة الى الاجابة "صدق". إذا فكرتم في الإمكانية أننا فعليا لا نعلم عن أي صف نتحدث، بإمكانكم الاشارة الى الاجابة "أحيانا صدق وأحيانا كذب".

في الاجابة للبند (2) – في عالمنا قيمة الصدق للقضيّة هي كذب، لأن لبريطانيا، على سبيل المثال، لا يوجد رئيس. ولكن إن تخيّلتم عالمًا فيه لكلّ دولة رئيس، عندها ستكون قيمة الصدق لهذه القضيّة في هذا العالم "صدق"، عندها ستكون الإجابة "أحيانا صدق وأحيانا كذب". في الواقع هي إجابة محنّكة ولكنها مقبولة. انتبهوا إلى أن التلاميذ الذين كانت إجابتهم محنّكة في البند (2)، عليها أن تكون كذلك في البندين (1) و-(4)، حيث أنّه اذا تمكنّا من تخيّل عالم فيه لكل دولة رئيس، يمكن تخيّل أيضا عالم فيه أشخاص من دون قلب. مع الكثير من الخيال يمكن تخيّل عالم به لكلّ شخص ثلاثة أولاد، على الرغم من أن هذا يجبرنا على أن يكون في هذا العالم عدد لا نهائي من الاشخاص، حيث يوجد لكلّ شخص 3 أولاد، 9 أحفاد ، 27 ابن حفيد وهكذا دواليك. هذه الإجابة المحنّكة ستؤدي إلى أن تكون الاجابة للبند (5) هي أيضا "أحيانا صدق وأحيانا كذب".

تمرين 28:

لنتمعن في القضيّة: "يوجد دولة عاصمتها لندن". أكتبوا مجال التعريف للمتغير x والمعنى الكلامي للقضيّة $B(x)$ التي وفقها القضيّة $\exists x(B(x))$ تمثّل القضيّة "يوجد دولة عاصمتها لندن".

مجال التعريف للمتغير x: كل دول العالم.

$B(x)$ = "عاصمة الدولة x هي لندن".

تمرين 29:

بمساعدة $A(x)$ و-$B(x,y)$ المسجّلة أعلاه أكتبوا في حساب القضايا: "يوجد في الصف على الأقل ثلاثة طلاب أسمهم عمرو". انتبهوا بأنّه عليكم الاستعانة في ثلاث متغيرات– x، y، z – من أجل وصف الطلاب الثلاثة.

$$\exists x \exists y \exists z\, (A(x) \wedge A(y) \wedge A(z) \wedge (\neg B(x,y)) \wedge (\neg B(x,z)) \wedge (\neg B(y,z)))$$

تمرين 30:

سنرى في هذا التمرين أنّه يمكن كتابة القضيّة "يوجد في الصف على الأكثر طالب أشقر واحد" هكذا: $\forall x \forall y\ (B(x,y) \vee (A(x) \rightarrow (\neg A(y))))$

أ. أكتبوا بالكلمات معنى التعبير $B(x,y) \vee (A(x) \rightarrow (\neg A(y)))$:

"x و-y هم نفس الطالب، أو إذا كان الطالب x أشقرًا فإن الطالب y ليس أشقرًا".

ب. فسروا لماذا القضيّة $\forall x \forall y\ (B(x,y) \vee (A(x) \rightarrow (\neg A(y))))$ تعني أنّه يوجد في الصف على الأكثر طالب أشقر واحد.

المعنى الكلامي للقضيّة هو:

"لكلّ طالبين في الصف أو أنّهما نفس الطالب، أو إذا كان أحدهما أشقر فالأخر ليس أشقرًا".

طريقة أخرى لنصّ المعنى الكلامي هي:

"لكلّ طالبين مختلفين في الصف، إن كان أحدهما أشقر فإن الاخر غير أشقر".

نلاحظ، من هنا، أنه لا يمكن أن يكون في الصف أكثر من طالب أشقر واحد، فإن كان في الصف طالبان أشقران ، كنا سنجد طالبين مختلفين أحدهما أشقر والاخر ليس أشقر وعندها المعنى الثاني الذي اقترحناه لن يتحقق.

تمرين 31:

في هذا التمرين نكتب في لغة حساب القضايا القضيّة "يوجد بالضبط دولة واحدة عاصمتها لندن". نلاحظ أنّ القضيّة "يوجد بالضبط دولة واحدة عاصمتها لندن" مكافئة للقضيّة "يوجد على الأقل دولة واحدة عاصمتها لندن وأيضا على الأكثر دولة واحدة عاصمتها لندن".

$D(x)$ = "عاصمة الدولة x هي لندن".

أ.مجال التعريف ل x هو: كل دول العالم.

ب.أكتبوا بلغة حساب القضايا القضيّة "يوجد على الأقل دولة واحدة عاصمتها لندن":

$\exists x(D(x))$

ت. أكتبوا بلغة حساب القضايا القضيّة " يوجد على الأكثر دولة واحدة عاصمتها لندن"، استعملوا القضيّة $B(x,y)$ = "$x=y$".

$$\forall x \forall y \ (\ (D(x) \wedge D(y)) \rightarrow B(x,y) \ )$$

ت. أكتبوا بلغة حساب القضايا القضيّة " يوجد بالضبط دولة واحدة عاصمتها لندن":

$$(\exists x(D(x))) \wedge (\forall x \forall y \ (\ (D(x) \wedge D(y)) \rightarrow B(x,y) \ ) \ )$$

تمرين 32:

لنتمعّن في القضيّة "يوجد لكلّ ولد أب وأم". نشير إلى -:

$A(x,y)$ = "y هو أب x"

$B(x,z)$ = "z هي أم x".

أ.اكتبوا مجال التعريف للمتغيرات x, y, z:

مجال التعريف لـ x: كلّ الأولاد في العالم.

مجال التعريف لـ y: كلّ الاباء في العالم.

مجال التعريف لـ z: كلّ الأمهات في العالم.

ب.أكتبوا القضيّة " يوجد لكل ولد أب" بواسطة $A(x,y)$ و $\forall, \exists$.

$$\forall x \exists y \ A(x,y)$$

ت.أكتبوا القضيّة " يوجد لكل ولد أم" بواسطة $B(x,z)$ و $\forall, \exists$.

$$\forall x \exists z \ B(x,z)$$

ث.أكتبوا القضيّة " يوجد لكل ولد أب وأم" بواسطة $A(x,y), B(x,z)$ و $\forall, \exists$. انتبهوا عليكم استعمال $\exists$مرتين.

إحدى الطرق لكتابة القضيّة هي:

$$\forall x \exists y \exists z \ (A(x,y) \wedge B(x,z))$$

طريقة أخرى لكتابة القضيّة هي:

$$(\forall x \exists y \ A(x,y)) \wedge (\forall x \exists z \ B(x,z))$$

تمرين 33:

لنتمعن في القضيّة: D = "لكل ولد يوجد صديق اسمه يوسف". نرمز بـ:

$A(x)$ = "اسم x هو يوسف"،

$B(x,y)$ = "الولد x هو صديق الولد y".

أ.مجال التعريف لـ x: كل أولاد العالم.

ب.مجال التعريف لـ y: كل أولاد العالم.

ت.أكتبوا القضيّة D بواسطة $A(x)$, $B(x,y)$ والتعابير الكميّة $\forall$, $\exists$:

$$\forall x \exists y\ (A(y) \wedge B(x,y))$$

المعنى الكلامي للقضيّة هو: لكل ولد x يوجد ولد y حيث أن y هو يوسف والولد x صديق للولد y.

تمرين 34:

لنتمعن في القضيّة: D = "لكلّ ولد اسمه ليس سيف يوجد صديق اسمه سيف".

نرمز بـ:

$A(x)$ = "اسم x هو سيف",

$C(x,y)$ = "الولد y هو صديق الولد x".

أكتبوا القضيّة D بواسطة $A(x)$، $B(y)$، $\forall$ و-$\exists$ ورموز منطقية إضافية. يمكن الاستعانة بمتغيرات إضافية. انتبهوا يجب استعمال $A(x)$ مرتين!

الاجابة: $\forall x\ ((\neg A(x)) \rightarrow (\exists y\ (A(y) \wedge C(x,y))))$

تمرين 35:

مجال التعريف للمتغير x هو كلّ البنين في الصف ومجال التعريف للمتغير y هو كلّ البنات في الصف. مجال التعريف للمتغير z هو طلاب الصف (بنين وبنات). نشير إلى:

$D(z)$ = "للطالب z يوجد بلوزة حمراء",

$C(z)$ = "الطالب z يحب لعب كرة القدم".

أكتبوا القضايا التالية بواسطة $D(x)$، $D(y)$،$C(x)$، $C(y)$ وروابط منطقيّة أخرى. يمكن أن تحتاجوا إلى استعمال متغيرات أخرى.

أ."كلّ البنين في الصفّ يحبّون لعب كرة القدم، ويوجد بنت في الصف ترتدي بلوزة حمراء":

$$(\forall x\ (C(x))) \wedge (\exists y\ (D(y)))$$

ب."كلّ البنات في الصف يحببن لعب كرة القدم، ولا يوجد بنت في الصفّ ترتدي بلوزة حمراء":

$$(\forall y\ (C(y))) \wedge (\neg\ (\exists y\ (D(y))))$$

حلّ آخر:

$$(\forall y\ (C(y))) \wedge (\forall y\ (\neg D(y)))$$

ت."إذا كان كلّ البنين في الصف يحبّون لعب كرة القدم، فإنّه يوجد بنت في الصفّ ترتدي بلوزة حمراء":

$$(\forall x\ (C(x))) \rightarrow (\exists y\ (D(y)))$$

ث."إذا كان في الصف بنتان تحبان لعب كرة القدم، فإنه يوجد في الصف اثنان من البنين يرتديان بلوزة حمراء": استعملوا القضيّة $B(x,y) = "x=y"$. علينا في هذا التمرين استعمال متغيرين مختلفين اللّذين يمثلان بنات ومتغيرين مختلفين يمثلان البنين. المتغيران اللذان يمثلان البنات هما y_1 و-y_2 المتغيران اللذان يمثلان البنين هما x_1 و-x_2.

$$(\exists y_1 \exists y_2\ (C(y_1) \wedge C(y_2) \wedge (\neg B(y_1,y_2)))) \rightarrow$$

$$(\exists x_1 \exists x_2\ (D(x_1) \wedge D(x_2) \wedge (\neg B(x_1,x_2))))$$

تمرين 36:

نشير إلى: $B(x)$ = " يوجد للولد x أخت اسمها حلا"; مجال التعريف لـ x هو أولاد الصف.

أ. أكتبوا المعنى الكلامي للقضيّة $\neg(\exists x(B(x))$: ليس صحيحًا وجود طالب في الصف اسم أخته حلا.

ب. أكتبوا المعنى الكلامي للقضيّة $\forall x(\neg B(x))$:

لكلّ الاولاد في الصف لا يوجد اخت اسمها حلا.

ت. فسّروا لماذا القضيّة $\neg(\exists x(B(x))$ مكافئة للقضيّة $\forall x(\neg B(x))$.

القضيتان متكافئتان لانّ لهما دائما نفس قيمة الصدق: قيمة الصدق لكلا القضيتين هي صدق، إن لم يكن هناك أي طالبٍ بالصف اسم اخته حلا، وقيمة الصدق لكلا القضيّتين هو "كذب" إن كان هناك على الأقلّ ولد واحد في الصف اسم اخته حلا.